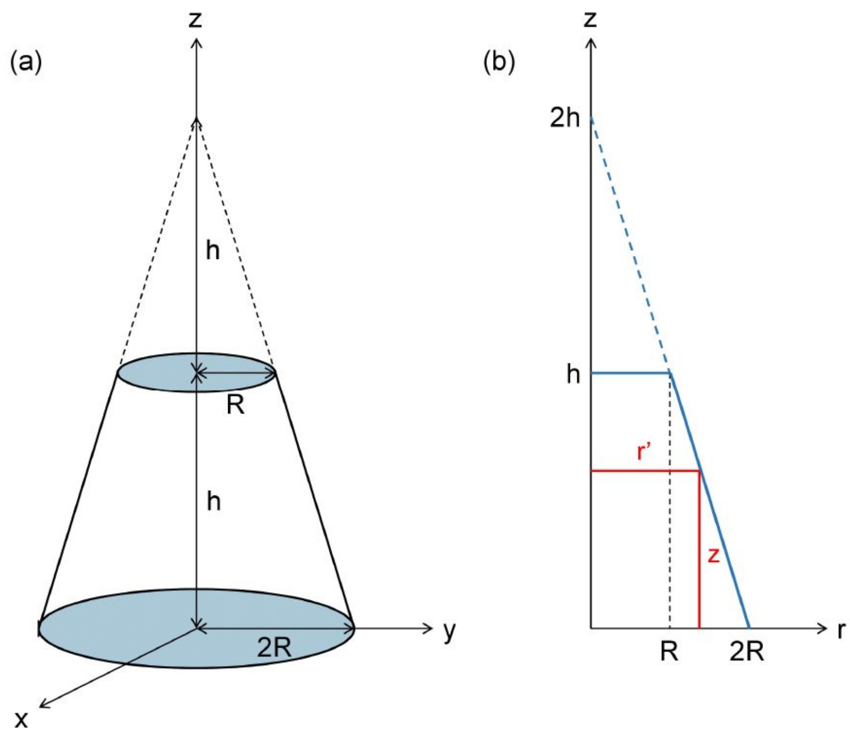
Řešení testu 2b

Fyzika I (mechanika a molekulová fyzika)
NOFY021

8. ledna 2019

Příklad 1

Zadání: Uvažujte homogenní komolý kužel o výšce h a poloměrech podstav r_1 a r_2, viz obrázek.
Vypočítejte polohu hmotného středu, pokud pro poloměry podstav platí $r_2 = 2r_1$.



První způsob řešení:
Polohový vektor $\vec{r}_T$ hmotného středu homogenního tělesa o objemu V je obecně dán předpisem:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{V} \int_V \vec{r}\, \mathrm{d}V. \tag{1}$$

Určitý integrál (1) lze nejsnadněji počítat pomocí cylindrických souřadnic r, φ, z.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ \mathrm{d}V &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Integrační meze pro proměnné r, φ, z jsou následující:

$$\begin{aligned} r &\in [r', 2R], \\ \varphi &\in [0, 2\pi], \\ z &\in [0, h]. \end{aligned}$$

Horní mez r' pro proměnnou r závisí na výšce z, viz obrázek (b), podle lineárního vztahu:

$$\begin{aligned}
z &= k \cdot r' + q \\
2h &= k \cdot 0 + q \Rightarrow q = 2h \\
0 &= k \cdot 2R + q \Rightarrow k = -\frac{2h}{2R} \\
z &= -\frac{h}{R}r' + 2h \\
r' &= -\frac{R}{h}z + 2R.
\end{aligned}$$

Objem komolého kuželu je obecně roven:

$$V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)h,$$

což v našem případě $r_1 = R$ a $r_2 = 2R$ dává:

$$V = \frac{7}{3}\pi R^2 h.$$

Nyní už můžeme dosadit do rovnice (1) a vypočítat souřadnice hmotného středu. Souřadnice x_T a y_T jsou nulové ze díky symetrii komolého kuželu. Je nutné tedy spočítat pouze souřadnici z_T.

$$\begin{aligned}
z_T &= \frac{1}{V}\int_V z \, \mathrm{d}V \\
z_T &= \frac{1}{\frac{7}{3}\pi R^2 h}\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{-\frac{R}{h}z+2R} zr \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{7\pi R^2 h}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{-\frac{R}{h}z+2R} rz \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{7\pi R^2 h} \cdot 2\pi \cdot \int_0^h \int_0^{-\frac{R}{h}z+2R} rz \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{6}{7R^2 h}\int_0^h \left[\frac{r^2}{2}z\right]_0^{-\frac{R}{h}z+2R} \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{7R^2 h}\int_0^h \left(\frac{R^2}{h^2}z^3 - \frac{4R^2}{h}z^2 + 4R^2 z\right) \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_T &= \frac{3}{7R^2 h}\left[\frac{R^2}{h^2}\frac{z^4}{4} - \frac{4R^2}{h}\frac{z^3}{3} + 4R^2\frac{z^2}{2}\right]_0^h \\
z_T &= \frac{3}{7h}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{4h^2}{3} + 2h^2\right) \\
z_T &= \frac{3}{7}\frac{11}{12}h \\
z_T &= \frac{11}{28}h
\end{aligned}$$

Druhý způsob řešení:
Zadaný komolý kužel vznikne odečtením malého kuželu o výšce h a poloměru podstavy R od velkého kuželu o výšce $2h$ a poloměru podstavy $2R$, viz obrázek (a). Nechť je z-ová poloha hmotného středu velkého kuželu z_{T1} a z-ová poloha hmotného středu malého kuželu z_{T2}. Označme objem velkého kuželu V_1 a objem malého kuželu V_2. Potom pro z-ovou souřadnici hmotného středu komolého kuželu platí:

$$z_T = \frac{V_1 z_{T1} - V_2 z_{T2}}{V_1 - V_2}. \tag{2}$$

Zbývá dopočítat polohu hmotného středu homogenního kuželu o poloměru podstavy $\bar{R}$ a výšce $\bar{h}$. V obrázku (b) platí $\bar{R} = 2R$ a $\bar{h} = 2h$. K výpočtu opět využijeme cylindrické souřadnice a následující meze:

$$\begin{aligned} r &\in [0, r''], \\ \varphi &\in [0, 2\pi], \\ z &\in [0, \bar{h}]. \end{aligned}$$

Horní mez r'' pro proměnnou r závisí opět na výšce z, podle lineárního vztahu:

$$\begin{aligned} z &= k \cdot r'' + q \\ \bar{h} &= k \cdot 0 + q \Rightarrow q = \bar{h} \\ 0 &= k \cdot \bar{R} + q \Rightarrow k = -\frac{\bar{h}}{\bar{R}} \\ z &= -\frac{\bar{h}}{\bar{R}} r'' + \bar{h} \\ r'' &= -\frac{\bar{R}}{\bar{h}} z + \bar{R}. \end{aligned}$$

Objem kuželu je obecně roven:

$$V = \frac{1}{3}\pi \bar{R}^2 \bar{h},$$

Počítejme tedy z-ovou polohu hmotného středu kuželu.

$$\begin{aligned}
z_T &= \frac{1}{V}\int_V z \, \mathrm{d}V \\
z_T &= \frac{1}{\frac{1}{3}\pi\bar{R}^2\bar{h}}\int_0^{\bar{h}}\int_0^{2\pi}\int_0^{-\frac{\bar{R}}{\bar{h}}z+\bar{R}} zr \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{\pi\bar{R}^2\bar{h}}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\int_0^{\bar{h}}\int_0^{-\frac{\bar{R}}{\bar{h}}z+\bar{R}} rz \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{\pi\bar{R}^2\bar{h}}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\bar{h}}\int_0^{-\frac{\bar{R}}{\bar{h}}z+\bar{R}} rz \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{6}{\bar{R}^2\bar{h}}\int_0^{\bar{h}}\left[\frac{r^2}{2}z\right]_0^{-\frac{\bar{R}}{\bar{h}}z+\bar{R}} \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{\bar{R}^2\bar{h}}\int_0^{\bar{h}}\left(\frac{\bar{R}^2}{\bar{h}^2}z^3 - \frac{2\bar{R}^2}{\bar{h}}z^2 + \bar{R}^2 z\right) \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{\bar{R}^2\bar{h}}\left[\frac{\bar{R}^2}{\bar{h}^2}\frac{z^4}{4} - \frac{2\bar{R}^2}{\bar{h}}\frac{z^3}{3} + \bar{R}^2\frac{z^2}{2}\right]_0^{\bar{h}} \\
z_T &= \frac{3}{\bar{h}}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{2h^2}{3} + \frac{\bar{h}^2}{2}\right) \\
z_T &= \frac{1}{4}\bar{h}
\end{aligned}$$

Pro polohy z_{T1} a z_{T2} tedy platí:

$$\begin{aligned}
z_{T1} &= \frac{1}{4}\cdot 2h = \frac{1}{2}h, \\
z_{T2} &= h + \frac{1}{4}\cdot h = \frac{5}{4}h.
\end{aligned}$$

Objemy V_1 a V_2 jsou:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{3}\pi(2R^2)(2h) = 8\frac{1}{3}\pi R^2 h, \\
V_2 &= \frac{1}{3}\pi R^2 h.
\end{aligned}$$

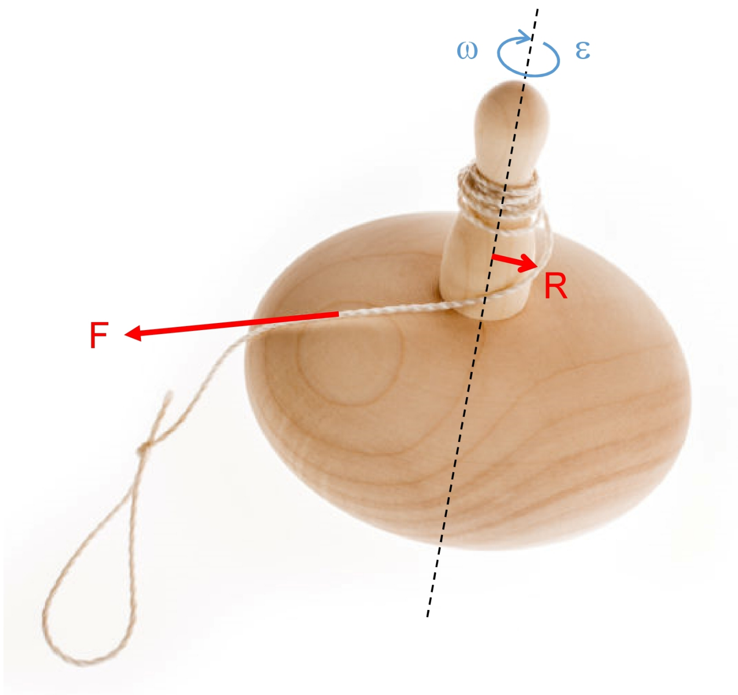
Dosaďme do rovnice (2) a dopočítejme z_T.

$$\begin{aligned}
z_T &= \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h\left(8\cdot\frac{1}{2}h - 1\cdot\frac{5}{4}h\right)}{\frac{1}{3}\pi R^2 h(8-1)} \\
z_T &= \frac{4-\frac{5}{4}}{7}h \\
z_T &= \frac{11}{28}h
\end{aligned}$$

Oběma způsoby jsme tedy dostali polohu hmotného středu komolého kuželu jako $\vec{r}_T = \left(0, 0, \frac{11}{28}h\right)$.

Příklad 2

Zadání: Dřevěnou káču s momentem setrvačnosti $J = 10^{-4}$ kg m^2 roztočíme pomocí provázku následovně. Provázek o délce $s = 1$ m namotáme na váleček o poloměru $R = 5$ mm a táhneme za něj silou $F = 2$ N, dokud se celý provázek neodmotá.
(a) S jakým úhlovým zrychlením se bude káča roztáčet?
(b) Jak dlouho bude trvat, než se celý provázek odmotá?
(c) Vypočítejte, s jakou úhlovou frekvencí se káča bude točit.



Řešení: (a) Pro pohyb káči platí 2. impulzová věta:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}. \tag{1}$$

Kolmá vzdálenost síly $\vec{F}$ od osy otáčení je R, vztah (1) tedy můžeme přepsat do skalárního tvaru a vypočítat velikost úhlového zrychlení ε.

$$\begin{aligned} FR &= J\varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{FR}{J} \\ \varepsilon &= 100 \text{ rad s}^{-2} \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Provázek se odmotává se zrychlením a. Mezi zrychlením provázku a úhlovým zrychlením káči platí jednoduchý vztah $a = \varepsilon R$. Dráha s rovnoměrně zrychleného pohybu je dána známým vztahem $s = \frac{1}{2}at^2$, odkud lze již snadno vyjádřit dobu t, po kterou se provázek odmotává.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}at^2 \\ t &= \sqrt{\frac{2s}{a}} \\ t &= \sqrt{\frac{2s}{\varepsilon R}} \end{aligned}$$

Dosadíme-li si do posledního vztahu výraz (2) pro ε, dostáváme:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2s}{\varepsilon R}}, \\ t &= \sqrt{\frac{2sJ}{FR^2}}, \\ t &= 2\ \mathrm{s}. \end{aligned}$$

(c) Konečnou úhlovou rychlost káči ω můžeme vypočítat ze znalosti úhlového zrychlení ε a času t.

$$\begin{aligned} \omega &= \varepsilon t \\ \omega &= \frac{FR}{J}\sqrt{\frac{2sJ}{FR^2}} \\ \omega &= \sqrt{\frac{2Fs}{J}} \\ \omega &= 200\ \mathrm{rad\ s^{-1}} \end{aligned}$$

Stejného výsledku dosáhneme pomocí rovnosti energií, kdy práce, kterou vykoná síla $\vec{F}$, je rovna rotační kinetické energii káči.

$$\begin{aligned} W &= E_k \\ Fs &= \frac{1}{2}J\omega^2 \\ \omega &= \sqrt{\frac{2Fs}{J}} \\ \omega &= 200\ \mathrm{rad\ s^{-1}} \end{aligned}$$

Příklad 3

Zadání: Pozorovatel stojí ve výtahu na osobní váze. Je-li výtah v klidu, ukazuje váha hmotnost 77 kg. Během rozjezdu výtahu vzhůru ukazuje váha po dobu 6 s hmotnost 82 kg, poté ukazuje po dobu 40 s opět hmotnost 77 kg a nakonec při brzdění výtahu po dobu 7.5 s ukazuje hmotnost 73 kg.
Vypočítejte délku dráhy, kterou urazil výtah.

Pozn.: Počítejte s konstantním tíhovým zrychlením $g = 9.81$ m s^{-2}.

Řešení: Označme si postupně veličiny $m_0 = 77$ kg (skutečná hmotnost pozorovatele), $m_1 = 82$ kg, $m_2 = 77$ kg, $m_3 = 73$ kg, $t_1 = 6$ s, $t_2 = 40$ s, $t_3 = 7.5$ s. Při rozjezdu kabiny nahoru se zrychlením a_1 si připadá pozorovatel těžší o 5 kg. Poté se kabina pohybuje rovnoměrným pohybem a tíha pozorovatele je stejná jako v klidu. Nakonec při brzdění kabiny se zrychlením a_3 si připadá pozorovatel lehčí o 4 kg. Celková dráha s, kterou kabina výtahu urazí je rovna součtu drah, které urazí při rovnoměrně zrychleném pohybu (s_1), při rovnoměrném pohybu (s_2) a při rovnoměrně zpomaleném pohybu (s_3).

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí si můžeme vypočítat dráhu s_1 a konečnou rychlost v_1.

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \\ v_1 &= a_1 t_1 \end{aligned}$$

Dráha rovnoměrného pohybu s_2 je rovna:

$$\begin{aligned} s_2 &= v_1 t_2, \\ s_2 &= a_1 t_1 t_2. \end{aligned}$$

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí v_1 si můžeme vypočítat dráhu s_3.

$$\begin{aligned} s_3 &= v_1 t_3 - \frac{1}{2} a_3 t_3^2 \\ s_3 &= a_1 t_1 t_3 - \frac{1}{2} a_3 t_3^2 \end{aligned}$$

Celková dráha s je tedy rovna:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + a_1 t_1 t_2 + a_1 t_1 t_3 - \frac{1}{2} a_3 t_3^2 \\ s &= a_1 t_1 (t_1 + t_2 + t_3) - \frac{1}{2} (a_1 t_1^2 + a_3 t_3^2) \end{aligned}$$

Nyní zbývá dopočítat zrychlení a_1 a a_2. Při rozjezdu kabiny působí na pozorovatele směrem dolů tíhová síla $F_G = m_0 g$ a setrvačná síla $F_{s1} = m_0 a_1$ (proti směru zrychlení a_1). Výsledná síla F_1, kterou tlačí pozorovatel na váhu, má stejnou velikost, jako tíha tělesa o hmotnosti m_1. Stejně velkou silou působí i váha na pozorovatele, který si připadá těžší. Platí:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_G + F_{s1} \\ F_1 &= m_1 g \\ F_G &= m_0 g \\ F_{s1} &= m_0 a_1 \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{m_1 - m_0}{m_0} g \end{aligned}$$

Při brzdění kabiny působí na pozorovatele směrem dolů tíhová síla $F_G = m_0 g$ a směrem nahoru setrvačná síla $F_{s3} = m_0 a_3$ (proti směru zrychlení a_3). Výsledná síla F_3, kterou tlačí pozorovatel na váhu, má stejnou velikost, jako tíha tělesa o hmotnosti m_3. Stejně velkou silou působí i váha na pozorovatele, který si připadá lehčí. Platí:

$$\begin{aligned} F_3 &= F_G - F_{s3} \\ F_3 &= m_3 g \\ F_G &= m_0 g \\ F_{s3} &= m_0 a_3 \\ \Rightarrow a_3 &= \frac{m_0 - m_3}{m_0} g \end{aligned}$$

Dosaďme hodnoty zrychlení a_1 a a_3 do vztahu pro celkovou dráhu s a dopočítejme.

$$\begin{aligned} s &= a_1 t_1 (t_1 + t_2 + t_3) - \frac{1}{2}(a_1 t_1^2 + a_3 t_3^2) \\ s &= g \left[\frac{m_1 - m_0}{m_0} t_1 (t_1 + t_2 + t_3) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 - m_0}{m_0} t_1^2 + \frac{m_0 - m_3}{m_0} t_3^2 \right) \right] \\ s &= 178.7 \text{ m} \end{aligned}$$

Poznamenejme, že parametry a_1, a_3, t_1 a t_3 nejsou nezávislé, ale jsou svázané podmínkou, konečná rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu kabiny je nulová, neboli:

$$a_1 t_1 = a_3 t_3.$$

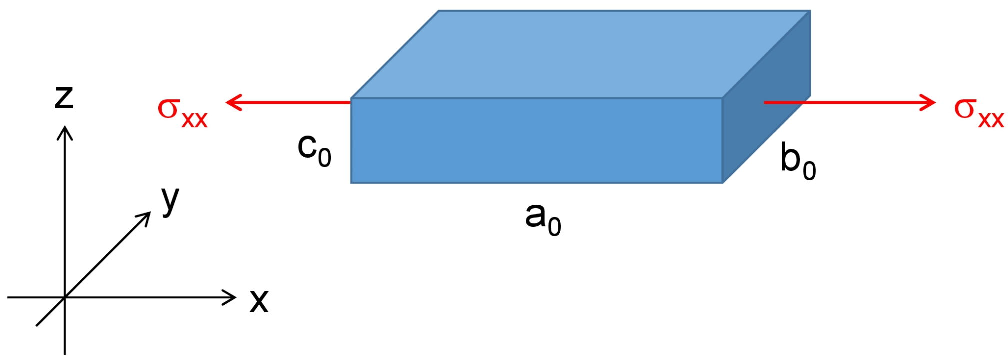
S využitím tohoto vztahu lze výsledek upravit do jiného tvaru:

$$\begin{aligned} s &= g t_1 \frac{m_1 - m_0}{m_0} \left[t_1 + t_2 + t_3 - \frac{1}{2} t_1 \frac{m_1 - m_0}{m_0 - m_3} \right], \\ s &= 178.7 \text{ m}. \end{aligned}$$

Příklad 4

Zadání: Kvádr o původních rozměrech a_0, b_0, c_0 deformujeme jednoosým tahovým napětím σ podle obrázku. Jaká musí být hodnota Poissonovy konstanty aby změna hustoty kvádru byla nulová?

Pozn.: Uvažujte pouze malé deformace, tzn. složky tenzoru deformací jsou velmi malé: $\varepsilon_{ij} << 1$ a tedy kvadratické a vyšší členy v proměnných ε_{ij} je možné zanedbat.



Řešení: Hookův zákon pro izotropní materiály má tvar:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu(\sigma_{11+\sigma_{22}+\sigma_{33}})\delta_{ij}\right],$$

kde symbol δ_{ij} se nazývá Kroneckerovo delta a reprezentuje prvky jednotkové matice. Jedinou nenulovou složku tenzoru napětí σ_{11} označme jako σ. Tenzor deformace má 3 nenulové složky ε_{11}, ε_{22} a ε_{33}:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma}{E}, \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu\sigma}{E} = -\nu\varepsilon_{11}, \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu\sigma}{E} = -\nu\varepsilon_{11}.
\end{aligned}$$

Diagonální složky tenzoru deformace vyjadřují relativní prodloužení v x-ovém resp. y-ovém resp. z-ovém směru, neboli:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{a-a_0}{a_0} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{b-b_0}{b_0} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{c-c_0}{c_0},
\end{aligned}$$

kde a_0, b_0, c_0 jsou původní rozměry kvádru, zatímco a, b c jsou rozměry kvádru po deformaci.

Spojením rovnic výše dostáváme pro nové rozměry kvádru:

$$\begin{aligned} a &= (1+\varepsilon_{11})a_0 \\ b &= (1-\nu\varepsilon_{11})b_0 \\ c &= (1-\nu\varepsilon_{11})c_0. \end{aligned}$$

Změnu objemu kvádru ΔV vyjádříme jako rozdíl nového objemu $V = abc$ a objemu původního $V_0 = a_0 b_0 c_0$. Pro nulovou změnu objemu dostáváme podmínku:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta V \\ 0 &= V - V_0 \\ 0 &= abc - a_0 b_0 c_0 \\ 0 &= a_0 b_0 c_0 \left[(1+\varepsilon_{11})(1-\nu\varepsilon_{11})^2 - 1\right] \\ 0 &= \varepsilon_{11}(1-2\nu) + \varepsilon_{11}^2(\nu^2 - 2\nu) + \nu^2\varepsilon_{11}^3 \end{aligned}$$

Nyní využijme znalosti, že Hookův zákon platí pro relativně malé deformace, $\varepsilon_{11} << 1$. Proto můžeme kvadratické a vyšší členy v proměnné ε_{11} zanedbat. Poslední rovnice se nám tedy zjednoduší na:

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_{11}(1-2\nu) \\ 0 &= 1 - 2\nu \\ \nu &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nulová změna objemu při deformaci tedy nastává pro materiály s hodnotou Poissonova čísla rovnou 0.5.