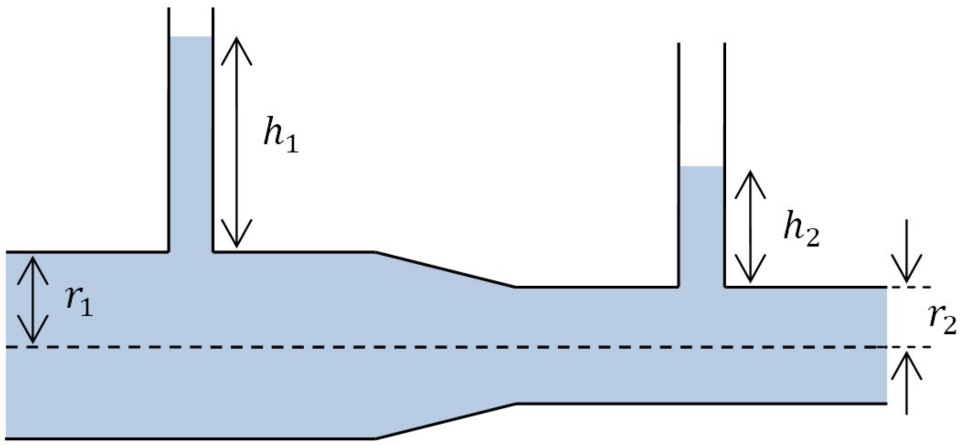
Řešení testu 2a

Fyzika I (mechanika a molekulová fyzika)
NOFY021

3. ledna 2019

Příklad 1

Zadání: Potrubí o poloměru r_1 se zužuje až na poloměr r_2. Tlak v obou částech potrubí je měřen manometrickými trubicemi. Rozdíl ve výšce hladin v trubicích je Δh.
Vyjádřete objemový průtok Q procházející trubicí.



Řešení: Objemový průtok můžeme vyjádřit například jako

$$Q = S_1 v_1. \tag{1}$$

Musíme tedy vypočítat rychlost v_1. To uděláme pomocí rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice zapsané pro proudnici procházející středem trubice mezi body ležícími pod manometrickými trubicemi.
Bernoulliho rovnice má v našem případě tvar

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2,$$

protože se oba body nacházejí ve stejné výšce nad hladinou nulové potenciální tíhové energie, a proto je člen $h\rho g$ na obou stranách rovnice stejný, a tedy se odečte. Tlaky p_1 a p_2 si můžeme vyjádřit pomocí výšek h_1 a h_2, do kterých vystoupila hladina v manometrických trubicích:

$$p_1 = h_1 \rho g, \qquad p_2 = h_2 \rho g,$$

dohromady tedy

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1 \rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2 \rho g.$$

Po použití rovnice kontinuity ve tvaru

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

dostáváme

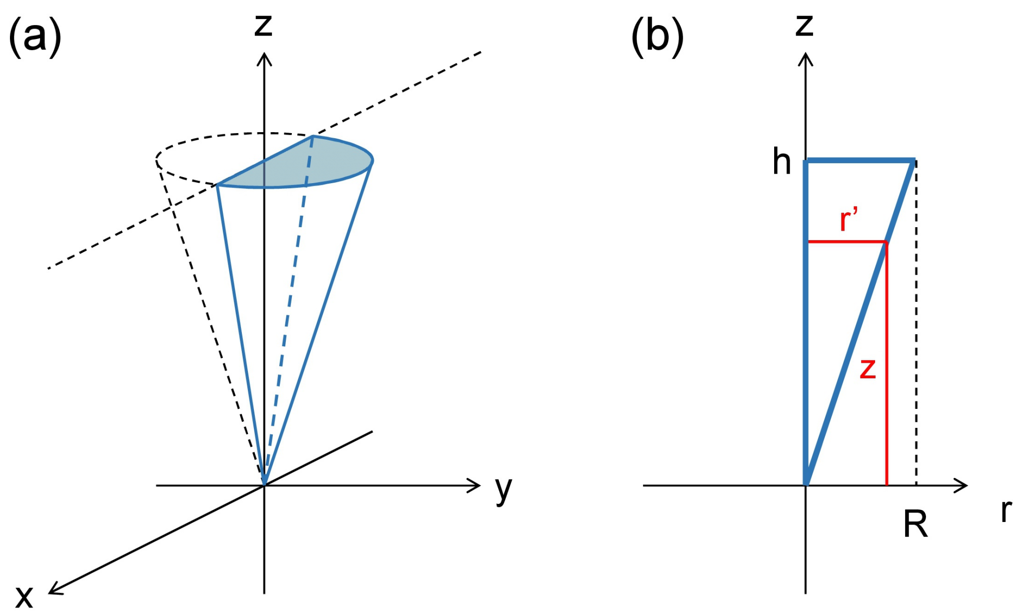
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g &= \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g \\
\frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 &= h_2\rho g - h_1\rho g \\
v_1^2 - v_2^2 = 2(h_2 - h_1)g &= -2(h_1 - h_2)g = -2\Delta h g \\
v_1^2 - \left(\frac{S_1 v_1}{S_2}\right)^2 &= -2\Delta h g \\
\left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right] v_1^2 &= -2\Delta h g \\
\frac{S_2^2 - S_1^2}{S_2^2} v_1^2 &= -2\Delta h g \\
\frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} v_1^2 &= 2\Delta h g \\
v_1 &= = S_2\sqrt{\frac{2\Delta h g}{S_1^2 - S_2^2}}.
\end{aligned}$$

Je třeba si jen uvědomit, že v zúžené části trubice bude tlak menší než v nezúžené, a proto $h_2 < h_1$, čili $\Delta h = h_1 - h_2$. Po dosazení do vztahu pro objemový průtok (1) a dosazení za obsahy průřezů potrubí $S_1 = \pi r_1^2$ a $S_2 = \pi r_2^2$ vychází

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\Delta h g}{S_1^2 - S_2^2}} = \pi^2 r_1^2 r_2^2 \sqrt{\frac{2\Delta h g}{\pi^2 r_1^4 - \pi^2 r_2^4}} = \frac{\pi^2}{\pi} r_1^2 r_2^2 \sqrt{\frac{2\Delta h g}{r_1^4 - r_2^4}} = \pi r_1^2 r_2^2 \sqrt{\frac{2\Delta h g}{r_1^4 - r_2^4}}.$$

Příklad 2

Zadání: Vypočítejte polohu hmotného středu homogenního půlkuželu o hmotnosti M, poloměru podstavy R a výšce h, viz obrázek (a).



Řešení: Polohový vektor $\vec{r}_T$ hmotného středu homogenního tělesa o objemu V je obecně dán předpisem:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,\mathrm{d}V. \tag{1}$$

Určitý integrál (1) lze nejsnadněji počítat pomocí cylindrických souřadnic r, φ, z.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ \mathrm{d}V &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Integrační meze pro proměnné r, φ, z jsou následující:

$$\begin{aligned} r &\in [0, r'], \\ \varphi &\in [0, \pi], \\ z &\in [0, h]. \end{aligned}$$

Horní mez r' pro proměnnou r závisí na výšce z, viz obrázek (b), podle lineárního vztahu:

$$\begin{aligned} z &= k \cdot r' \\ h &= k \cdot R \Rightarrow k = \frac{h}{R} \\ z &= \frac{h}{R} r' \\ r' &= \frac{R}{h} z. \end{aligned}$$

Objem půlkuželu je roven polovině objemu celého kuželu, tedy:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{6} \pi R^2 h.$$

Nyní už můžeme dosadit do rovnice (1) a vypočítat souřadnice x_T, y_T a z_T hmotného středu.

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{V} \int_V x \, \mathrm{d}V \\ x_T &= \frac{1}{\frac{1}{6}\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^\pi \int_0^{\frac{R}{h}z} r \cos\varphi r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \\ x_T &= \frac{6}{\pi R^2 h} [\sin\varphi]_0^\pi \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\ x_T &= \frac{6}{\pi R^2 h} \cdot 0 \cdot \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\ x_T &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{V} \int_V y \, \mathrm{d}V \\ y_T &= \frac{1}{\frac{1}{6}\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^\pi \int_0^{\frac{R}{h}z} r \sin\varphi r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \\ y_T &= \frac{6}{\pi R^2 h} [-\cos\varphi]_0^\pi \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\ y_T &= \frac{6}{\pi R^2 h} \cdot 2 \cdot \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \\ y_T &= \frac{12}{\pi R^2 h} \int_0^h \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{R}{h}z} \mathrm{d}z \\ y_T &= \frac{4}{\pi R^2 h} \frac{R^3}{h^3} \int_0^h z^3 \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_T &= \frac{4R}{\pi h^4}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h \\
y_T &= \frac{4R}{\pi}\frac{h^4}{4} \\
y_T &= \frac{R}{\pi}
\end{aligned}
$$

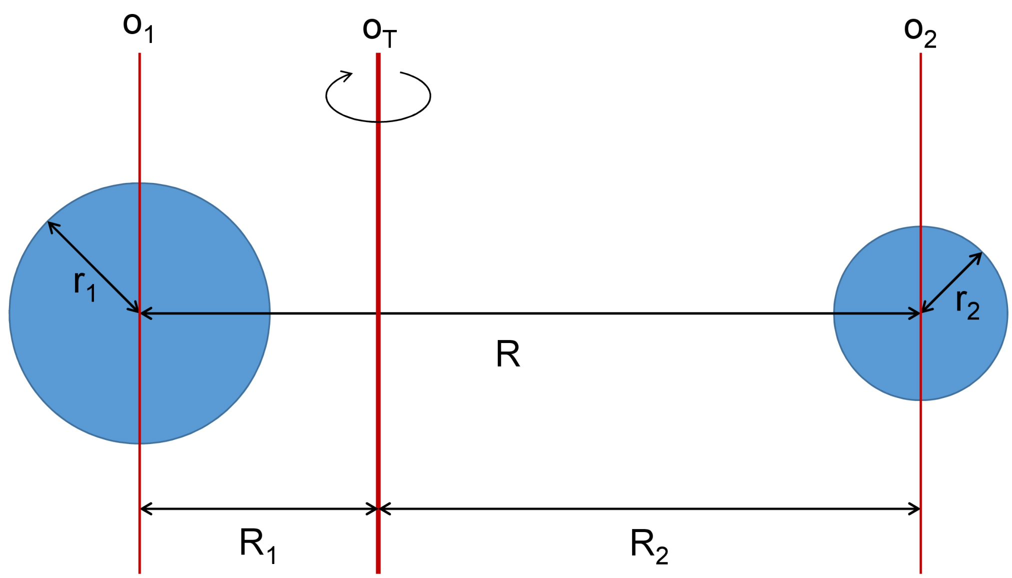
$$
\begin{aligned}
z_T &= \frac{1}{V}\int_V z \,\mathrm{d}V \\
z_T &= \frac{1}{\frac{1}{6}\pi R^2 h}\int_0^h \int_0^\pi \int_0^{\frac{R}{h}z} zr \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{6}{\pi R^2 h}\left[\varphi\right]_0^\pi \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} rz \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{6}{\pi R^2 h}\cdot \pi \cdot \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} rz \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{6}{R^2 h}\int_0^h \left[\frac{r^2}{2}z\right]_0^{\frac{R}{h}z} \mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{R^2 h}\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^3 \,\mathrm{d}z \\
z_T &= \frac{3}{h^3}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h \\
z_T &= \frac{3}{h^3}\frac{h^4}{4} \\
z_T &= \frac{3}{4}h
\end{aligned}
$$

Poloha hmotného středu homogenního půlkuželu je $\vec{r}_T = \left(0, \frac{R}{\pi}, \frac{3}{4}h\right)$.

Příklad 3

Zadání: Dvojhvězda je tvořena hvězdami o hmotnostech m_1, m_2 a poloměrech r_1, r_2. Vzdálenost středů hvězd je R. Obě hvězdy uvažujeme jako homogenní koule.
Vypočítejte moment setrvačnosti dvojhvězdy vzhledem k ose o, která prochází společným hmotným středem dvojhvězdy a je (vždy) kolmá na spojnici středů hvězd.

Pozn. 1.: Moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti M a poloměru R vzhledem k ose procházející středem koule je $\frac{2}{5}MR^2$.
Pozn. 2.: Rotaci hvězd kolem vlastní osy neuvažujte.



Řešení: Momenty setrvačnosti I_1 a I_2 první a druhé hvězdy vzhledem jejich vlastním osám o_1 a o_2, jsou rovny:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{5} m_1 r_1^2, \\ I_2 &= \frac{2}{5} m_2 r_2^2. \end{aligned}$$

S využitím Steinerovy věty můžeme určit momenty setrvačnosti I_1' a I_2' vzhledem k ose o_T procházejí hmotným středem dvojhvězdy:

$$\begin{aligned} I_1' &= I_1 + m_1 R_1^2 = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + m_1 R_1^2, \\ I_2' &= I_2 + m_2 R_2^2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 + m_2 R_2^2. \end{aligned}$$

Zbývá určit vzdálenosti R_1 a R_2 středů hvězd od hmotného středu dvojhvězdy. Zvolme si soustavu souřadnic s počátkem ve středu první hvězdy a s osou x orientovanou ve směru spojnice obou hvězd. x-ová souřadnice hmotného středu je potom rovna:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{m_1 x_{T1} + m_2 x_{T2}}{m_1 + m_2} \\ x_T &= \frac{0 m_1 + R m_2}{m_1 + m_2} \\ x_T &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} R. \end{aligned}$$

Pro vzdálenosti R_1 a R_2 poté platí:

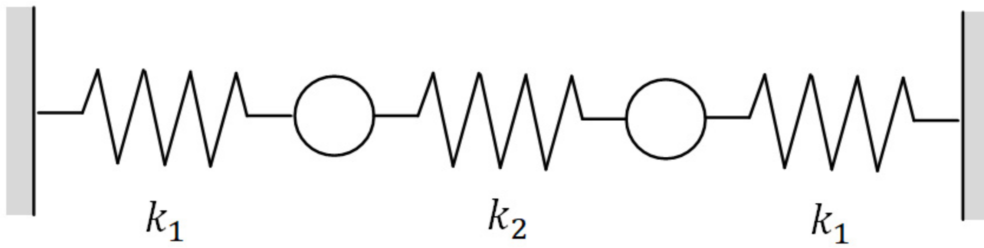
$$\begin{aligned} R_1 &= x_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R \\ R_2 &= R - x_T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R. \end{aligned}$$

Výsledný moment setrvačnosti I dvojhvězdy je roven součtu momentů setrvačnosti I'_1 a I'_2.

$$\begin{aligned} I &= I'_1 + I'_2 \\ I &= \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + m_1 R_1^2 + \frac{2}{5} m_2 r_2^2 + m_2 R_2^2 \\ I &= \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + \frac{2}{5} m_2 r_2^2 + \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \\ I &= \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + \frac{2}{5} m_2 r_2^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Příklad 4

Zadání: Mějme dvě kuličky o stejné hmotnosti m připevněné k pružinám o tuhostech k_1 a k_2 tak, jak ukazuje obrázek.
Určete vlastní frekvence kmitů této soustavy.



Řešení: Pokud označíme polohu první kuličky x_1 a polohu druhé kuličky x_2, můžeme sestavit pohybové rovnice pro kuličky ve tvaru

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} &= -k_1x_2 - k_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Tuto soustavu dvou diferenciálních rovnic můžeme řešit více způsoby, zde uvádíme dva:
Metoda 1:
Do diferenciálních rovnic dosadíme ansatz v následujícím tvaru:

$$x_1 = X_1\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad x_2 = X_2\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Poté bude zřejmě platit

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2X_1\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2X_2\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Po dosazení do původních diferenciální rovnic, zkrácení nenulového členu $\mathrm{e}^{i\omega t}$ a úpravě vychází soustava obyčejných rovnic s proměnnými X_1 a X_2 ve tvaru

$$\begin{aligned} \omega^2X_1 - \frac{k_1}{m}X_1 - \frac{k_2}{m}(X_1 - X_2) &= 0 \\ \omega^2X_2 - \frac{k_1}{m}X_2 - \frac{k_2}{m}(X_2 - X_1) &= 0. \end{aligned}$$

Po přepisu do maticové podoby můžeme psát

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m} & \frac{k_2}{m} \\ \frac{k_2}{m} & \omega^2 - \frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soustava má řešení, pokud

$$\det \begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m} & \frac{k_2}{m} \\ \frac{k_2}{m} & \omega^2 - \frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m} \end{pmatrix} = \left(\omega^2 - \frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m}\right)^2 - \left(\frac{k_2}{m}\right)^2 = 0,$$

čili

$$\omega^2 - \frac{k_1}{m} - \frac{k_2}{m} = \pm\frac{k_2}{m}.$$

Odsud vyjádříme již hledané frekvence:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k_1}{m} + \frac{2k_2}{m}}. \end{aligned}$$

Metoda 2:
Druhou možností je pohybové rovnice od sebe nejprve sečíst a poté je odečíst:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2(x_1 + x_2)}{\mathrm{d}t^2} &= -k_1(x_1 + x_2) \\ m\frac{\mathrm{d}^2(x_1 - x_2)}{\mathrm{d}t^2} &= (-k_1 - 2k_2)(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Pokud si nyní zavedeme nové proměnné $q_1 = x_1 + x_2$ a $q_2 = x_1 - x_2$, získáváme

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2} &= -k_1 q_1 \\ m\frac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2} &= (-k_1 - 2k_2)q_2, \end{aligned}$$

což jsou známé diferenciální rovnice pro harmonické kmity s frekvencemi

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k_1}{m} + \frac{2k_2}{m}}. \end{aligned}$$