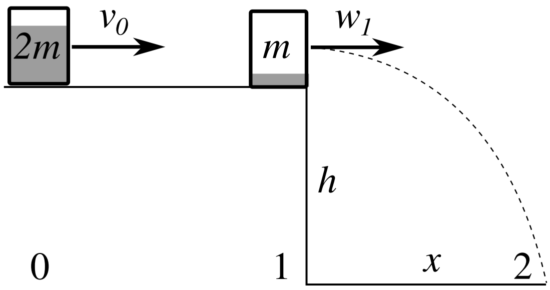
Fyzika 1: 2. opravný test

1. 2. 2024, 10:00, T7

1. Barman pošle po stole plnou sklenici o hmotnosti $2m$, která po něm klouže se zanedbatelným třením rychlostí $v_0 = 1$ m/s a čelně narazí do prázdné sklenice o hmotnosti m, stojící na okraji stolu. Jakou rychlostí v_1 a w_1 (včetně směru) se budou plná a prázdná sklenice pohybovat po srážce, bude-li dokonale pružná? Jak daleko od stolu dopadne prázdná sklenice, jestliže stůl má výšku $h = 0.8$ m?



Řešení: Pro každou srážku platí zákon zachování hybnosti před a po ní,

$$2m\boldsymbol{v_0} = 2m\boldsymbol{v_1} + m\boldsymbol{w_1} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = v_0 - \frac{1}{2}w_1, \tag{1}$$

kde jsme zvolili konvenci, že osa x míří ve směru v_0 a protože se čelní srážka odehrává v jedné přímce, x-ovou složku rychlosti $\boldsymbol{v}$ jsme označili jednoduše v. Pro dokonale pružnou srážku se navíc zachovává i kinetická energie, takže

$$\frac{2}{2}mv_0^2 = \frac{2}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mw_1^2. \tag{2}$$

dosadíme-li z první rovnice, obdržíme

$$2v_0^2 = 2\left(v_0 - \frac{1}{2}w_1\right)^2 + w_1^2, \tag{3}$$

$$0 = w_1(3w_1 - 4v_0). \tag{4}$$

Tedy buď $w_1 = 0$ a dosazením do (1) $v_1 = v_0$, tj. nedošlo ke srážce, toto řešení můžeme ignorovat, nebo

$$w_1 = \frac{4}{3}v_0 \qquad \text{a} \qquad v_1 = \frac{1}{3}v_0, \tag{5}$$

tj. prázdná sklenice byla vyslaná větší rychlostí dopředu a plná pokračovala dopředu menší rychlostí.

Prázdná sklenice padá ze stolu s počáteční rychlostí $w_x(0) = w_1, w_y(0) = 0$ a je vystavena gravitační síle. Její poloha v čase $t = 0$ je $x = 0, y = h$.

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad w_x(t) = w_1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = w_1 t, \tag{6}$$

$$F_y = mg \quad \Rightarrow \quad a_y = g \quad \Rightarrow \quad w_y(t) = gt \quad \Rightarrow \quad y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \tag{7}$$

V čase dopadu na zem bude

$$y(t_2) = 0 = h - \frac{1}{2}gt_2^2, \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{8}$$

Dosazením do (6) dostaneme vzdálenost dopadu,

$$x(t_2) = \frac{4}{3}v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2 \cdot 0.8}{9.81}}\ \text{m} \approx 0.54\ \text{m}. \tag{9}$$

2. Horkovzdušný balon má objem $V = 2000\ \mathrm{m}^3$. Hmotnost všech jeho částí kromě vzduchu v balonu (obal, koš, pilot atd.) je $m_0 = 250$ kg. Balon se odpoutal od země a stoupá se zrychlením $a = 1\ \mathrm{m\ s^{-2}}$. Vypočítejte teplotu vzduchu v balonu T, jestliže vnější teplota je $T_\mathrm{v} = 10°\mathrm{C}$. Uvažujte, že teplota v balonu je všude stejná a že vzduch je ideální plyn, váží $M = 29$ g/mol a hodnota molární plynové konstanty $R = 8.314\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$. Nezapomeňte, že balon je dole otevřený, takže tlak uvnitř je roven atmosferickému, $p = 101\,325$ Pa.

Řešení: Na balon působí gravitační a vztlaková síla. Zrychlení balonu je podle Newtonova zákona úměrné jejich součtu:

$$am = F = -F_\mathrm{g} + F_\mathrm{vz} = -mg + m_\mathrm{v}g, \tag{10}$$

kde $m = m_0 + m_1$ je celková hmotnost balonu včetně vzduchu uvnitř (m_1) a m_v je hmotnost okolního vzduchu, kterou balon svým objemem vytlačuje podle Archimédova zákona. Hmotnosti vzduchu můžeme vyjádřit pomocí molární hmotnosti a látkového množství n jako

$$m_1 = Mn(T), \qquad m_\mathrm{v} = Mn(T_\mathrm{v}) \tag{11}$$

Vzduch uvnitř a vytlačený vzduch má stejný objem i tlak, liší se jen teplotou. Pro ideální plyn platí

$$pV = nRT, \qquad \text{tedy} \qquad n(T) = \frac{pV}{RT}, \tag{12}$$

takže

$$m_\mathrm{v} = \frac{MpV}{RT_\mathrm{v}}, \qquad m_1 = \frac{MpV}{RT} = m_\mathrm{v}\frac{T_\mathrm{v}}{T}. \tag{13}$$

Můžeme tedy dosadit do levé a pravé strany první rovnice:

$$F = am = a\left(m_\mathrm{v}\frac{T_\mathrm{v}}{T} + m_0\right), \tag{14}$$

$$F = -gm_0 - gm_\mathrm{v}\frac{T_\mathrm{v}}{T} + gm_\mathrm{v}. \tag{15}$$

Dohromady dostaneme po vynásobení T

$$am_\mathrm{v}T_\mathrm{v} + am_0T = -gm_0T - gm_\mathrm{v}T_\mathrm{v} + gm_\mathrm{v}T, \tag{16}$$

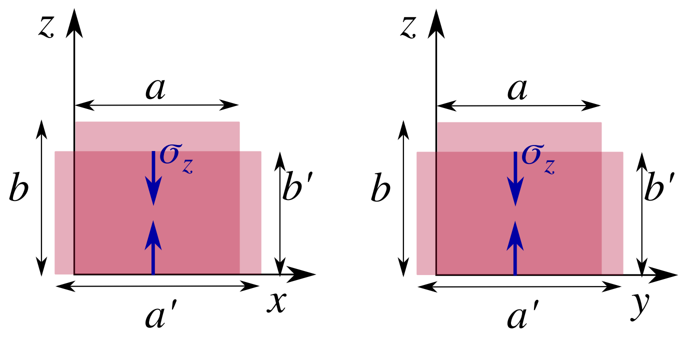
$$T = \frac{m_\mathrm{v}T_\mathrm{v}(a+g)}{gm_\mathrm{v} - m_0(a+g)}. \tag{17}$$

Nakonec dosadíme čísla,

$$m_\mathrm{v} = \frac{0.029 \cdot 101\,325 \cdot 2000}{8.314 \cdot 283.15}\ \mathrm{kg} = 2\,500\ \mathrm{kg}, \tag{18}$$

$$T = \frac{2.5 \cdot 283.15 \cdot 10.81}{9.81 \cdot 2.5 - 10.81 \cdot 0.25}\ \mathrm{K} = 351\ \mathrm{K} = 78°\mathrm{C}. \tag{19}$$

3. Na kvádr o stranách a, a, b seshora působíme tlakem $|\sigma_{zz}| = 20$ MPa (viz obrázek). Pozorujeme deformaci $a' = 1.05\,a$ a $b' = 0.9\,b$. Určete vlastnosti materiálu – Youngův modul E a Poissonův poměr ν.



Řešení: Deformaci materiálu v reakci na vnější tlak popisuje Hookův zákon,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}\big[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sum_k \sigma_{kk}\big], \qquad i,j = x,y,z, \tag{20}$$

kde ϵ_{ij} jsou složky tenzoru deformací, σ_{ij} složky tenzoru napětí a $\delta_{ij} = 1$ je Kroneckerovo delta ($\delta_{i=j} = 1, \delta_{i\neq j} = 0$). Deformace ve směru os x, y, z udávají relativní změnu rozměrů tělesa,

$$a' = (1+\epsilon_{xx})a = 1.05\,a, \qquad a' = (1+\epsilon_{yy})a = 1.05\,a, \qquad b' = (1+\epsilon_{zz})b = 0.9\,b, \tag{21}$$

$$\text{tedy} \qquad \epsilon_{xx} = 0.05, \qquad \epsilon_{yy} = 0.05, \qquad \epsilon_{zz} = -0.1. \tag{22}$$

V tomto případě působí napětí jen ve směru osy z, takže všechna napětí kromě σ_{zz} jsou nulová. Nepozorujeme ani smykovou deformaci (čili $\epsilon_{i\neq j} = 0$). Z celé soustavy (20) proto plyne:

1. Pro $i \neq j$ dostaneme rovnice typu $0 = 0$,
2. pro $(i,j) = (x,x)$ a $(i,j) = (y,y)$ dostaneme dvakrát stejnou rovnici

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}, \tag{23}$$

3. pro $(i,j) = (z,z)$ dostaneme

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz}. \tag{24}$$

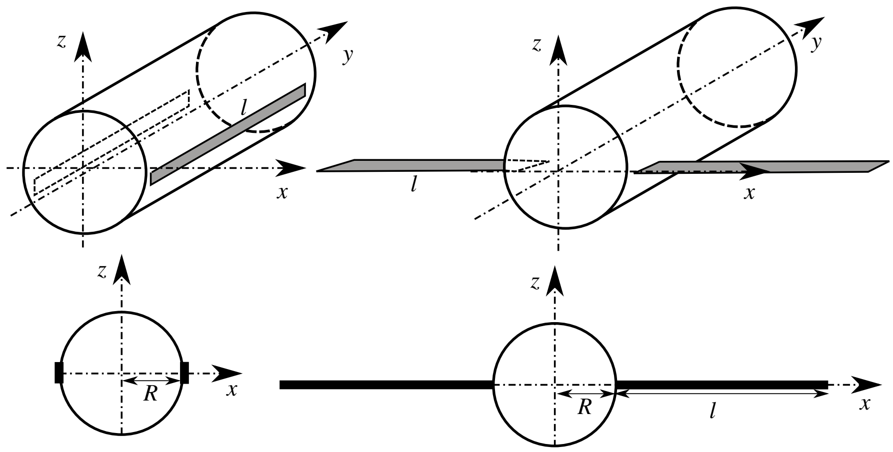
Z rovnice (24) snadno vyjádříme (tlakové napětí σ_{zz} je záporné)

$$E = \frac{\sigma_{zz}}{\epsilon_{zz}} = 200 \text{ MPa}. \tag{25}$$

Dosazením do (23) pak obdržíme

$$\nu = -E\frac{\epsilon_{xx}}{\sigma_{zz}} = -\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} = \frac{0.05}{0.1} = \frac{1}{2}. \tag{26}$$

4. Kosmická sonda válcového tvaru rotuje kolem své osy úhlovou rychlostí ω_1.
(a) Jak se změní rychlost rotace, jestliže sonda roztáhne solární panely, které byly původně složené na boku podle obrázku? Sondu považujte za homogenní válec o hmotnosti M, poloměru R a momentu setrvačnosti $\frac{1}{2}MR^2$. Panel považujte za tenkou tenkou tyč o délce l a hmotnosti m, jejich šířku a tloušťku zanedbejte.
(b) Co se (kvalitativně) stane, pokud se roztáhne jen jeden panel?



Řešení: Platí zákon zachování momentu hybnosti, $L = I\omega$, kde I je moment setrvačnosti tělesa,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad \text{tedy} \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2}. \tag{27}$$

Moment setrvačnosti je definovaný jako

$$I = \int r_\perp^2 \, \mathrm{d}m, \tag{28}$$

kde $r_\perp$ je vzdálenost bodu, přes který integrujeme, od osy otáčení. Výsledek integrálu přes válec známe, zbývá integrovat přes panely v jejich dvou konfiguracích,

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + 2I_{\mathrm{p1}}, \qquad I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + 2I_{\mathrm{p2}}. \tag{29}$$

V první integrujeme přes y a vzdálenost od osy je $r_\perp = R$. Panel je plochý a úzký, takže element hmotnosti $\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}y$,

$$I_{\mathrm{p1}} = \int_0^l \frac{mR^2}{l}\,\mathrm{d}y = \frac{mR^2}{l}\Big[y\Big]_0^l = mR^2. \tag{30}$$

Ve druhém integrujeme přes x od R do $R + l$ a vzdálenost od osy otáčení je $r_\perp = x$,

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{p2}} &= \int_R^{R+l} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_R^{R+l} = \frac{m}{3l}\left[(R+l)^3 - R^3\right] \\ &= \frac{m}{3l}\left(R^3 + 3R^2 l + 3Rl^2 + l^3 - R^3\right) = m\left(R^2 + Rl + \frac{l^2}{3}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Celkem dostáváme

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + 2m\left(R^2 + Rl + \frac{l^2}{3}\right)} < 1. \tag{32}$$

Otáčení se v důsledku zachování momentu hybnosti zpomalí.

Pokud by se roztáhnul jen jeden panel, posunulo by se těžiště sondy. Protože se neotáčí kolem nějaké pevné osy, ale volně v prostoru, posunula by se i osa otáčení tak, aby procházela novým těžištěm.