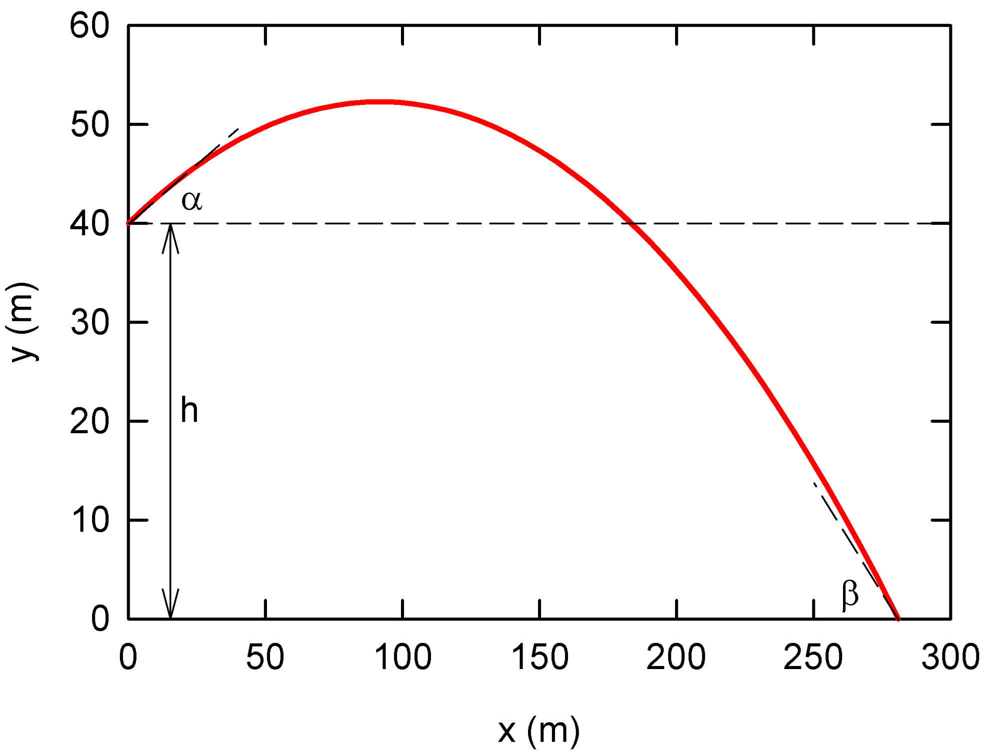
Test 1a

1. Lučištník vystřelil z hradby vysoké 40 m šíp o hmotnosti 50 g rychlostí 60 m s^{-1} pod úhlem 15° vzhůru vzhledem k vodorovnému směru.
(a) V jaké vzdálenosti od hradeb se šíp zabodl do země?
(b) Jaký úhel bude zabodnutý šíp svírat se zemí?
(c) Jaký je poměr práce vykonané tětivou luku a práce vykonané tíhovou silou?

Pozn.: Počítejte s konstantním tíhovým zrychlením $g = 9.81$ m s^{-2}. Odpor vzduchu zanedbáváme.

řešení:



Na šíp po vystřelení působí tíhová síla, která mu uděluje zrychlení $-g$ ve svislém směru. Pohybovou rovnici pro šíp (který reprezentujeme hmotným bodem) můžeme tedy napsat takto

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} x(t=0) &= 0 \\ y(t=0) &= h = 40\,\mathrm{m} \\ v_x(t=0) &= v_0 \cos\alpha = 60\cos(15^\circ) = 57.96\,\mathrm{ms}^{-1} \\ v_y(t=0) &= v_0 \sin\alpha = 60\sin(15^\circ) = 15.53\,\mathrm{ms}^{-1} \end{aligned}$$

Vyřešením pohybových rovnic s těmito počátečními podmínkami dostáváme trajektorii šípu

$$x = v_0 t\cos\alpha \qquad (1)$$
$$y = h + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

(a) Z první rovnice můžeme vyjádřit čas $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$. Když označíme souřadnice bodu kde šíp dopadnul na zem jako $[x_f, y_f]$, tak $y_f = 0$. Takže když položíme v druhé rovnici $y = 0$ a dosadíme tam čas vyjádřený z první rovnice, dostáváme rovnici pro x-ovou souřadnici bodu dopadu šípu

$$0 = h + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x_f - \frac{1}{2gv_0^2\cos^2\alpha}x_f^2.$$

Je to kvadratická rovnice, jejíž kořeny jsou $x_{f_1} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right)$, $x_{f_2} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\left(1-\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right)$. Kořen x_{f_2} je záporný (odpovídá tedy zápornému času) a můžeme ho proto ignorovat. Šíp tedy dopadne na zem ve vzdálenosti

$$x_{f_1} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right) = 281\,\mathrm{m}$$

(b)Složky rychlosti vypočítáme derivací rovnic (1,2) a jsou

$$v_x = v_0\cos\alpha$$
$$v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Úhel β, pod kterým se šíp zabodne do změ je určen složkami rychlosti v čase dopadu $t_f = \frac{x_f}{v_0\cos\alpha}$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_y(t_f)}{v_x(t_f)} = \frac{v_0\sin\alpha - gt_f}{v_0\cos\alpha}$$

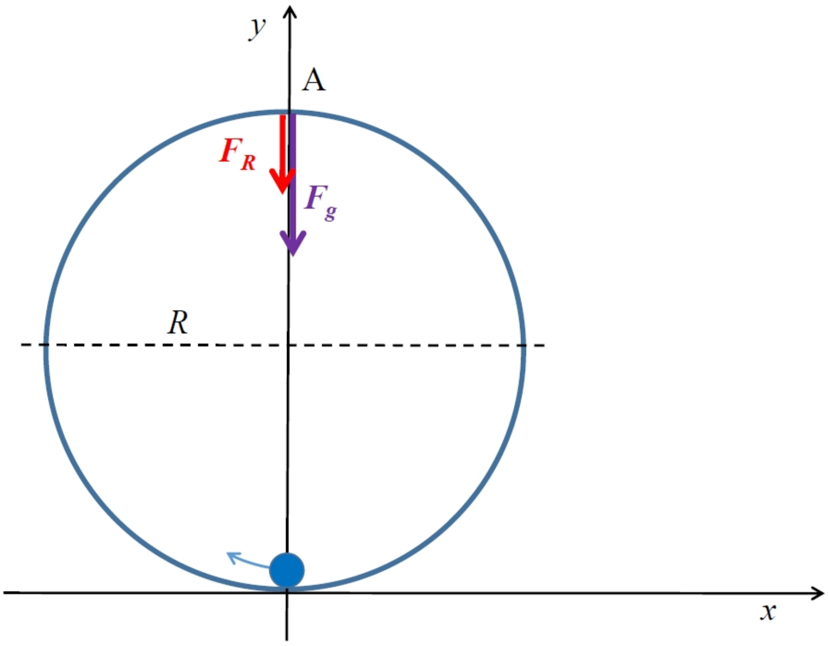
Pokud dosadíme čas dopadu šípu $t_f = \frac{x_f}{v_0\cos\alpha}$, kde $x_f = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right)$ máme z předchozího úkolu, tak dostáváme

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $\beta = 28.9°$.
(c) Práce, kterou vykoná tíhové pole, je rovna poklesu potenciální energie šípu od vystřelení do dopadu, tj. $W_2 = mgh$. Tětiva luku vykoná práci W_1, která udělí šípu potenciální energii $\frac{1}{2}mv_0^2$. Takže podíl těchto prací je

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{v_0^2}{2gh} = 4.6$$

2. Na dno kulové dutiny o poloměru R položíme kuličku o hmotnosti m a cvrnknutím jí udělíme rychlost u.
(a) Jakou reakční silou působí dutina na kuličku v bodu A (nevyšší bod dutiny)?
(b) Jakou nejmenší velikost musí mít počáteční rychlost u, aby kulička v nejvyšším bodě dutiny nespadla, tj. aby se pořád dotýkala stěny dutiny?



řešení:

(a) Na kuličku působí tíhová síla $\vec{F}_g$ a reakční síla dutiny $\vec{F}_R$. V bodu A mají obě tyto síly směr svisle dolů, tj. $\vec{F}_g = (0, -mg)$, $\vec{F}_R = (0, -F_R)$. Pohybová rovnice kuličky v bodu A je

$$ma = -mg - F_R.$$

Jestliže se má kulička pohybovat po povrchu dutiny, tak její zrychlení a v bodu A je rovno dotředivému zrychlení pro rovnoměrný pohyb po kružnici $a = -\frac{v^2}{R}$, kde v je rychlost kuličky v bodu A. Když toto zrychlení dosadíme do pohybové rovnice dostáváme

$$m\frac{v^2}{R} = mg + F_R$$

a odtud vypočítáme reakční sílu

$$F_R = m(\frac{v^2}{R} - g).$$

Zbývá vypočítat rychlost v kterou má kulička v bodu A když jsme do jí na dnu dutiny udělili rychlost u. K tomu použiijeme zákon zachování energie. Na dnu dutiny měla kulička kinetickou energii $\frac{1}{2}mu^2$ Při pohybu ze dna dutiny do bodu A kulička postupně ztrácí kinetickou energii, která se mění na potenciální. V bodu

A má kulička energii $\frac{1}{2}mv^2 + mg2R$. Obě energie se musí rovnat

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \tag{1}$$

a z této rovnice můžeme vypočítat rychlost v jako

$$v = \sqrt{u^2 - 4gR}.$$

Velikost reakční síly v bodu A je tedy

$$F_R = m(\frac{u^2}{R} - 5g)$$

.
(b) Minimální rychlost u je taková, že dostředivé zrychlení v bodě A $a = \frac{v^2}{R}$ bude rovno gravitačnímu zrychlení g. Z rovnice $\frac{v^2}{R} = g$ dostáváme $v = \sqrt{gR}$. Rychlost u vyjádříme z rovnice (1)

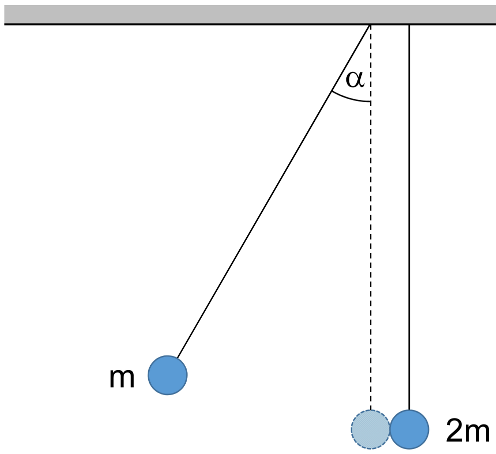
$$u = \sqrt{v^2 + 4gR}.$$

Po dosazení $v = \sqrt{gR}$ dostáváme

$$u = \sqrt{gR + 4gR} = \sqrt{5gR}$$

Pokud uděllíme kuličce na dně dutiny tuto rychlost, tak v bodu A nebude na stěnu dutiny vůbec tlačit ($F_R = 0$). Při každé menší rychlosti nedokáže sledovat stěnu dutiny a bude padat strměji.

3. Na závěsu délky l jsou zavěšeny koule o poloměru R a hmotnostech m a $2m$, viz obrázek. První kouli vychýlíme o úhel α a pustíme.
(a) Do jaké výšky vystoupí těžší koule, pokud srážku koulí považujeme za dokonale pružnou?
(b) Předpokládejte, že úhel α je velmi malý. Za jak dlouho a v jaké poloze se obě koule znovu srazí?
(c) Jaká bude rychlost těžší koule po druhé srážce?



řešení:
(a) Označme rychlost koule o hmotnosti m před srážkou $v_1 = (v_{1x}, v_{1y})$ a po srážce $v_1' = (v_{1x}', v_{1y}')$ Koule o hmotnosti $2m$ má před srážkou nulovou rychlost a po srážce rychlost $v_2' = (v_{2x}', v_{2y}')$. Celková hybnost kuliček těsně před srážkou je stejná jako po srážce a y-ová složka hybnosti v okamžiku srážky je nulová. Pro x-ové složky hybnosti platí

$$mv_{1x} = mv_{1x}' + 2mv_{2x}'$$

Protože se jedná o dokonale pružnou srážku platí že celková mechanická energie těsně před srážkou je stejná jako po srážce

$$\frac{1}{2}mv_{1x}^2 = \frac{1}{2}mv_{1x}'^2 + \frac{1}{2}2mv_{2x}'^2$$

Zákon zachování hybnosti a energie nám tedy dávají soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé v_{1x}', v_{2x}'.

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_{1x}' + 2v_{2x}' && (1) \\ v_{1x}^2 &= v_{1x}'^2 + 2v_{2x}'^2 && (2) \end{aligned}$$

Vyjádříme v_{1x}' z první rovnice $v_{1x}' = v_{1x} - 2v_{2x}'$ a dosadíme ho do druhé

$$v_{1x}^2 = (v_{1x} - 2v_{2x}')^2 + 2v_{2x}'^2$$

Z této rovnice dostáváme rychlost druhé kuličky po srážce

$$v'_{2x} = \frac{2}{3} v_{1x}.$$

Kinetická energie, kterou druhá kulička získá při srážce se postupně mění na potenciální. Výšku h_2, do které kulička o hmotnosti $2m$ vystoupá, určíme tedy z rovnosti

$$\frac{1}{2} 2m v'^2_{2x} = 2mgh_2$$

a dostáváme

$$h_2 = \frac{v'^2_{2x}}{2g} = \frac{2}{9}\frac{v^2_{1x}}{g}.$$

Rychlost v_{1x} první kuličky v okamžiku těsně před srážkou spočítáme opět z výšky h_1, ze které byla puštěna

$$\frac{1}{2} m v'^2_{1x} = mgh_1$$

a dostaneme

$$v_{1x} = \sqrt{2gh_1}.$$

Zbývá ještě vyjádřit výšku h_1 pomocí délky závěsu l a úhlu α vykývnutí vlákna. Z obrázku je zřejmé, že $h_1 = l - l\cos\alpha$ a rychlost v_{1x} je tedy

$$v_{1x} = \sqrt{2g\,l(1-\cos\alpha)}.$$

Výška, do které vysoupá kulička o hmotnosti $2m$ je tedy

$$h_2 = \frac{4}{9} l\,(1-\cos\alpha).$$

(b) Doba kmitu obou kuliček pro malé výchylky závisí jen na délce závěsu a gravitačním zrychlení a je $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (kuličky můžeme pokládat za matematické kyvadlo). Kuličky ze tedy znovu srazí za polovinu doby kmitu, tj. za čas $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ a bude to ve stejném místě, kde se srazily poprvé.

(c) Pro druhou srážku platí stejné rovnice (1,2) pro rychlosti jako pro první (jenom teď jsou před srážkou čárkované a po srážce nečárkované). Proto bude rychlost těžší koule po druhé srážce 0.

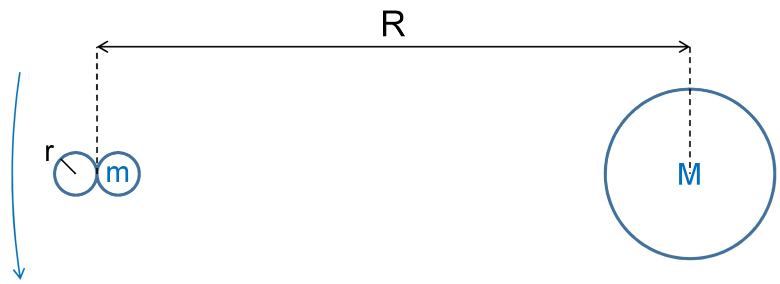
4. Kolem planety o hmotnosti M obíhá ve vzdálenosti R měsíc složený ze dvou malých koulí o stejné hmotnosti m a poloměru r, viz obrázek.
Jakou nejmenší vzdálenost může mít měsíc od planety, aby držel pohromadě?

Pozn.: Při výpočtu lze použít Taylorovy rozvoje

$$\frac{1}{(R+r)^2} \approx \frac{1}{R^2}\left(1-\frac{2r}{R}\right)$$

$$\frac{1}{(R-r)^2} \approx \frac{1}{R^2}\left(1+\frac{2r}{R}\right),$$

které platí pro $r \ll R$



řešení:
Na bližší z malých koulí působí planeta gravitační silou o velikosti

$$F_1 = \kappa\frac{mM}{(R-r)^2},$$

na vzdálenější silou

$$F_2 = \kappa\frac{mM}{(R+r)^2}.$$

Malé koule jsou tedy od sebe odtrháványs silou o velikosti

$$F_o = F_2 - F_1 = \kappa mM\left(\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{(R+r)^2}\right)$$

Pro $r \ll R$ je možné tento výraz zjednodušit pomocí Taylorova rozvoje funkcí $\frac{1}{(R-r)^2}$ a $\frac{1}{(R+r)^2}$

$$F_o = F_2 - F_1 \approx 4\kappa mM\frac{r}{R^3}.$$

Současně se ale k sobě malé koule přitahují gravitační silou o velikosti

$$F_g = \kappa\frac{m^2}{(2r)^2}.$$

Síla F_o se zvětšuje s klesající vzdáleností R od planety. Nejbližší vzdálenost od planety R_{min} bude tedy taková kde F_o=F_g, protože blíže k planetě už vzájemné gravitační přitahovaní malých koulí nedokáže překonat sílu F_o, která je od sebe odtrhává. Dostáváme tedy podmínku

$$4\kappa mM\frac{r}{R_{min}^3} = \kappa\frac{m^2}{(2r)^2},$$

z které vychází minimální vzdálenost

$$R_{min} = \sqrt[3]{\frac{16M}{m}}r.$$