

Rychlost a zrychlení

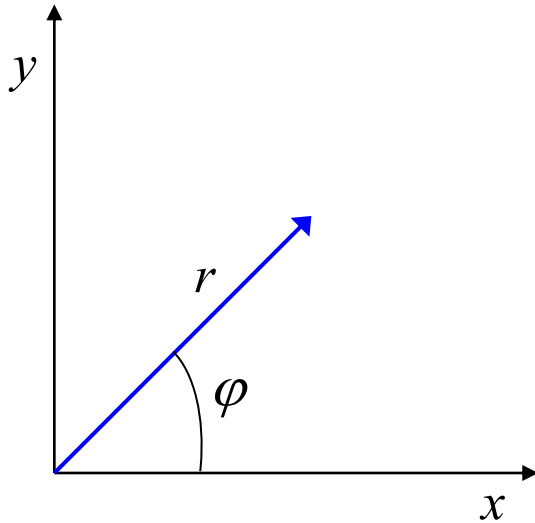
- okamžitá rychlost hmotného bodu:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

- okamžité zrychlení hmotného bodu:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

ω - úhlová rychlost

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{- perioda}$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r \cos \varphi = r \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r \sin \varphi = r \sin(\omega t)$$

Numerický výpočet rychlosti


```
r=1 #polomer kruznice
T=1 #perioda
dt=T/10 #casovy krok
omega=2*np.pi/T #uhlova frekvence
t=np.arange(0,T+dt,dt) #pole casu
x=r*np.cos(omega*t) #x-ova souradnice
y=r*np.sin(omega*t) #y-ova souradnice
tv=np.empty(np.size(t)-1) #cpole casu pro rychlosti
vx=np.empty(np.size(t)-1) #x-ova souradnice rychlosti
vy=np.empty(np.size(t)-1) #y-ova souradnice rychlosti

#numericky vypocet rychlosti
for i in range(1,np.size(t)):
    tv[i-1]=t[i-1]+dt/2
    vx[i-1]=(x[i]-x[i-1])/dt
    vy[i-1]=(y[i]-y[i-1])/dt
```

- numerická derivace souřadnice x

$$v_x(t) = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt}$$

- přesnější

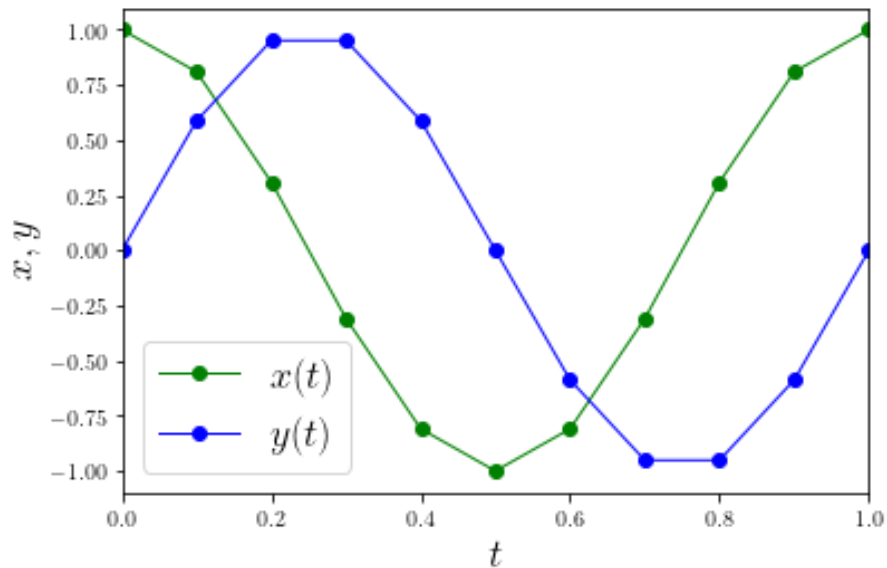
$$v_x \left(t + \frac{dt}{2} \right) = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt}$$


Rovnoměrný pohyb po kružnici

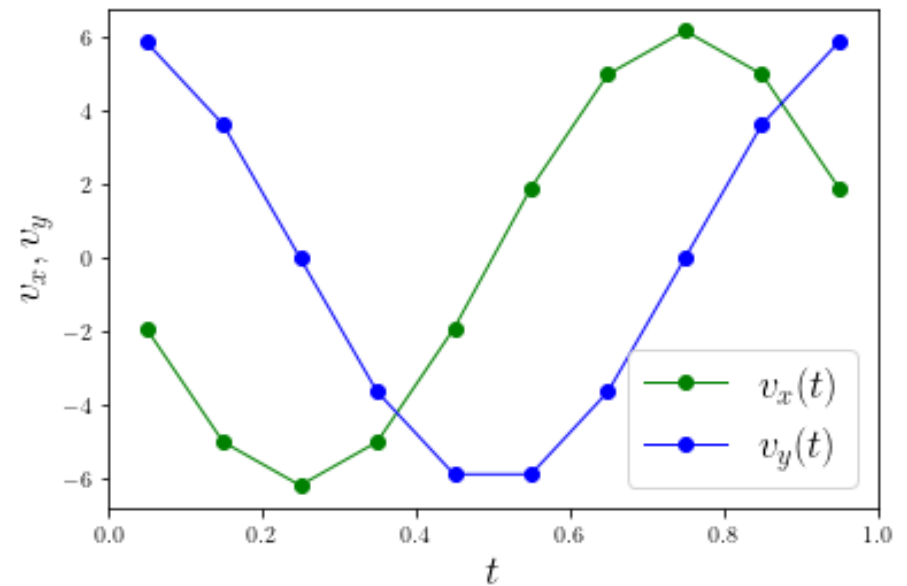
$$n = 11 \quad dt = T/10$$

$$\omega = 2\pi \quad T = 1$$

časová závislost souřadnic



časová závislost složek rychlosti

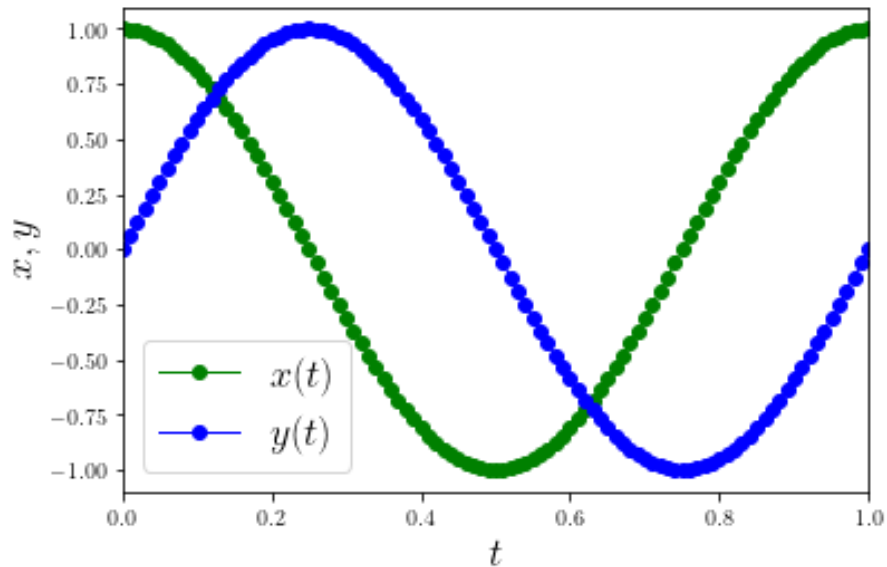


Rovnoměrný pohyb po kružnici

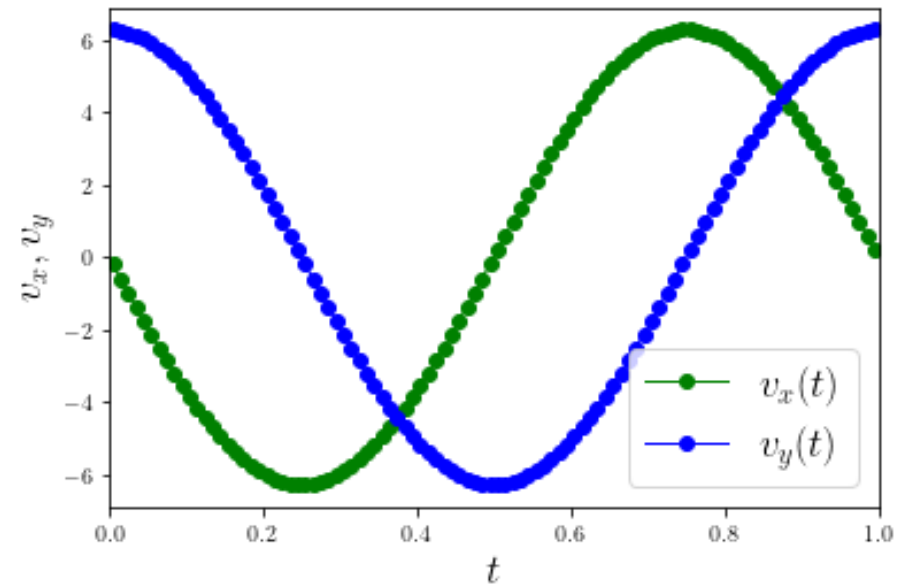
$$n = 101 \quad dt = T/100$$

$$\omega = 2\pi \quad T = 1$$

časová závislost souřadnic



časová závislost složek rychlosti

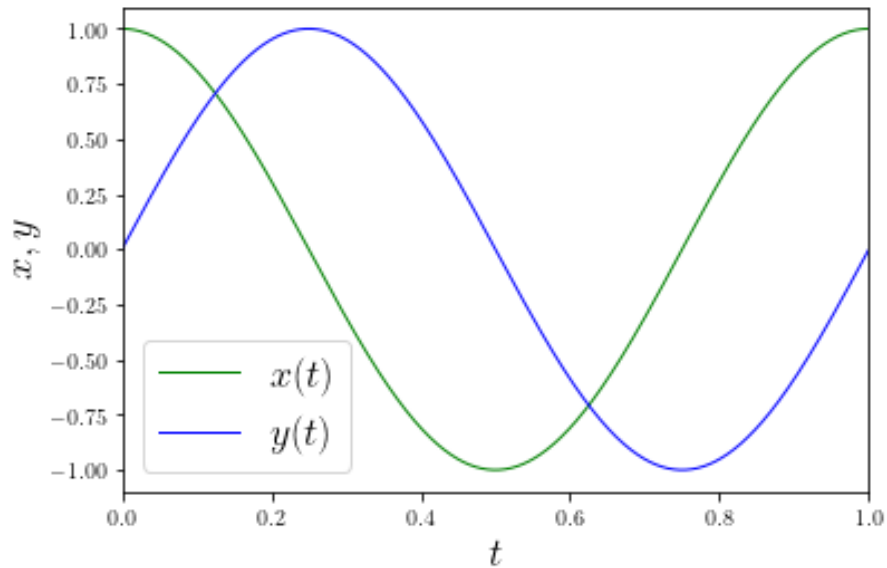


Rovnoměrný pohyb po kružnici

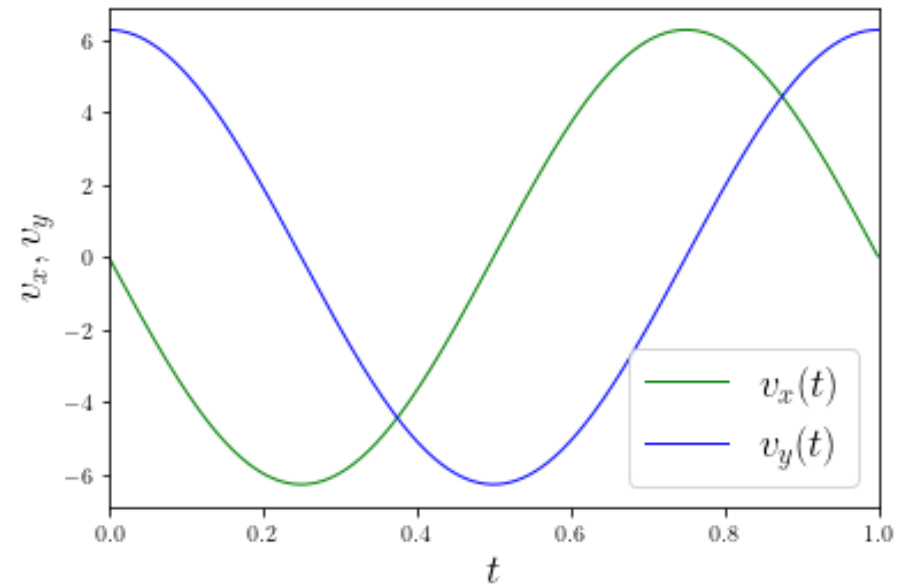
$$n = 1001 \quad dt = T/1000$$

$$\omega = 2\pi \quad T = 1$$

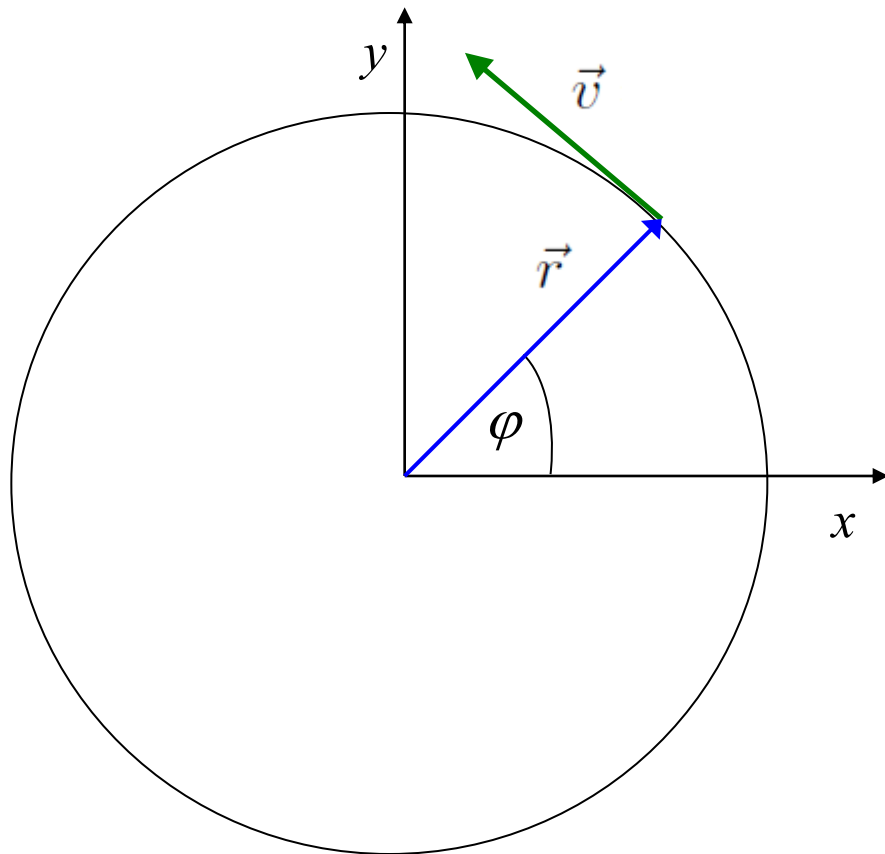
časová závislost souřadnic



časová závislost složek rychlosti



Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r \cos \omega t$$

$$y(t) = r \sin \omega t$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega \sin \omega t \quad \vec{r} \vec{v} = 0$$

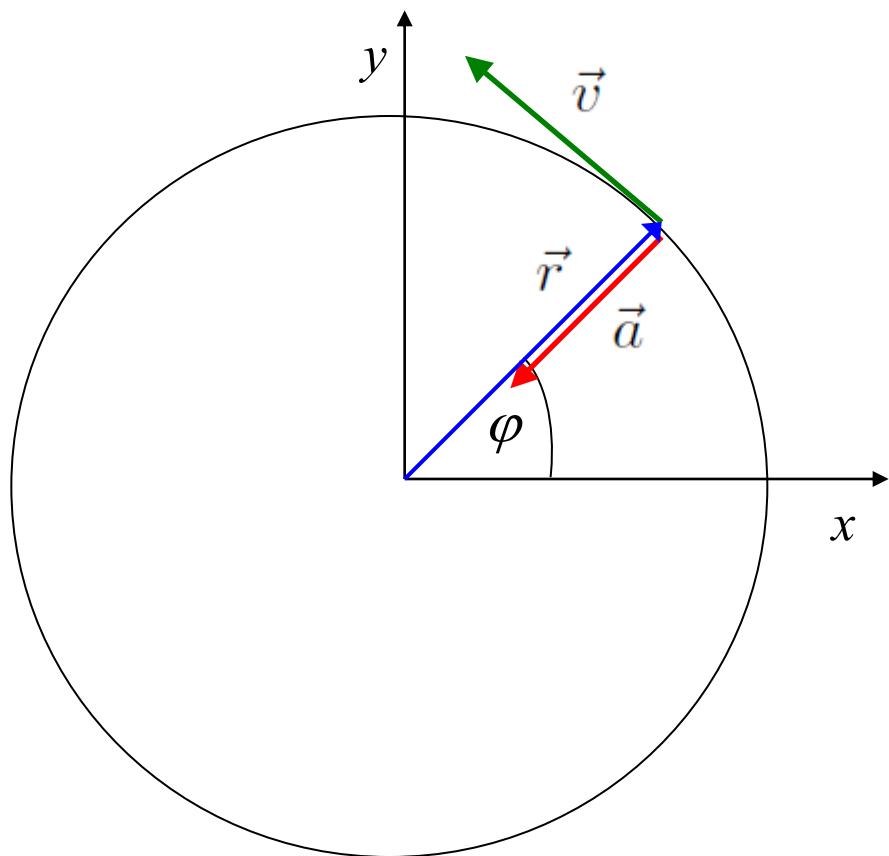
$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega \cos \omega t \quad v = \omega r$$

- rychlost je kolmá na polohový vektor
- velikost rychlosti je ωr a s časem se nemění
- mění se ale směr rychlosti

ω - úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ - perioda

Rovnoměrný pohyb po kružnici



ω - úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ - perioda

kartézské souřadnice

$$x(t) = r \cos \omega t$$

$$y(t) = r \sin \omega t$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega \sin \omega t \quad \vec{r} \vec{v} = 0$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega \cos \omega t \quad v = \omega r$$

zrychlení

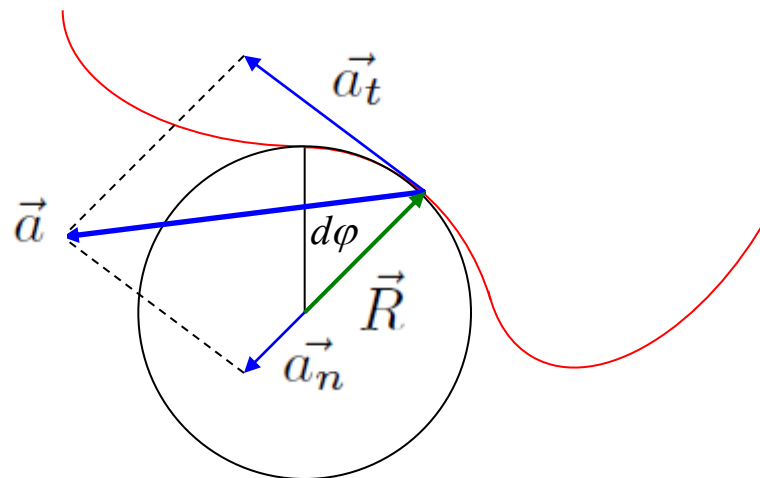
$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -r\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y$$

$$\vec{r} \vec{a} = -r^2 \omega^2 = -ar \rightarrow a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

- zrychlení má opačný směr než polohový vektor
- velikost zrychlení je v^2/r a s časem se nemění

Tečné a normálové zrychlení



tečné zrychlení:

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a} \vec{v} \vec{v}}{v \ v} \quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

normálové zrychlení:

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{a} \vec{R} \vec{R}}{R \ R} \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

Rychlost

rovnoměrný pohyb: *velikost* rychlosti se nemění
- tečné zrychlení je nulové

přímočarý pohyb: *směr* rychlosti se nemění (trajektorie pohybu je úsečka)
- normálové zrychlení je nulové

rovnoměrný přímočarý pohyb: *rychlost* se nemění $\vec{v} = \text{konst.}$ (tj. ani velikost, ani směr)
- tečné i normálové zrychlení je nulové

Úhlová rychlost

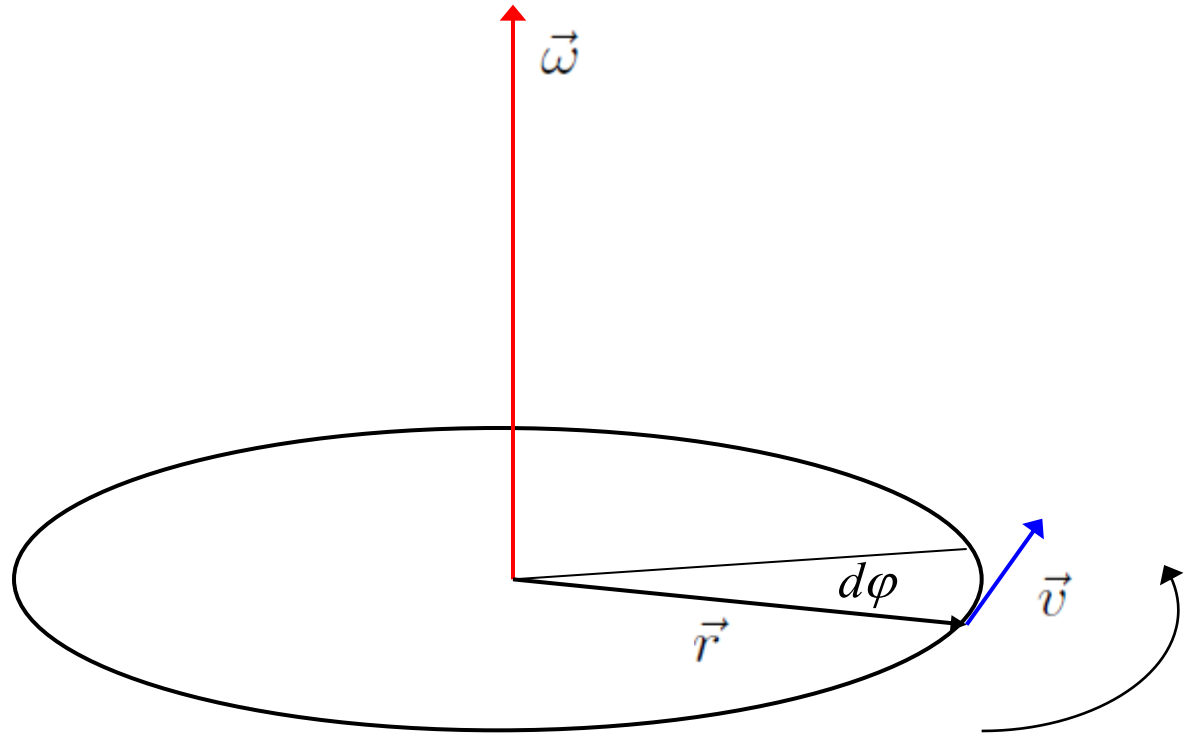
- vektor úhlové rychlosti

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- úhlové zrychlení

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

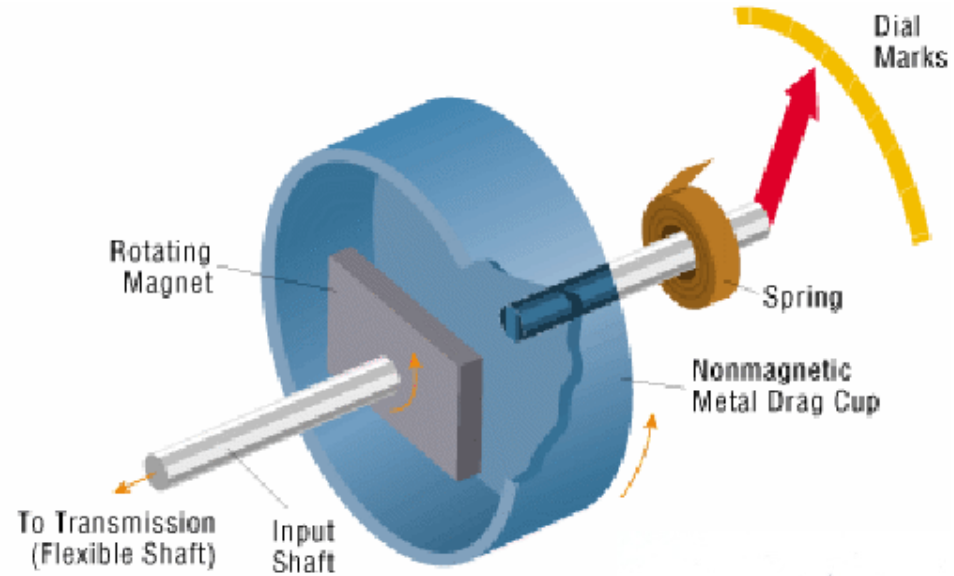


$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Tachometr

- **analogový**

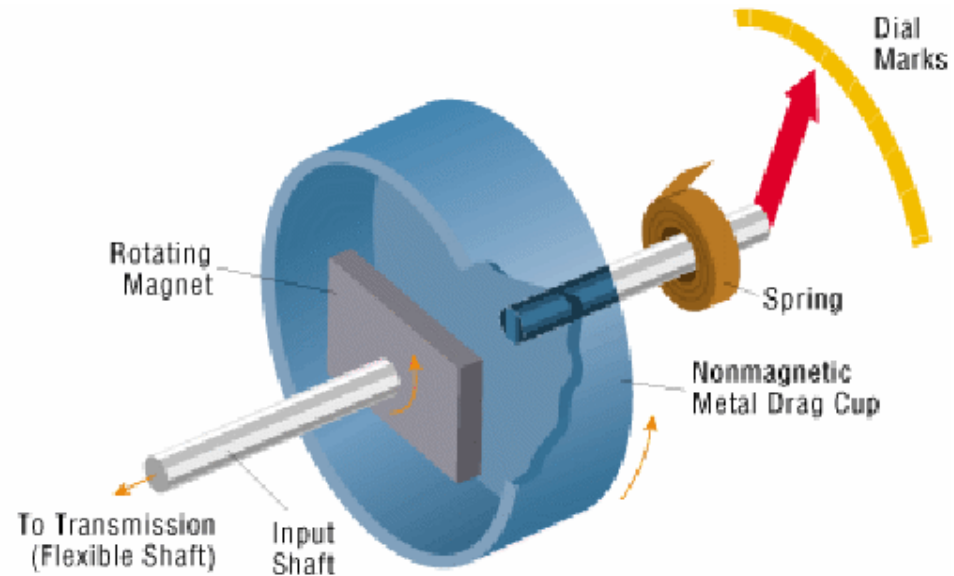
- Otto Schulze 1902



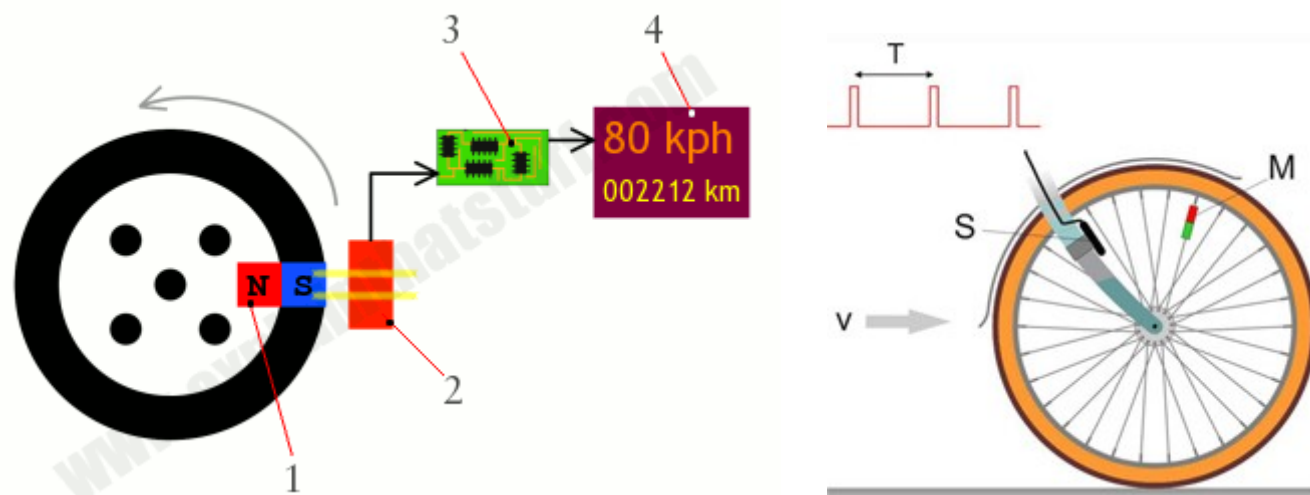
Tachometr

- **analogový**

- Otto Schulze 1902



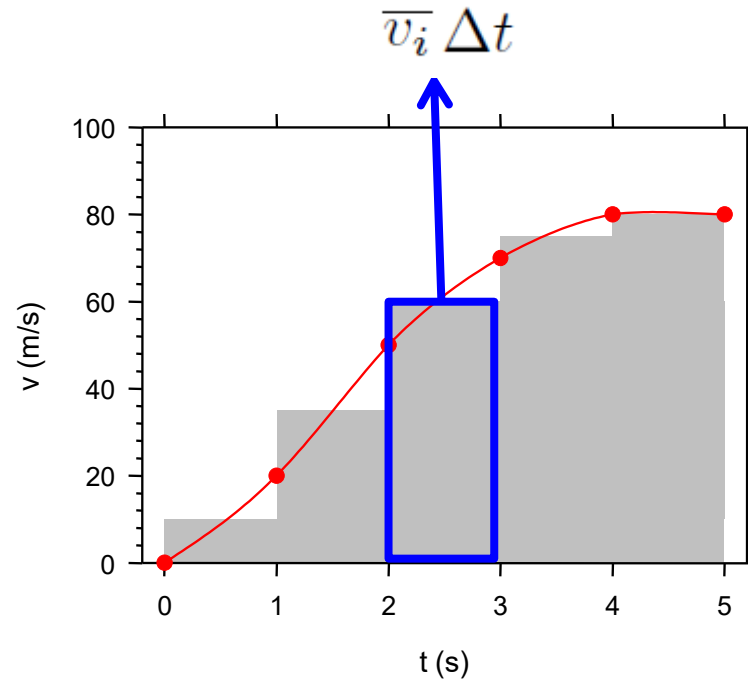
- **digitální**



Dráha

- dráha: délka trajektorie

t (s)	v (m/s)
0	0
1	20
2	50
3	70
4	80
5	80



- dráha: $s = \sum_i \bar{v}_i \Delta t$

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad s = \int v dt$$

Dráha

- dráha, kterou urazil hmotný bod:

$$s \equiv \int \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt = \int v(t) dt$$

Numerická integrace

- rovnoměrně zrychlený pohyb:


```
a=1 #zrychleni
tmax=1 #max. cas
dt=1/10 #casovy krok
t=np.arange(0,tmax,dt) #pole casu
v=a*t #rychlost
s=np.zeros(np.size(t)) #draha
```

```
#numericky vypocet drahy
for i in range(1,np.size(t)):
    s[i]=s[i-1]+v[i-1]*dt
```

integrace

$$s = \int v(t) dt$$

numerická integrace

$$s = \sum_i v(t_i) dt$$


numericka-integrace.py

Numerická integrace

- rovnoměrně zrychlený pohyb:

```
a=1 #zrychleni
tmax=1 #max. cas
dt=1/10 #casovy krok
t=np.arange(0,tmax,dt) #pole casu
v=a*t #rychlost
s=np.zeros(np.size(t)) #draha
```

```
#numericky vypocet drahy
for i in range(1,np.size(t)):
    s[i]=s[i-1]+(v[i-1]+v[i])/2*dt
```

numericka-integrace.py

integrace

$$s = \int v(t) dt$$

numerická integrace

$$s = \sum_i \frac{v(t_i) + v(t_{i+1})}{2} dt$$

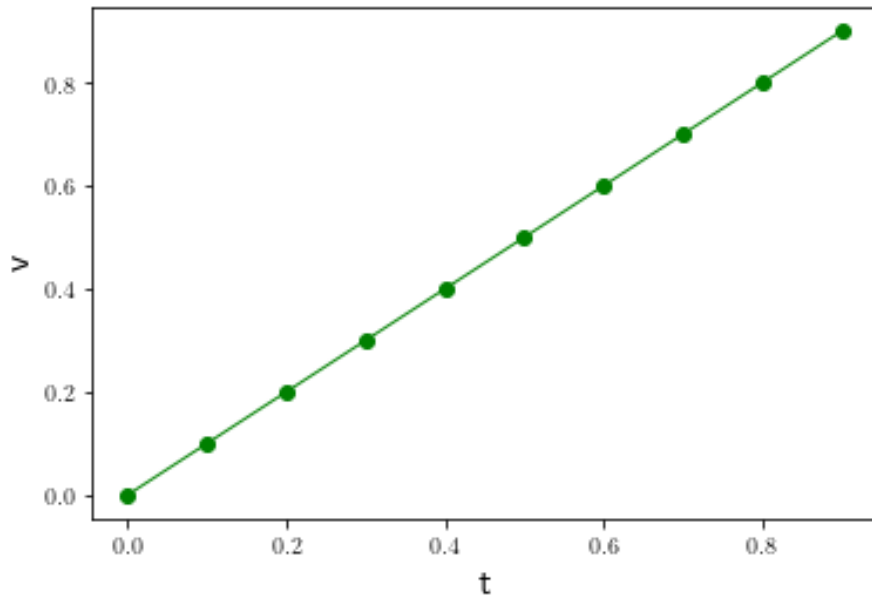
(přesnější)

Numerická integrace

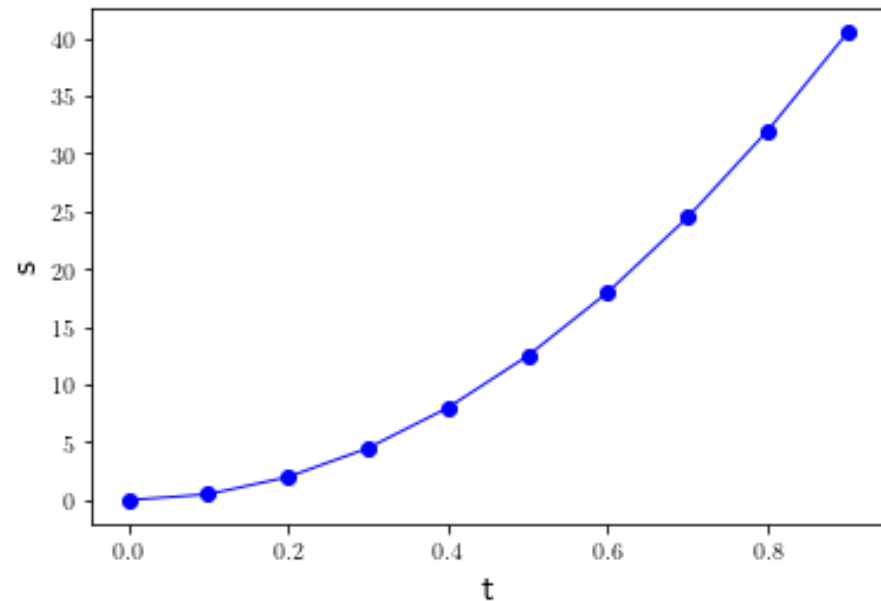
- rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$n = 10 \quad dt = 1/10 \quad a = 1$$

časová závislost rychlosti



časová závislost dráhy

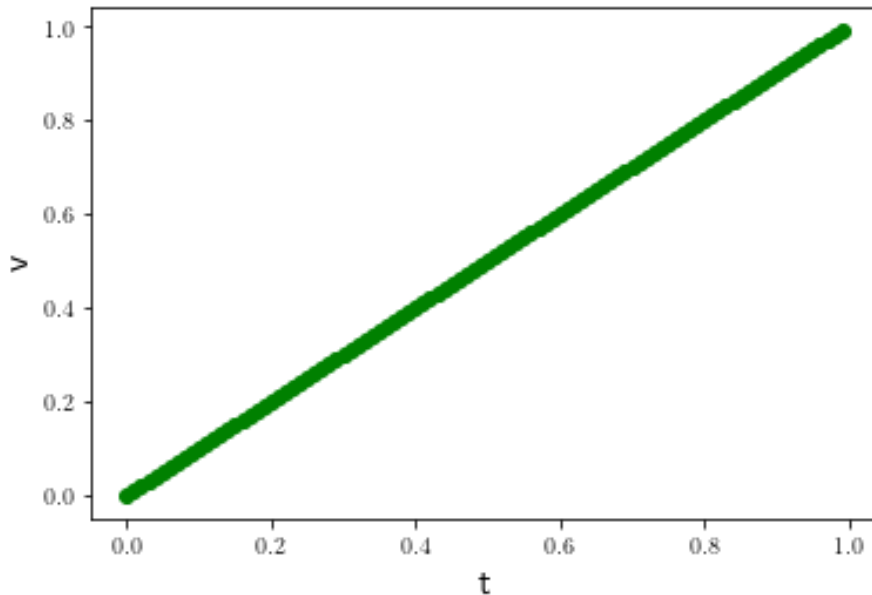


Numerická integrace

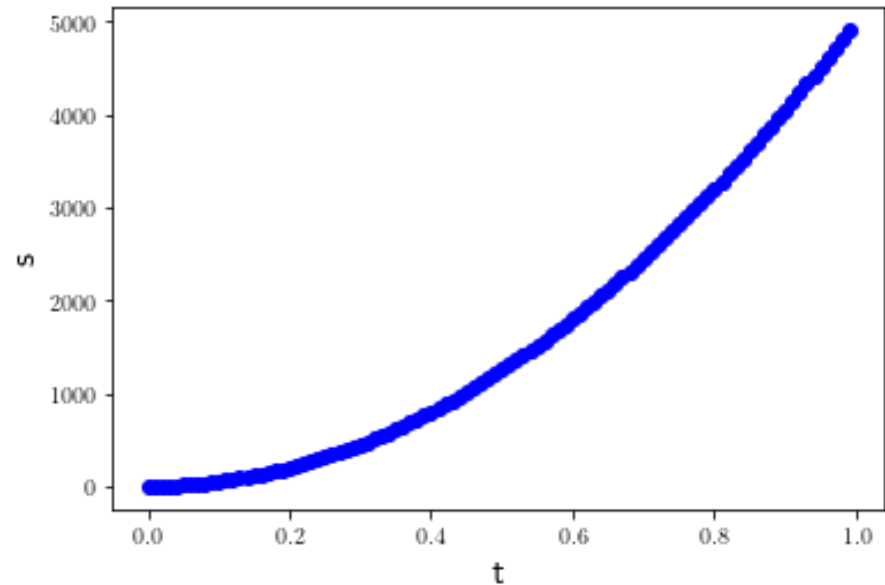
- rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$n = 100 \quad dt = 1/100 \quad a = 1$$

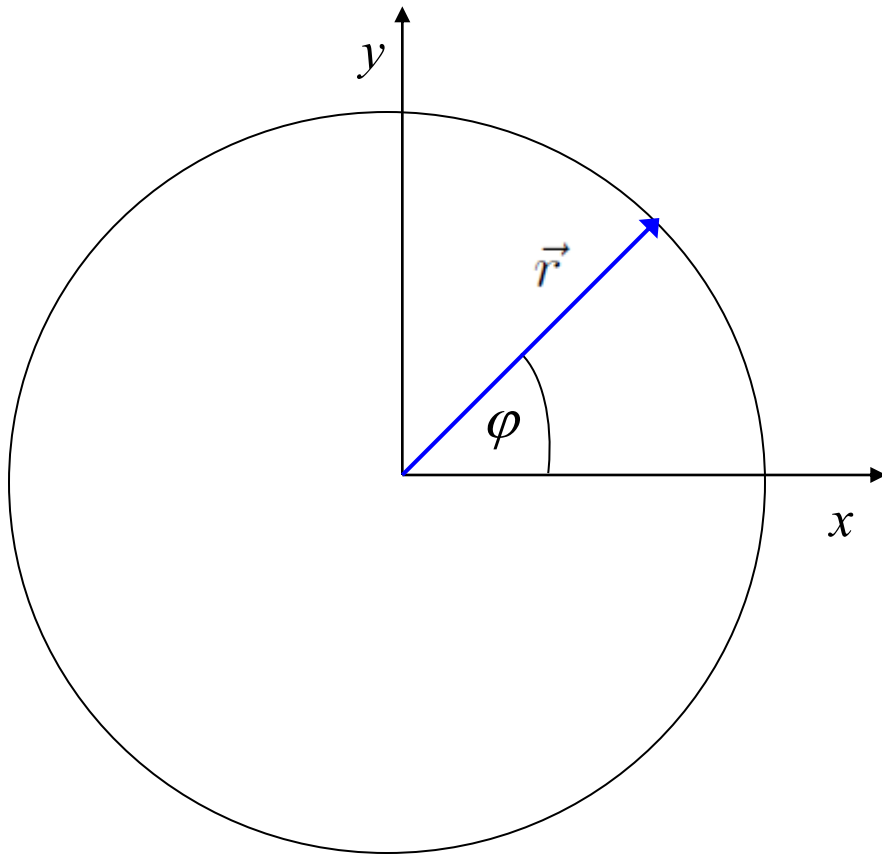
časová závislost rychlosti



časová závislost dráhy



Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r \cos \omega t$$

$$y(t) = r \sin \omega t$$

dráha

$$s = \int_0^T \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt = 2\pi r$$

ω - úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ - perioda