Pohybové rovnice – numerické řešení

zákon síly

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

počáteční podmínky

$$x(t=0) = x_0$$

$$v_x(t=0) = v_{x_0}$$

zvol malé Δt

$$x(0) = x_0$$

$$v_x(0) = v_{x_0}$$

$$t = 0$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + v_x(t_i)\Delta t$$

$$v_x(t_{i+1}) = v_x(t_i) + a_x(t_i)\Delta t$$

$$t_i = t_{i+1}$$

opakuj cyklus

Pohybové rovnice – numerické řešení: šikmý vrh

zákon síly

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

počáteční podmínky

$$x(t=0) = x_0$$

$$v_x(t=0) = v_{x0}$$

```
x[0]=0 #pocatecni poloha x-ova souradnice
y[0]=0 #pocatecni poloha y-ova souradnice
vx[0]=v0*np.cos(alpha)
vy[0]=v0*np.sin(alpha)
v[0]=np.sqrt(vx[0]**2+vy[0]**2)
s[0]=0
i=0
istop=0 #istop=1 znamena spadlo to na zem
while istop==0 and i<n:
#cyklus bezi dokud to nespadne na zem
#\nebo neprojdu cele pole casu
    i+=1
    x[i]=x[i-1]+vx[i-1]*dt
    y[i]=y[i-1]+vy[i-1]*dt
    if y[i]<0:   #spadlo to na zem
        istop=1
        imax=i
    vx[i]=vx[i-1]
    vy[i]=vy[i-1]-g*dt
    v[i]=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2)
    s[i]=s[i-1]+v[i]*dt
```

Pohybové rovnice – numerické řešení - zpřesnění

zákon síly

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

počáteční podmínky

$$x(t=0) = x_0$$

$$v_x(t=0) = v_{x0}$$

zvol malé Δt

$$x(0) = x_0$$

$$v_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = v_{x0} + a(0)\frac{\Delta t}{2}$$

$$t = 0$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + v_x\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

$$v_x\left(t_{i+1} + \frac{\Delta t}{2}\right) = v_x\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right) + a_x(t_{i+1})\,\Delta t$$

$$t_i = t_{i+1}$$

opakuj cyklus

Pohybové rovnice – numerické řešení – zpřesnění: šikmý vrh

zákon síly

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

počáteční podmínky

$$x(t=0) = x_0$$

$$v_x(t=0) = v_{x0}$$

```
x[0]=0 #pocatecni poloha x-ova souradnice
y[0]=0 #pocatecni poloha y-ova souradnice
vx[0]=v0*np.cos(alpha)
vy[0]=v0*np.sin(alpha)-g*dt/2
v[0]=np.sqrt(vx[0]**2+vy[0]**2)
s[0]=0
i=0
istop=0 #istop=1 znamena spadlo to na zem
while istop==0 and i<n:
#cyklus bezi dokud to nespadne na zem
#nebo neprojdu cele pole casu
    i+=1
    x[i]=x[i-1]+vx[i-1]*dt
    y[i]=y[i-1]+vy[i-1]*dt
    if y[i]<0:   #spadlo to na zem
        istop=1
        imax=i
    vx[i]=vx[i-1]
    vy[i]=vy[i-1]-g*dt
    v[i]=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2)
    s[i]=s[i-1]+v[i]*dt
```

sikmy-vrh.py

Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh bez odporu vzduchu

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

počáteční podmínky

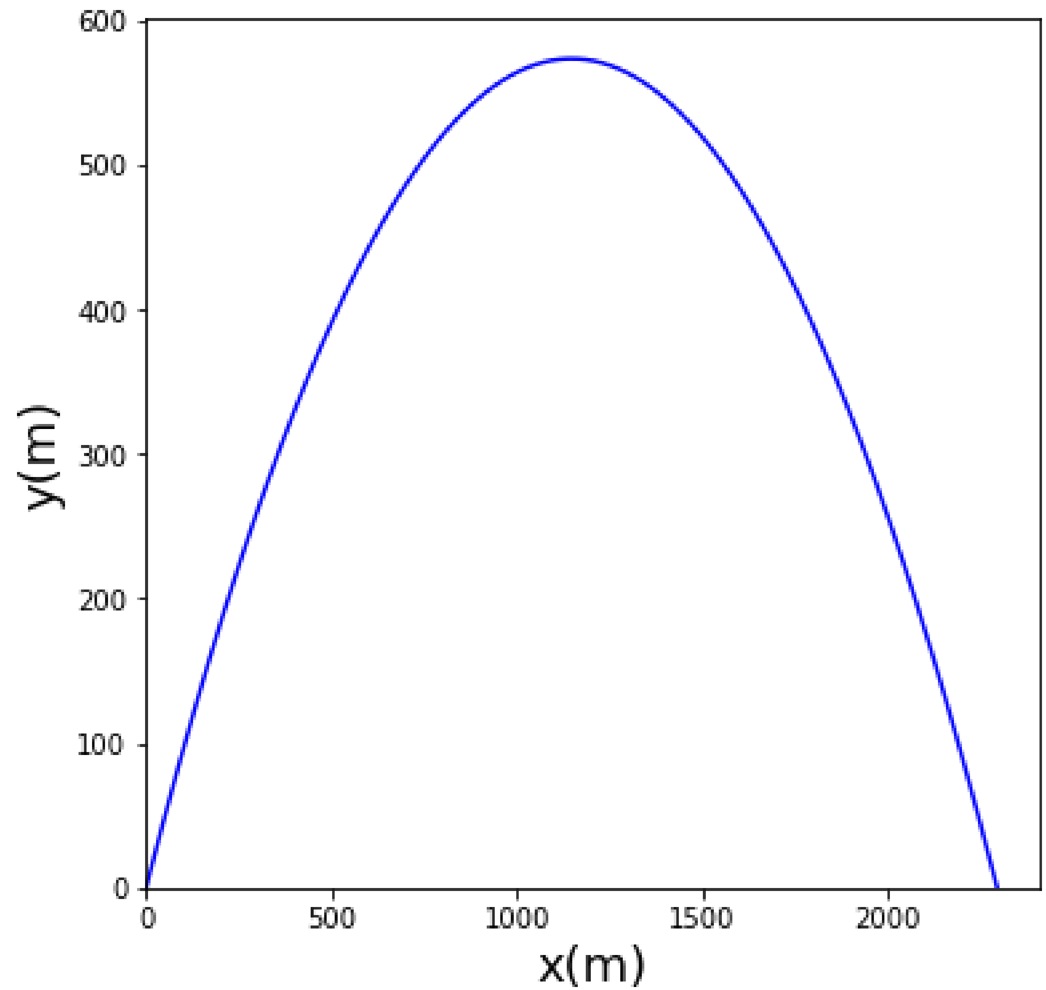
$$x(t=0) = 0$$

$$y(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y(t=0) = v_0 \sin\alpha$$

střela: $m = 0.74$ g, $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45^o$



sikmy-vrh.py

Odporová síla vzduchu

$\vec{v}$ $\vec{F}_o$

- **odporová síla**

průřez tělesa

$$\vec{F}_o = -\frac{1}{2}\varrho S C_d(\mathrm{Re}) v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

- **Reynoldsovo číslo**

$$\mathrm{Re} = \frac{\nu L \varrho}{\mu}$$

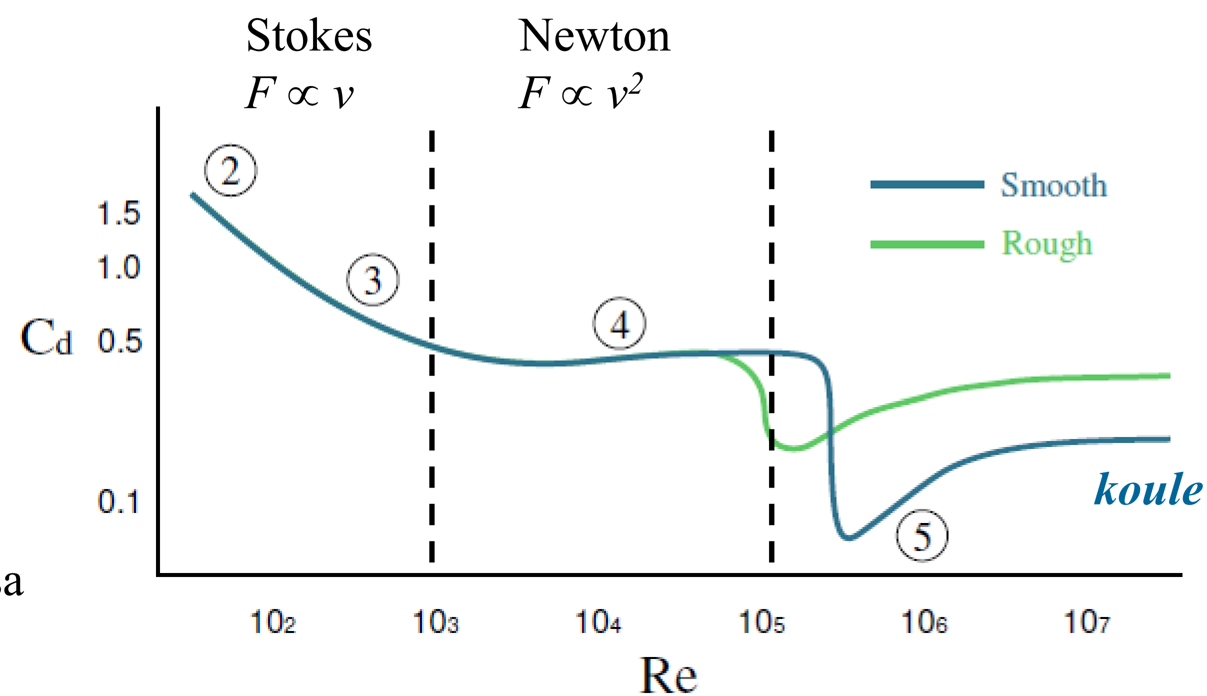
v - rychlost

L - charakteristický rozměr tělesa

ρ - hustota prostředí

μ - viskozita prostředí (vzduch $\mu = 2\times10^{-5}$ Pa s, voda $\mu = 1\times10^{-3}$ Pa s)

- **součinitel odporu C_d (Re)**



Odporová síla vzduchu

$$\vec{v} \longrightarrow \qquad \longleftarrow \vec{F}_o$$

- **odporová síla**

průřez tělesa

$$\vec{F}_o = -\frac{1}{2}\varrho S C_d(\mathrm{Re}) v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

- **Reynoldsovo číslo**

$$\mathrm{Re} = \frac{\nu L \varrho}{\mu}$$

v - rychlost

L - charakteristický rozměr tělesa

ρ - hustota prostředí

μ - viskozita prostředí (vzduch $\mu = 2\times10^{-5}$ Pa s, voda $\mu = 1\times10^{-3}$ Pa s)

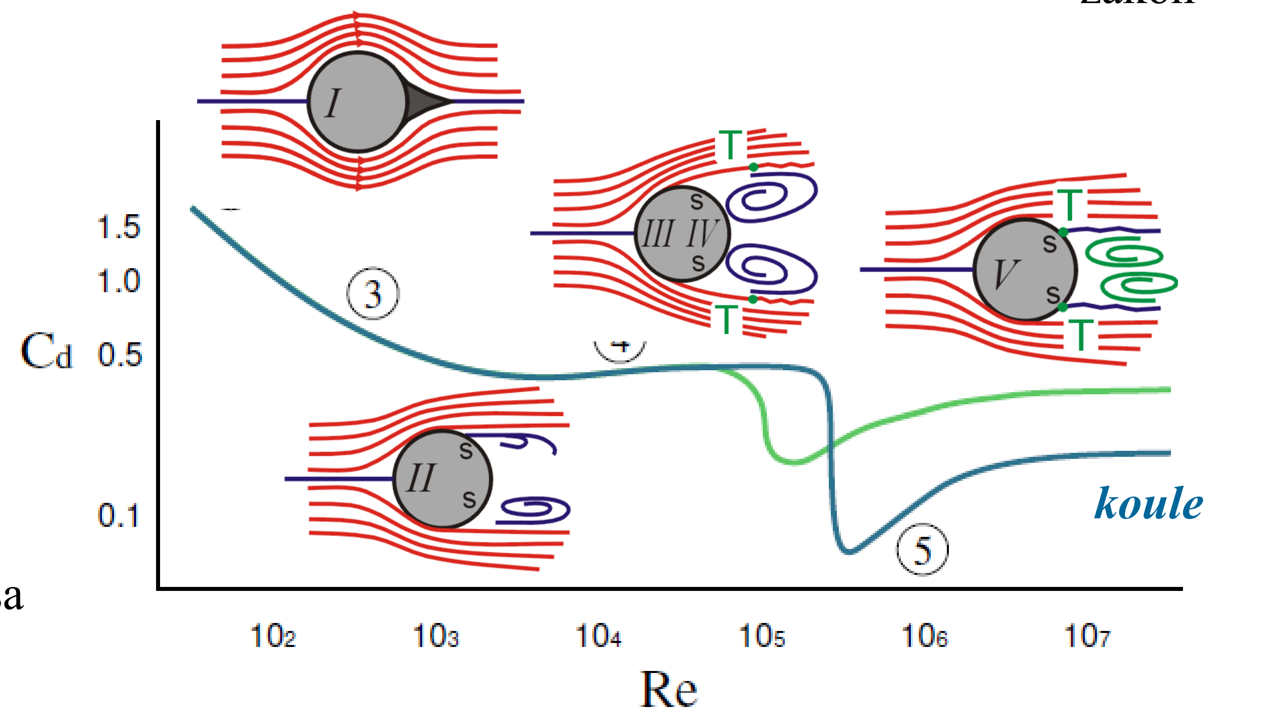
- **součinitel odporu C_d (Re)**

laminární proudění

- malé Re < $10^3 \rightarrow C_d \sim 1/v$ $\qquad F_o \sim v$ $\qquad$ Stokesův zákon

turbulentní proudění

- $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5 \rightarrow C_d \sim$ konst. $\qquad F_o \sim v^2$ $\qquad$ Newtonův zákon



Odporová síla vzduchu

- **střela ze vzduchovky**

velikost: $d = 5$ mm

počáteční rychlost střely: $v_0 = 150$ m/s

hustota vzduchu: $\rho = 1.29$ kg/m^3

viskozita vzduchu: $\mu = 2 \times 10^{-5}$ Pa s

pro střelu letící ve vzduchu je

$$\mathrm{Re} = \frac{v d \varrho}{\mu} = 48000$$

tj. proudění vzduchu okolo střely je *turbulentní*

hustota střely $\rho = 11300$ kg m^{-3} (Pb)

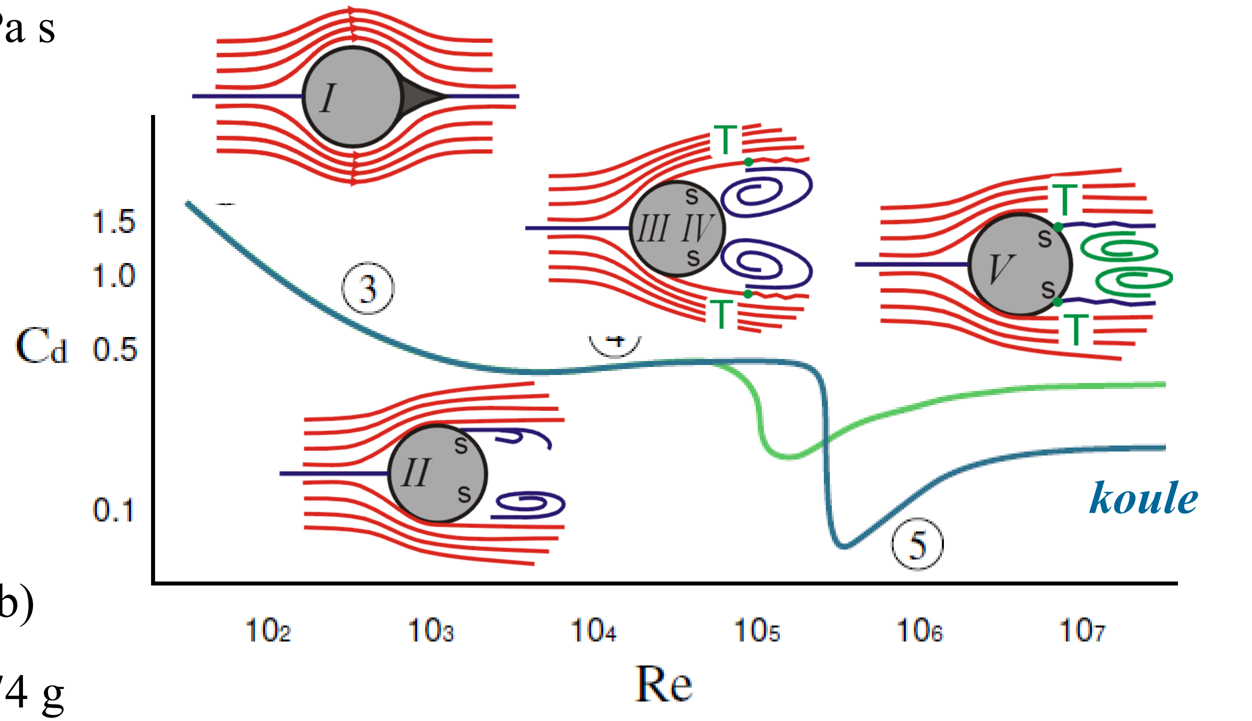
hmotnost: $m = 4/3\pi\,(d/2)^3\,\rho = 0.74$ g

laminární proudění

- malé Re < $10^3 \rightarrow C_d \sim 1/v$ $\quad F_o \sim v \quad$ Stokesův zákon

turbulentní proudění

- $10^3 <$ Re $< 10^5 \rightarrow C_d \sim$ konst. $\quad F_o \sim v^2 \quad$ Newtonův zákon



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_0 = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v^2 \frac{\vec{v}}{v}$

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v \dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -mg - \frac{1}{2}\varrho S C_d v \dot{y}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$

$$y(t=0) = 0$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$$

```
def Fo(v,rho,Cd,S):
    return 0.5*rho*Cd*S*v

#pocatecni podminky
xr[0]=0
yr[0]=0
vxr[0]=v0*np.cos(alfa)-Fo(v0,rho,Cd,S)/m*v0*np.cos(alfa)*dt/2
vyr[0]=v0*np.sin(alfa)-g*dt/2-Fo(v0,rho,Cd,S)/m*v0*np.sin(alfa)*dt/2
vr[0]=np.sqrt(vxr[0]**2+vyr[0]**2)
#numericke reseni pohybove rovnice
i=0
istop=0
imaxr=n
ymaxr=0
while istop==0 and i<n-1:
    i+=1
    xr[i]=xr[i-1]+vxr[i-1]*dt
    yr[i]=yr[i-1]+vyr[i-1]*dt
    if yr[i]<0:
        istop=1
        imaxr=i
    if yr[i]>ymaxr:
        ymaxr=yr[i]
    vr[i]=np.sqrt(vxr[i-1]**2+vyr[i-1]**2)
    vxr[i]=vxr[i-1]-Fo(vr[i],rho,Cd,S)/m*vxr[i-1]*dt
    vyr[i]=vyr[i-1]-g*dt-Fo(vr[i],rho,Cd,S)/m*vyr[i-1]*dt
```

cyklus skončí když střela spadne na zem nebo se projde celé pole časů

spadlo to na zem

pro zjištění max. výšky kam střela doletí

balisticka-krivka.py

Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_0 = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v^2 \frac{\vec{v}}{v}$ střela: $m = 0.74$ g, $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45^{o}$

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v \dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -mg - \frac{1}{2}\varrho S C_d v \dot{y}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

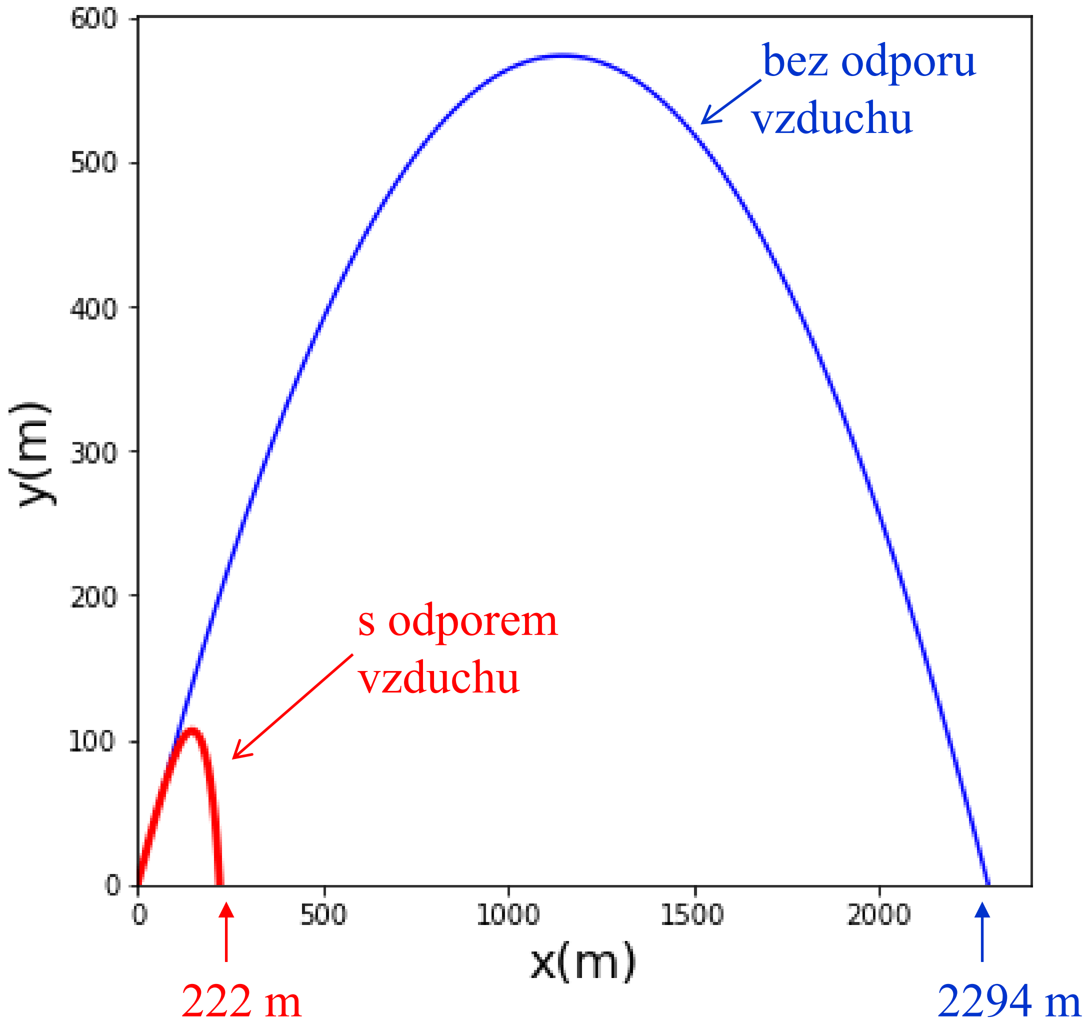
počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$

$$y(t=0) = 0$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$$

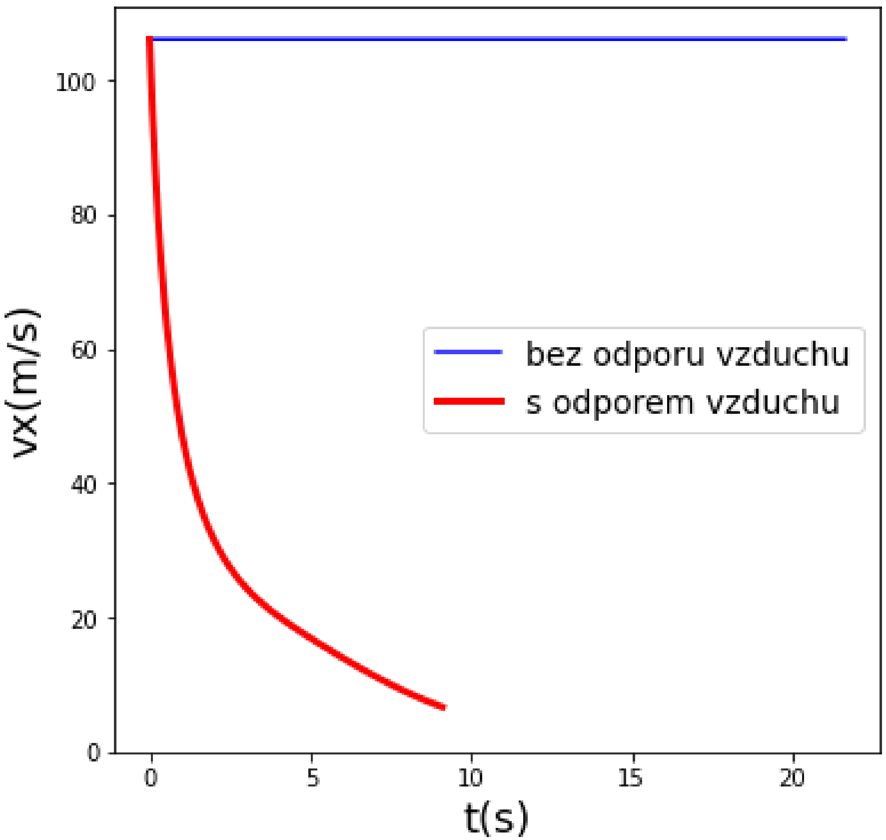


balisticka-krivka.py

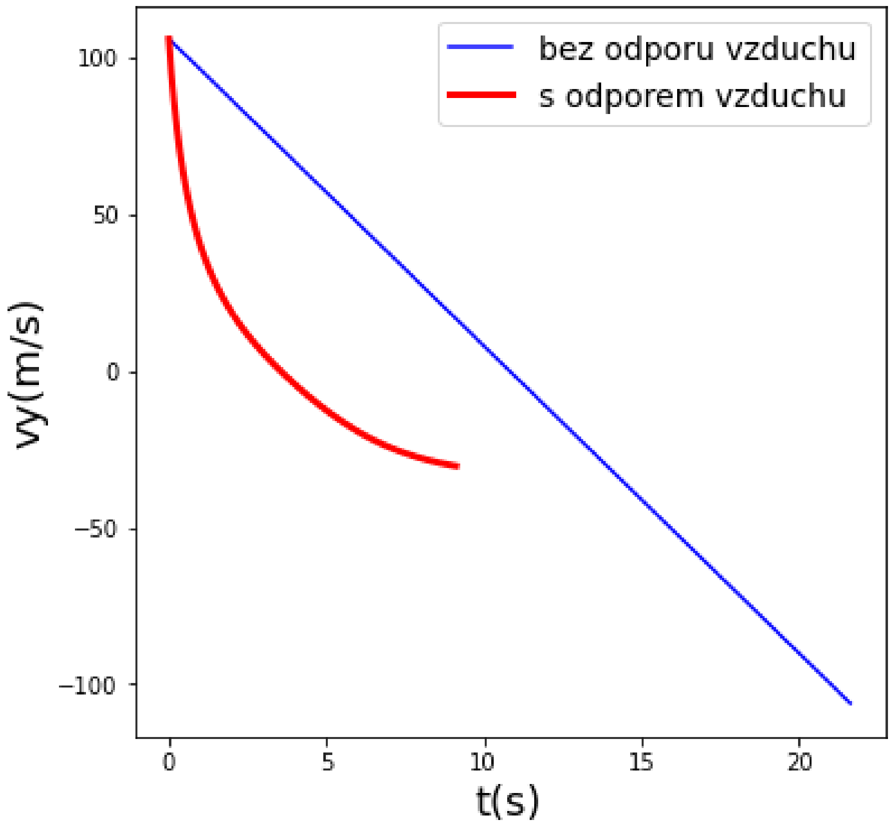
Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_0 = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v^2 \frac{\vec{v}}{v}$ střela: $m = 0.74$ g, $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45^{o}$

x-ová složka rychlosti



y-ová složka rychlosti



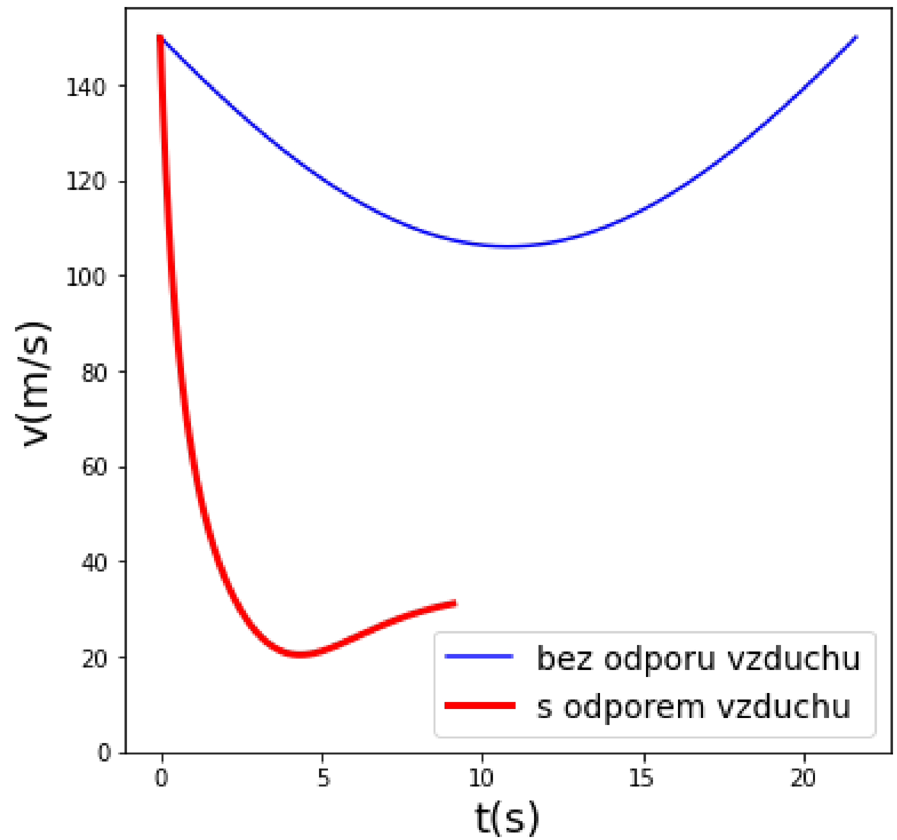
balisticka-krivka.py

Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_0 = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v^2 \frac{\vec{v}}{v}$

střela: $m = 0.74$ g, $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45^{\circ}$

velikost rychlosti $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$



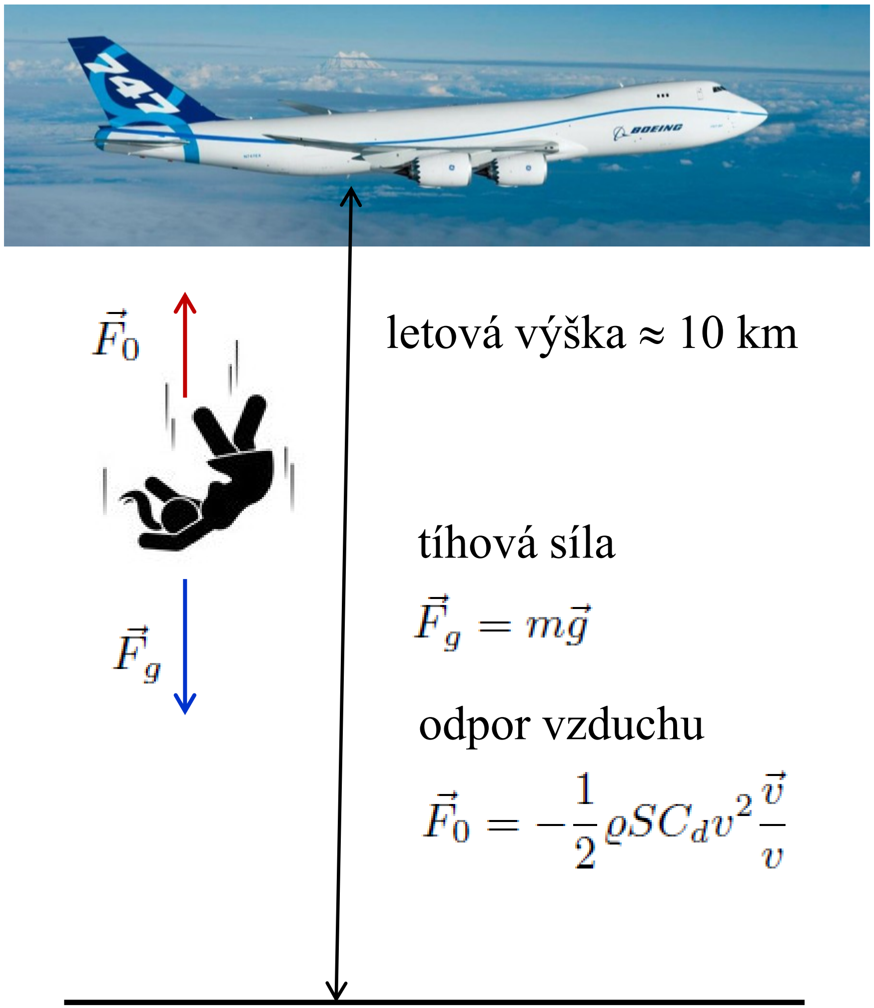
balisticka-krivka.py

Pohybové rovnice – numerické řešení – pád ve vzduchu

Terminální rychlost

člověk: $m = 80$ kg, $d = 0.8$ m

$\mathrm{Re} = \rho\, v\, d / \mu = 3 \times 10^6$



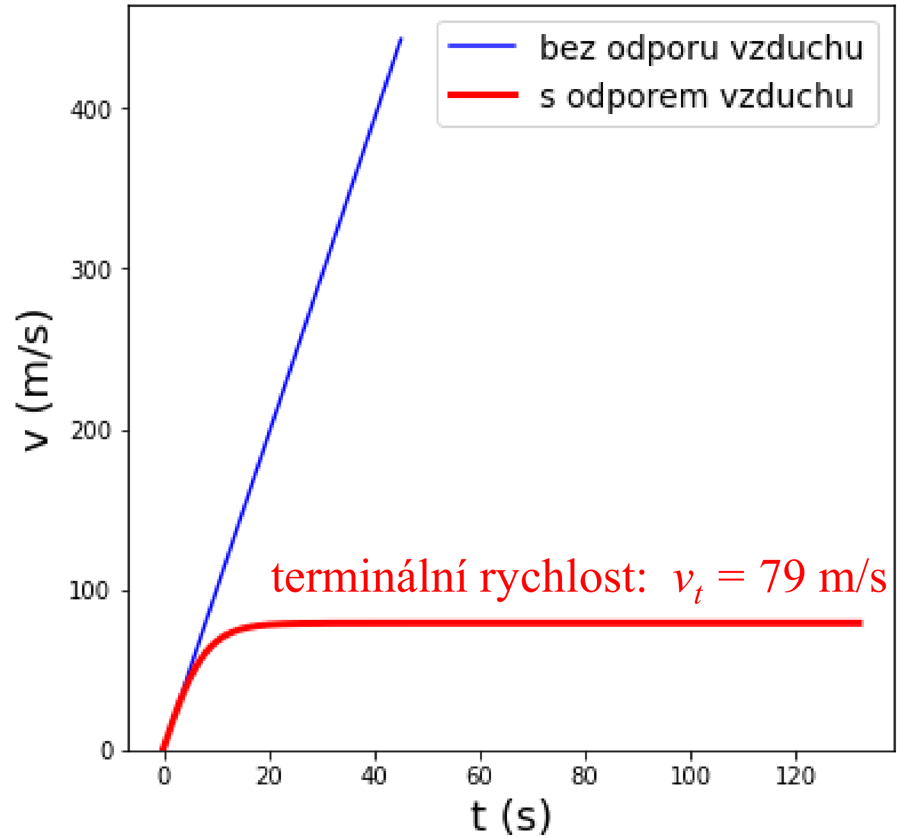
letová výška ≈ 10 km

tíhová síla

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

odpor vzduchu

$$\vec{F}_0 = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$



pad-ve-vzduchu.py

Pohybové rovnice – numerické řešení – pád ve vzduchu

Terminální rychlost

pavouk: $m = 0.5$ g, $d = 1$ cm

$\mathrm{Re} = \rho\, v\, d \,/\, \mu = 8000$

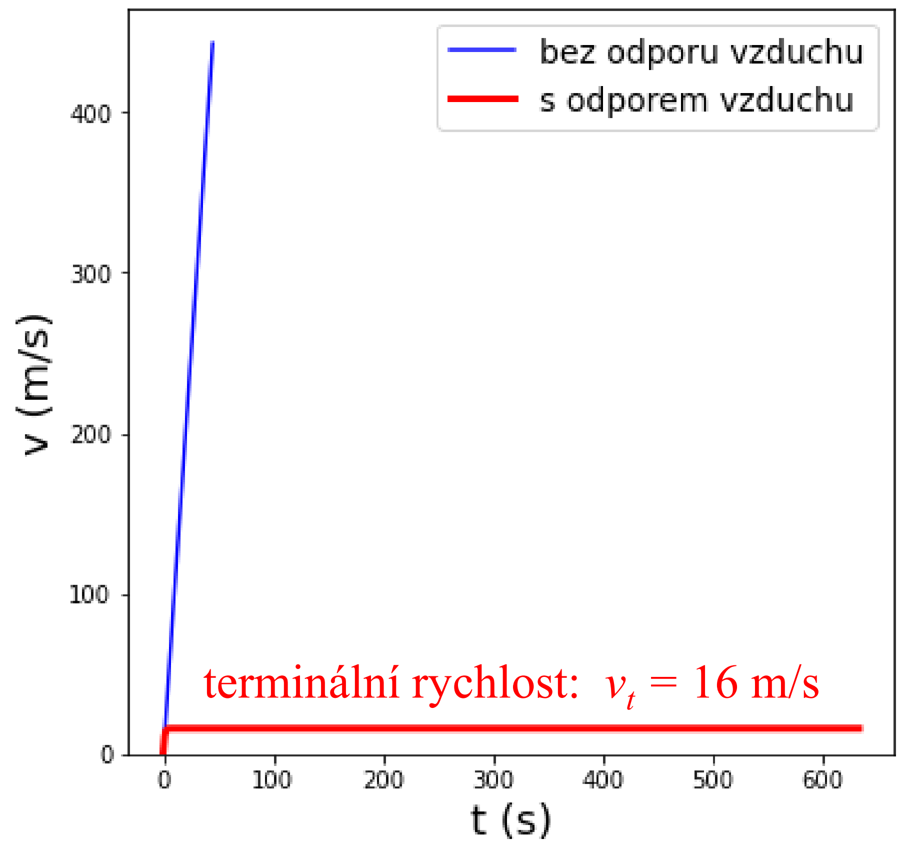
letová výška ≈ 10 km

tíhová síla

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

odpor vzduchu

$$\vec{F}_0 = -\frac{1}{2}\varrho S C_d v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$



pad-ve-vzduchu.py

Impuls síly

Impuls síly: $$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

- pokud je síla konstatní $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$
- souvislost s hybností: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{I} = \Delta\vec{p}$