Řešení testu 1b

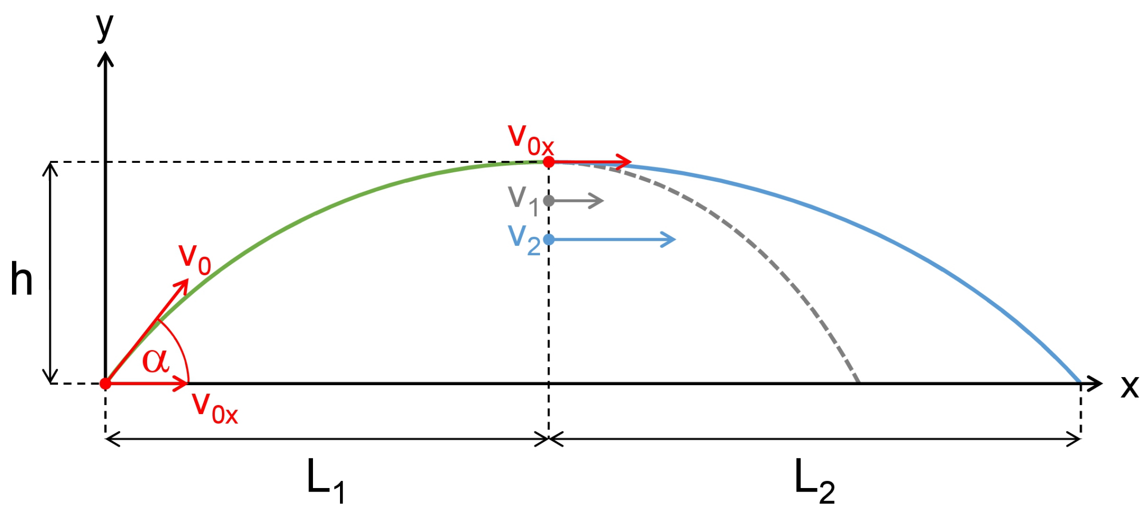
Fyzika I (mechanika a molekulová fyzika)
NOFY021

22. listopadu 2018

Příklad 1

Zadání: Projektil o hmotnosti m byl vystřelen ze země rychlostí 800 m s^{-1} pod úhlem 40°. V nejvyšším bodě trajektorie se rozpadl na dva kusy, jejichž hmotnosti jsou v poměru 2 : 3. Rychlost těžšího kusu po rozpadu je 400 m s^{-1}.
(a) Jaká je rychlost lehčího kusu těsně po rozpadu?
(b) Do jaké vzdálenosti od místa rozpadu dopadne lehčí kus?

Pozn.: Počítejte s konstantním tíhovým zrychlením $g = 9.81$ m s^{-2}. Odpor vzduchu zanedbáváme.



Řešení: (a) Pro závislost x-ové souřadnice na čase při šikmém vrhu platí vztah:

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

první derivací podle času pak získáme závislost x-ové složky rychlosti na čase:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = v_{0x} = v_0 \cos\alpha.$$

To znamená, že projektil o hmotnosti m má před rozpadem rychlost

$$v = v_0 \cos\alpha.$$

Nyní si zapíšeme zákon zachování hybnosti pro projektil před rozpadem a pro oba dva odletující kusy:

$$mv = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Po vyjádření v_2 a dosazení za v vychází:

$$v_2 = \frac{m v_0 \cos\alpha - m_1 v_1}{m_2}.$$

Nyní k úpravě využijeme rovnosti $m = m_1 + m_2$, čímž se již dostaneme k výslednému vyjádření pro rychlost v_2:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{(m_1 + m_2)v_0 \cos\alpha - m_1 v_1}{m_2} \\ v_2 &= \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_0 \cos\alpha - \frac{m_1}{m_2} v_1 \\ v_2 &= 932 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

(b) Výšku, do které projektil původně vystoupal, určíme jednoduše například pomocí zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 + mgh,$$

čili

$$\begin{aligned} h &= \frac{(v_0^2 - v_{0x}^2)}{2g} \\ h &= \frac{v_0^2(1 - \cos^2\alpha)}{2g} \\ h &= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \end{aligned}$$

Dále budeme postupovat s výpočtem vzdálenosti dopadu lehčího projektilu od místa rozpadu L. Pokud si napíšeme obecný vztah pro y-ovou polohu hmotného bodu při vrhu

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{2}$$

vidíme, že po dosazení $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$ a $y = 0$ můžeme získat dobu dopadu t_d:

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{3}$$

Vzdálenost dopadu můžeme určit na základě úvahy, že se lehčí kus projektilu bude při vrhu ve vodorovném směru pohybovat pouze rovnoměrným přímočarým pohybem s původní rychlostí v_2:

$$L = v_2 t_d = \left[\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_0 \cos\alpha - \frac{m_1}{m_2} v_1\right] \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

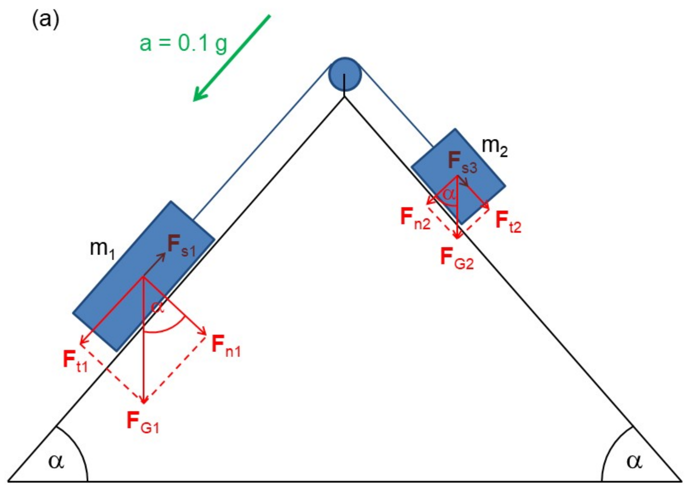
Dohromady tedy

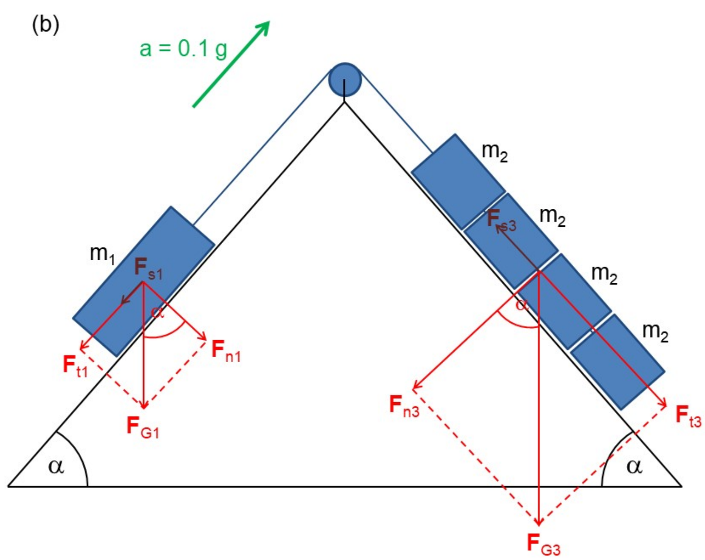
$$\begin{aligned} L &= \left[\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_0 \cos\alpha - \frac{m_1}{m_2} v_1\right] \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \\ L &= 48\,859 \text{ m}. \end{aligned}$$

Příklad 2

Zadání: Na klín se shodným sklonem obou rovin $\alpha = 35°$ umístíme přes kladku závaží m_1 o neznámé hmotnosti a vyvažujeme ho závažíčky m_2 o hmotnosti 150 g, viz obrázek.
(a) Pokud vyvážíme závaží m_1 jedním závažíčkem m_2, bude se pohybovat se zrychlením 0.1 g dolů.
(b) Pokud vyvážíme závaží m_1 čtyřmi závažíčky m_2, bude se pohybovat se zrychlením 0.1 g nahoru.
Vypočítejte hmotnost závaží m_1 a velikost koeficientu smykového tření f mezi závažími a klínem.

Pozn.: Hmotnost kladky a tření vlákna v kladce zanedbejte.





Řešení: V případě (a) rozložíme tíhové síly F_{G1} a F_{G2} působící na závaží m_1 a m_2 na tečné složky F_{t1} a F_{t2} a normálové složky F_{n1} a F_{n2} podle obrázku (a).

$$\begin{aligned}
F_{t1} &= F_{G1}\sin\alpha = m_1 g\sin\alpha \\
F_{n1} &= F_{G1}\cos\alpha = m_1 g\cos\alpha \\
F_{t2} &= F_{G2}\sin\alpha = m_2 g\sin\alpha \\
F_{n2} &= F_{G2}\cos\alpha = m_2 g\sin\alpha
\end{aligned}$$

Na závaží m_1 a m_2 dále působí smykové tření dané silami F_{s1} a F_{s2}, které působí proti směru pohybu závaží.

$$\begin{aligned}
F_{s1} &= f\cdot F_{n1} = fm_1 g\cos\alpha \\
F_{s2} &= f\cdot F_{n2} = fm_2 g\cos\alpha
\end{aligned}$$

Obě závaží se společně pohybují se zrychlením $a = 0.1g$ směrem doleva. Můžeme tedy zapsat 2. Newtonův zákon.

$$\begin{aligned}
Ma &= F \\
(m_1+m_2)a &= F_{t1} - F_{t2} - F_{s1} - F_{s2} \\
0.1(m_1+m_2)g &= m_1 g\sin\alpha - m_2 g\sin\alpha - fm_1 g\cos\alpha - fm_2 g\cos\alpha \\
0.1m_1 + 0.1m_2 &= m_1\sin\alpha - m_2\sin\alpha - fm_1\cos\alpha - fm_2\cos\alpha
\end{aligned}$$

V případě (b) postupujeme stejným způsobem jako v případě (a). Tečná, normálová a třecí síla působící na závaží m_1 zůstávají stejné. Tíhovou sílu F_{G3} působící na závaží $4m_2$ rozložíme na tečnou složku F_{t3} a normálovou složku F_{n3} podle obrázku (b).

$$\begin{aligned}
F_{t3} &= F_{G3}\sin\alpha = 4m_2 g\sin\alpha \\
F_{n3} &= F_{G3}\cos\alpha = 4m_2 g\sin\alpha
\end{aligned}$$

Na závaží $4m_2$ dále působí smykové tření dané silou F_{s3}, které působí proti směru pohybu závaží.

$$F_{s3} = f\cdot F_{n3} = 4fm_2 g\cos\alpha$$

Všechna závaží se společně pohybují se zrychlením $a = 0.1g$ směrem doprava. Můžeme tedy zapsat 2. Newtonův zákon.

$$\begin{aligned}
Ma &= F \\
(m_1+4m_2)a &= F_{t3} - F_{t1} - F_{s1} - F_{s3} \\
0.1(m_1+4m_2)g &= 4m_2 g\sin\alpha - m_1 g\sin\alpha - fm_1 g\cos\alpha - 4fm_2 g\cos\alpha \\
0.1m_1 + 0.4m_2 &= 4m_2\sin\alpha - m_1\sin\alpha - fm_1\cos\alpha - 4fm_2\cos\alpha
\end{aligned}$$

Řešíme tedy nelineární soustavu rovnic o neznámých m_1 a f.

$$\begin{aligned}
0.1m_1 + 0.1m_2 &= m_1\sin\alpha - m_2\sin\alpha - fm_1\cos\alpha - fm_2\cos\alpha \\
0.1m_1 + 0.4m_2 &= 4m_2\sin\alpha - m_1\sin\alpha - fm_1\cos\alpha - 4fm_2\cos\alpha
\end{aligned}$$

Z první rovnice si můžeme vyjádřit člen $-f\cos\alpha$ a dosadit ho do druhé rovnice.

$$\begin{aligned}
-f\cos\alpha &= \frac{0.1(m_1+m_2)-(m_1-m_2)\sin\alpha}{m_1+m_2} \\
0.1m_1+0.4m_2 &= (4m_2-m_1)\sin\alpha-(m_1+4m_2)f\cos\alpha \\
0.1(m_1+4m_2) &= (4m_2-m_1)\sin\alpha+(m_1+4m_2)\frac{0.1(m_1+m_2)-(m_1-m_2)\sin\alpha}{m_1+m_2} \\
0.1(m_1+4m_2)(m_1+m_2) &= (4m_2-m_1)(m_1+m_2)\sin\alpha+0.1(m_1+4m_2)(m_1+m_2) \\
&- (m_1+4m_2)(m_1-m_2)\sin\alpha
\end{aligned}$$

Poslední rovnice jde dále zjednodušit a můžeme dopočítat hodnotu m_1.

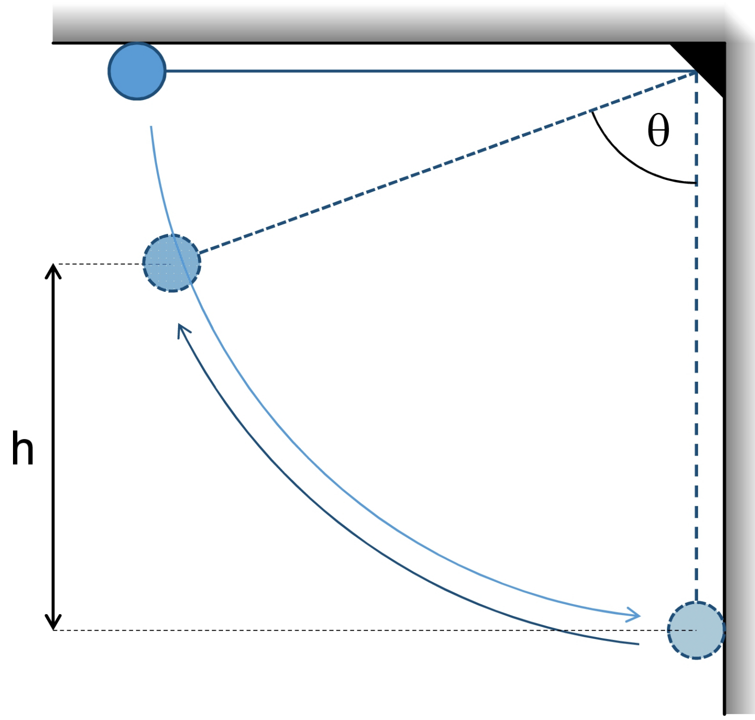
$$\begin{aligned}
(m_1-4m_2)(m_1+m_2)\sin\alpha &= -(m_1+4m_2)(m_1-m_2)\sin\alpha \\
m_1^2-4m_1m_2+m_1m_2-4m_2^2 &= -m_1^2-4m_1m_2+m_1m_2+4m_2^2 \\
2m_1^2 &= 8m_2^2 \\
m_1 &= 2m_2 \\
m_1 &= 300\ \mathrm{g}
\end{aligned}$$

Dosadíme-li výsledek $m_1 = 2m_2$ zpět do výrazu $-f\cos\alpha$, můžeme dopočítat koeficient smykového tření f.

$$\begin{aligned}
-f\cos\alpha &= \frac{0.1(m_1+m_2)-(m_1-m_2)\sin\alpha}{m_1+m_2} \\
-f\cos\alpha &= \frac{0.3m_2-m_2\sin\alpha}{3m_2} \\
f &= \frac{\sin\alpha-0.3}{3\cos\alpha} \\
f &= 0.111
\end{aligned}$$

Příklad 3

Zadání: Jednoduché matematické kyvadlo tvořené kuličkou upevněnou na vlákně o délce L je zavěšeno u zdi. Kyvadlo vychýlíme do vodorovné polohy a pustíme. Při každém úderu o stěnu potom platí, že rychlost kuličky po odrazu od stěny se zmenší faktorem $\frac{3}{\sqrt{10}}$.
Kolikrát musí kulička odskočit od stěny, aby byla maximální výchylka kuličky od stěny menší než 60°?



Řešení: Nejprve si ze zákona zachování energie vyjádříme rychlost kuličky před prvním dopadem:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gL}.$$

Ze zadání plyne, že pro rychlost kuličky po n-tém odskoku bude:

$$v_n = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n v_0 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n \sqrt{2gL}.$$

Po zhoupnutí se do nejvyššího bodu se kinetická energie $\frac{1}{2}mv_n^2$ zcela přemění v energii potenciální. Ve chvíli, kdy bude amplituda rozkyvu 60°, můžeme tedy zapsat zákon zachování energie v následujícím tvaru a vyjádřit z něho v_n^2:

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = mg\left(L - L\cos 60^\circ\right) = \frac{1}{2}mgL \Rightarrow v_n^2 = gL.$$

Po zkombinování obou předchozích vztahů získáme:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{2n} 2gL = gL,$$

odkud úpravou získáme:

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

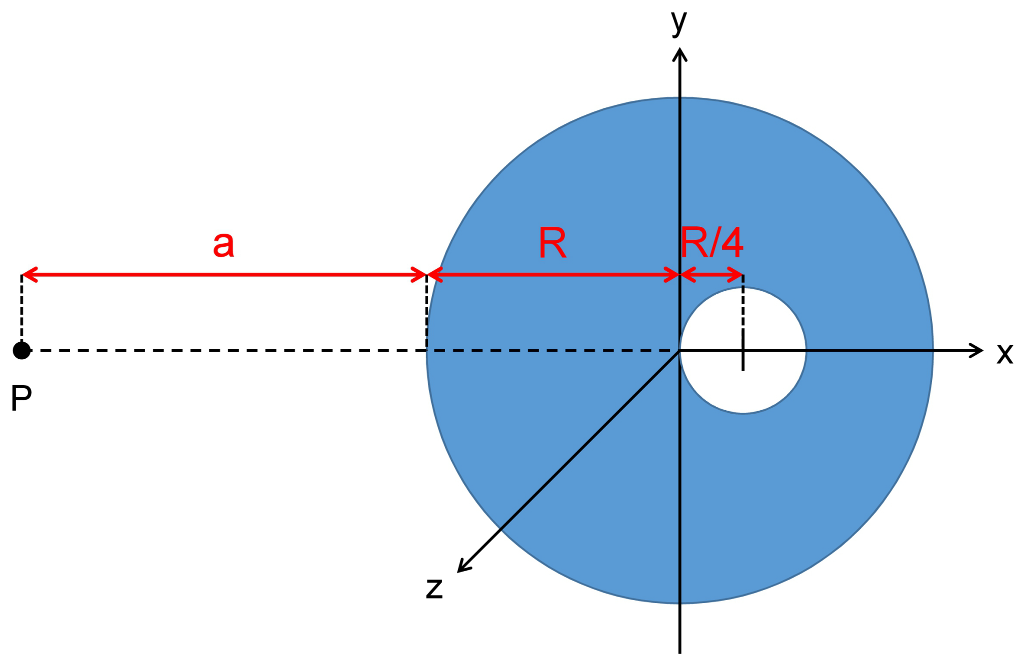
Odsud plyne

$$n = \frac{\log 2}{\log 10 - \log 9} \approx 6,6.$$

Čili nejmenší počet potřebných odskoků je $n_0 = 7$.

Příklad 4

Zadání: Uvnitř koule o poloměru R a hustotě ϱ je kulová dutina o poloměru $R/4$ ve vzdálenosti $R/4$ od středu koule, viz obrázek, který je řezem v rovině procházející středy obou koulí.
Jaká je velikost gravitačního zrychlení v bodě P (vzdálenost a od povrchu koule), když pro stejnou kouli, ale bez dutiny je v bodě P velikost gravitačního zrychlení g?



Řešení: Gravitační pole (intenzita a potenciál) homogenní plné koule o hmotnosti M vně této koule má stejný tvar jako gravitační pole hmotného bodu o stejné hmotnosti M umístěného do jejího středu. Hodnota x-ové složky intenzity gravitačního pole velké koule bez dutiny v bodě P je tedy:

$$K_x^{(1)}(P) = \frac{\kappa M}{(a+R)^2} = g.$$

Pro malou kouli na místě a o velikosti dutiny má x-ová složka intenzity gravitačního pole v bodě P velikost:

$$K_x^{(2)}(P) = \frac{\kappa m}{\left(a+R+\frac{R}{4}\right)^2}.$$

Poznamenejme, že z důvodu symetrie je y-ová i z-ová složka obou intenzit gravitačního pole nulová.

Mezi hmotnostmi m malé koule a M velké koule platí vztah:

$$m = \varrho V_2 = \frac{M}{V_1} V_2 = M \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{64}$$

Výsledná hledaná hodnota x-ové složky intenzity gravitačního pole v bodě P pro zadanou kouli s dutinou je rovna rozdílu intenzit $K_x^{(1)}(P)$ a $K_x^{(2)}(P)$.

$$\begin{aligned}
K_x(P) &= K_x^{(1)}(P) - K_x^{(2)}(P) = \frac{GM}{(a+R)^2} - \frac{Gm}{\left(a+\frac{5}{4}R\right)^2} \\
K_x(P) &= \frac{GM}{(a+R)^2}\left(1 - \frac{(a+R)^2}{64\left(a+\frac{5}{4}R\right)^2}\right) \\
K_x(P) &= g\left[1 - \left(\frac{a+R}{8a+10R}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Dodejme, že pro případ gravitačního pole je gravitační zrychlení $\vec{a}_g$ rovno přímo vektoru intenzity gravitačního pole $\vec{K}$. Oba vektory směřují do počátku soustavy souřadnic, tedy i do středů velké a malé koule.

$$a_{gx}(P) = K_x(P) = g\left[1 - \left(\frac{a+R}{8a+10R}\right)^2\right]$$