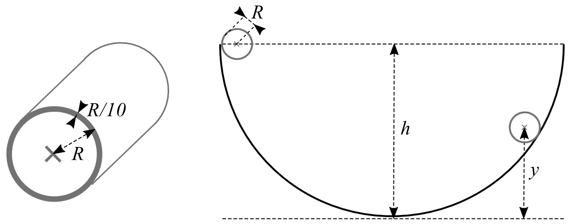
Fyzika 1: test 2

8. 1. 2024, 14:00, T6

1. Dutý válec o vnějším poloměru R, vnitřním poloměru $\frac{9}{10}R$ a hmotnosti m jsme vypustili z vrcholu U-rampy o výšce h (viz obrázek). Válec se valil bez prokluzu. Určete rychlost, kterou se válec pohyboval jako funkci výšky, ve které se nacházel. Zanedbejte tření, ale uvažujte rotaci válce.



Řešení: Využijeme zákona zachování energie. Na začátku i v bodě obratu má válec nenulovou pouze potenciální energii $E_\mathrm{p} = mgh$. Jeho kinetická energie z translačního a rotačního pohybu je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2}, \tag{1}$$

kde jsme využili, že pro valení bez prokluzu platí $v = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$. Moment setrvačnosti je

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}V = \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{R_0}^R \rho r^3 \mathrm{d}r = 2\pi L\rho \frac{R^4 - R_0^4}{4}, \tag{2}$$

kde jsme označili vnitřní poloměr jako R_0, výšku válce L a vyjádřili jsme element hmotnosti pomocí hustoty a elementu objemu v cylindrických souřadnicích $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi$. Zadána byla hmotnost, ne hustota, takže spočítáme

$$V = \int \mathrm{d}V = \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{R_0}^R r\mathrm{d}r = 2\pi L \frac{R^2 - R_0^2}{2}, \tag{3}$$

a dosazením za $\rho = \frac{m}{V}$ získáme

$$I = \frac{m}{2}\frac{R^4 - R_0^4}{R^2 - R_0^2} = m\frac{R^2 + R_0^2}{2} = \frac{mR^2}{2}\left(1 + \frac{9^2}{10^2}\right) = 0.905\, mR^2. \tag{4}$$

Ze zachování energie obdržíme

$$mgh = mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{0.905}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} = mgy + \frac{1.905}{2}mv^2. \tag{5}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g(h-y)}{1.905}} = \sqrt{\frac{g(h-y)}{0.9525}}. \tag{6}$$

2. Harmonický oscilátor skládající se z železné kuličky o poloměru $r = 1$ cm zavěšené na pružině má ve vzduchu, jehož odpor můžeme zanedbat, vlastní frekvenci $f_0 = 0.5$ Hz. Jak se bude oscilátor chovat ve vodě (vizkozita $\eta = 0.001$), olivovém oleji ($\eta = 0.1$) a v glycerolu ($\eta = 1.5$)? Bude-li pohyb periodický, určete frekvenci kmitů a za kolik cyklů klesne amplituda na polovinu. Projeví se na chování oscilátoru nějak vztlaková síla?

Vzhledem k pomalému pohybu uvažujte laminární proudění kolem kuličky. Zanedbejte vliv kapaliny na pružinu. Hustota železa je $\rho_{\mathrm{Fe}} = 7870\ \mathrm{kg/m^3}$.

Řešení: Na kuličku o poloměru r pohybující se rychlostí v ve viskózní kapalině, která proudí laminárně, působí odporová síla podle Stokesova zákona,

$$F_{\mathrm{t}} = 6\pi\eta r v. \tag{7}$$

Kromě toho na ni působí síla pružiny směrem k rovnovážné poloze $F_{\mathrm{p}} = -ky$ a též vztlaková síla $F_{\mathrm{v}} = V g \rho_{\mathrm{kap.}}$. Pohybová rovnice kuličky je tedy

$$m\ddot{y} = F = -ky - 2\delta m\dot{y} + V g \rho_{\mathrm{kap.}}, \tag{8}$$

kde jsme označili $6\pi\eta r = 2\delta m$ podle zvyklosti. Rovnovážná poloha oscilátoru ($F = 0$, $\dot{y} = 0$) se vlivem vztlaku posunula do $y_0 = \frac{V g \rho_{\mathrm{kap.}}}{k}$. Posuneme-li tam počátek vztažné soustavy (přejdeme k $x = y - y_0$), vztlakový člen zmizí z pohybových rovnic,

$$m\ddot{x} = -kx - 2\delta m\dot{x}, \tag{9}$$

$$0 = \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{k}{m}x. \tag{10}$$

To je rovnice tlumeného harmonického oscilátoru, jejím řešením jsou funkce typu

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}. \tag{11}$$

Jak se můžeme přesvědčit dosazením této funkce do rovnice (10), je

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad \text{kde} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{12}$$

Pro případ bez tlumení je ω_0 úhlovou frekvencí kmitů. Spočítáme ji ze zadané frekvence jako $\omega_0 = 2\pi f_0 = \pi$. Hmotnost kuličky je $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \approx 33$ g.

Pro vodu je $\delta = \frac{3\pi\eta r}{m} = 0.003 \ll \omega_0$. Exponent α má tedy imaginární část a jde o pohyb s periodou $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$. Kmity jsou tlumené faktorem $e^{-\delta t}$. Amplituda klesne na polovinu, když

$$\frac{1}{2} = e^{-\delta t_{\frac{1}{2}}}, \tag{13}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\delta} \approx 240\ \mathrm{s} = 120\ T. \tag{14}$$

Pro olivový olej je $\delta = 0.29 < \omega_0$. Jde o kmity s úhlovou frekvencí $\omega = 3.13$, stále velmi blízkou ω_0. Amplituda klesne na polovinu za $t_{\frac{1}{2}} \approx 2.4\ \mathrm{s} = 1.2\ T$.

Pro glycerol je $\delta = 4.23 > \omega_0$, tedy α je čistě reálné číslo a pohyb není periodický, ale jde o exponenciální přibližování k rovnovážné poloze.

3. Železné závaží o hmotnosti $m_\mathrm{z} = 1$ kg je zavěšené na balónku naplněným vzduchem za normálního atmosferického tlaku, který má objem $V_{\mathrm{b}0} = 1$ l. Tuto sestavu ponoříme do jezera. Nalezněte hloubku h, kde se tíha a vztlak vyrovnají. Jedná se o stabilní rovnováhu?

Uvažujte teplotu vzduchu i vody 10°C, zanedbejte změnu teploty vody s hloubkou. Vzduch v balónku považujte za ideální plyn. Uvažujte hustotu železa $\rho_\mathrm{z} = 7870$ kg/m^3 a molární hmotnost vzduchu $M = 28.96$ g/mol.

Řešení: Síly působící na sestavu jsou gravitační a vztlaková,

$$F(h) = -(m_\mathrm{z} + m_\mathrm{b})g + [V_\mathrm{z} + V_\mathrm{b}(h)]\rho g, \tag{15}$$

kde jsme označili ρ hustotu vody. Objem závaží je $V_\mathrm{z} = \frac{m_\mathrm{z}}{\rho_\mathrm{z}}$.

Pro ideálního plyn platí stavová rovnice

$$pV = nRT, \tag{16}$$

kde p je tlak, V objem, n molární množství, R molární plynová konstanta a T termodynamická teplota. Za teploty 10°C = 283.15 K a normálního tlaku $p = 101.325$ kPa bude hmotnost plynu

$$m_\mathrm{b} = nM = \frac{p_0 V_{\mathrm{b}0}}{RT} M = \frac{101.325 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{8.31446 \cdot 283.14} \cdot 28.96 \text{ g} \approx 1.2 \text{ g}. \tag{17}$$

Tato hmotnost je mnohem menší oproti m_z a tíhu balonku bychom tak mohli i zanedbat.

V hloubce h na balónek působí kromě atmosferického i hydrostatický tlak $p(h) = h\rho g$, objem balónku bude

$$V_\mathrm{b}(h) = \frac{nRT}{p_0 + h\rho g} = \frac{p_0 V_{\mathrm{b}0}}{p_0 + h\rho g} \tag{18}$$

Má-li být výsledná síla působící na sestavu nulová, platí

$$m_\mathrm{z} + m_\mathrm{b} = m_\mathrm{z}\frac{\rho}{\rho_\mathrm{z}} + \frac{p_0 V_{\mathrm{b}0}}{p_0 + h\rho g}\rho, \tag{19}$$

$$\frac{p_0 V_{\mathrm{b}0}}{p_0 + h\rho g}\rho = m_\mathrm{z}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_\mathrm{z}}\right) + m_\mathrm{b}, \tag{20}$$

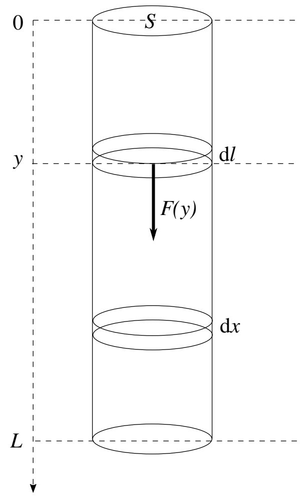
$$p_0 + h\rho g = \frac{p_0 \rho V_{\mathrm{b}0}}{m_\mathrm{z}\big(1 - \frac{\rho}{\rho_\mathrm{z}}\big) + m_\mathrm{b}}, \tag{21}$$

$$h = \frac{p_0}{g}\left[\frac{V_{\mathrm{b}0}}{m_\mathrm{z}\big(1 - \frac{\rho}{\rho_\mathrm{z}}\big) + m_\mathrm{b}} - \frac{1}{\rho}\right] \approx 1.49 \text{ m}. \tag{22}$$

Vidíme, že tíhová síla na soustavu je konstantní, zatímco vztlaková síla klesá s hloubkou h. Při malém vychýlení směrem vzhůru (zmenšení h) se balonek zvětší a vztlak roste. Naopak při vychýlení dolů se balonek zmenší a vztlak klesá. Rovnováha je tedy labilní, při malé výchylce sestava začne stoupat nebo klesat a nevrátí se do rovnováhy.

4. Odvoďte, o kolik se vlivem pružné deformace vlastní vahou prodlouží drát volně visící za jeden konec o délce $L = 10$ m. Jak se změní jeho tvar? Vyjádřete jeho poloměr r jako funkci vzdálenosti od závěsu y. Prodlouží se víc drát z mědi (hustota $\rho = 8.96$ g/cm^3, Youngův modul $E = 120$ GPa, Poissonův poměr $\eta = 0.35$) nebo z hliníku ($\rho = 2.7$ g/cm^3, $E = 70$ GPa, $\eta = 0.34$)?

Řešení: Gravitační síla od elementu drátu délky dx je d$F = S\rho g$dx, kde S je průřez drátu. Ve vzdálenosti y od závěsu působí síla od všech elementů nacházejících se níže,



$$F(y) = \int_y^L S\rho g \mathrm{d}x = S\rho g(L - y). \tag{23}$$

Podle Hookova zákona bude relativní prodloužení v tomto místě úměrné napětí $\sigma(y)$,

$$\epsilon(y) = \frac{\sigma(y)}{E} = \frac{F(y)}{SE} = \frac{\rho g(L-y)}{E}. \tag{24}$$

Každý element drátu se prodlouží jako

$$\Delta l(y) = \mathrm{d}l' - \mathrm{d}l = \epsilon(y)\mathrm{d}l \tag{25}$$

a celkové prodloužení bude součet příspěvků od všech elementů,

$$\Delta L = L' - L = \int_0^L \epsilon(y)\mathrm{d}y = \frac{\rho g}{E}\int_0^L (L-y)\mathrm{d}y = \frac{\rho g}{E}\left[Ly - \frac{y^2}{2}\right]_0^L = \frac{\rho g L^2}{2E}. \tag{26}$$

Element drátu úměrně svému prodloužení zmenší svůj poloměr podle Poissonova poměru,

$$\Delta r(y) = -\nu\epsilon(y) r = -\frac{\nu\rho g r(L-y)}{E}. \tag{27}$$

Poloměr na konci drátu se tedy nezmění a směrem k závěsu bude klesat lineárně. U závěsu bude $\Delta r_{\max} = r\frac{\nu\rho g L}{E}$.

Pro měď vychází $\Delta L = 0.37 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2$ m $= 37$ μm a $\Delta\frac{r_{\max}}{r} = 2.6 \cdot 10^{-6}$. Prodloužení je přímo úměrné $\frac{\rho}{E}$, což je skoro dvakrát více pro měď než pro hliník. Pro něj vychází $\Delta L = 19$ μm.