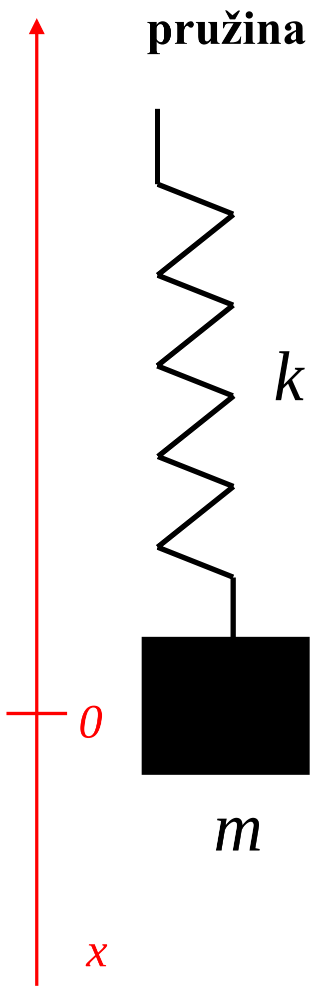
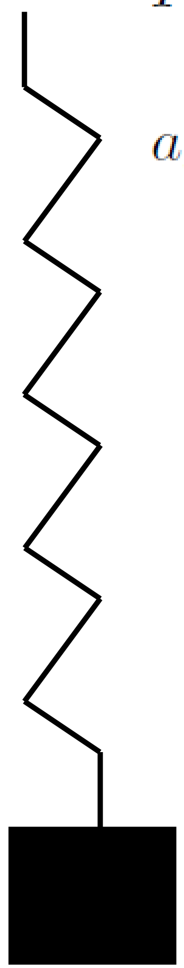
Harmonický oscilátor – pružina





$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

$$x(t=0) = -A$$
$$v_x(t=0) = 0$$
počáteční podmínky

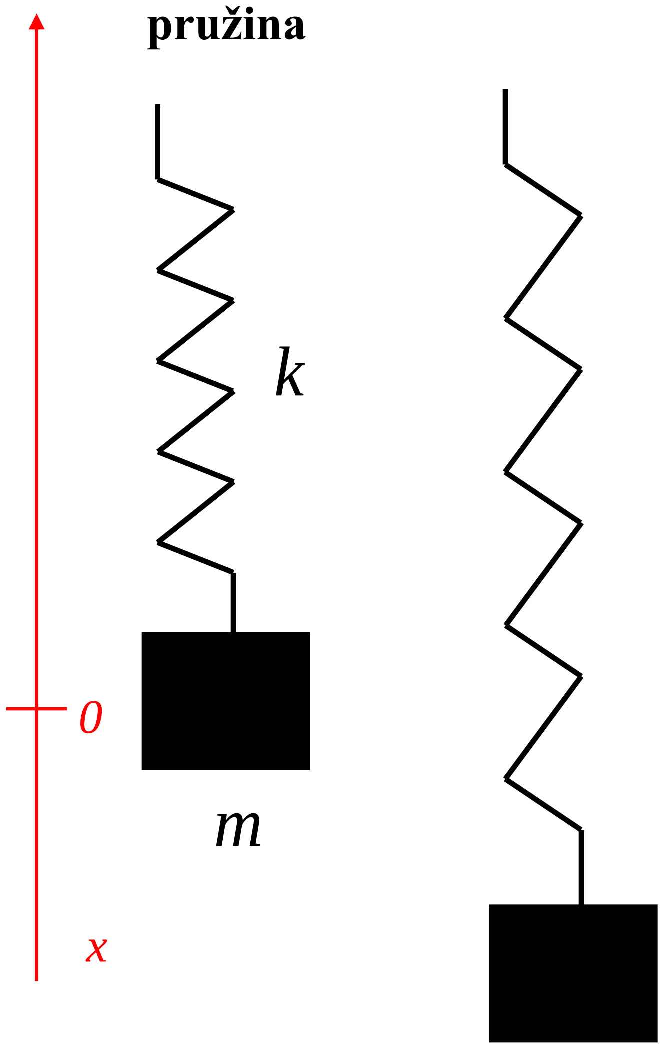
řešení

$$x(t) = C_1 \sin\omega_1 t + C_2 \cos\omega_2 t \quad \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

z počátečních podmínek dostáváme $C_1 = 0 \quad C_2 = -A$

$$\boxed{x(t) = -A\cos\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Harmonický oscilátor – pružina



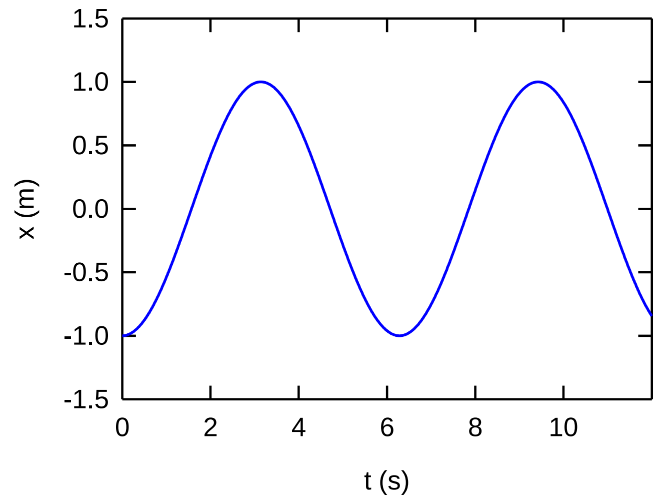
$$x(t) = -A\cos\omega t$$

$$v_x(t) = A\omega\sin\omega t$$

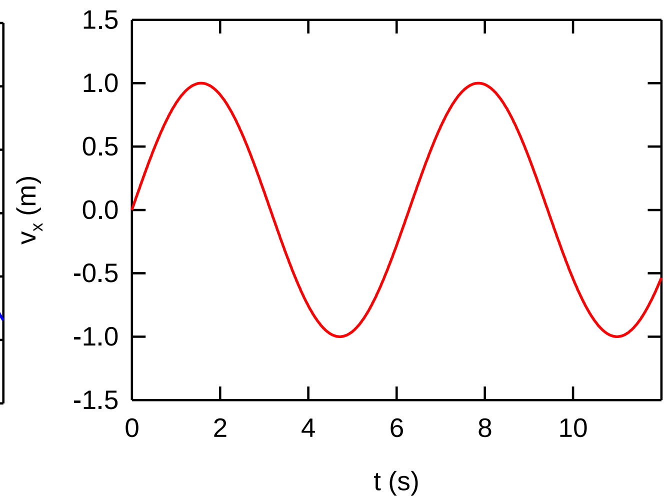
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Př. $k = 1$, $m = 1$

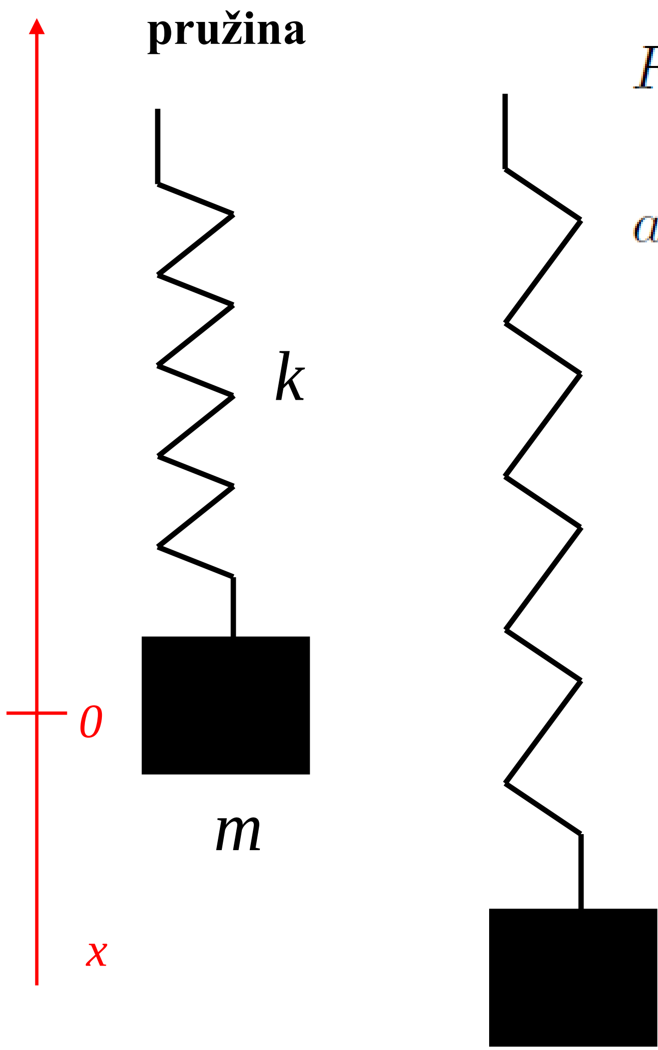
poloha



rychlost



Harmonický oscilátor – pružina



$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

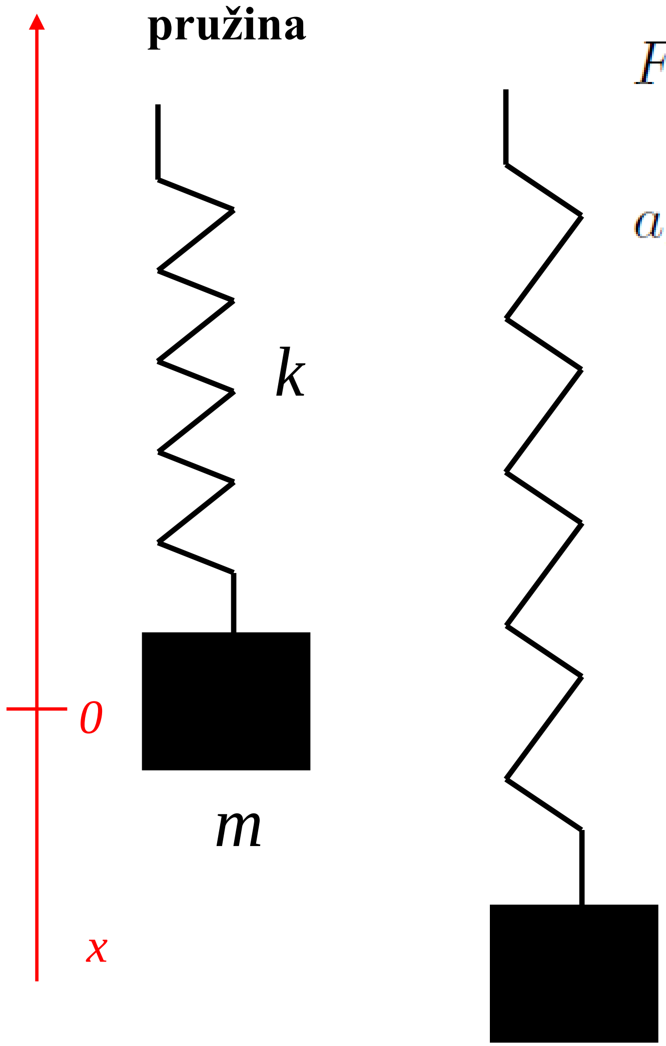
$$x(t=0) = -A$$
$$v_x(t=0) = 0$$
počáteční podmínky

řešení:

$$x(t) = -A\cos\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

perioda kmitů: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Harmonický oscilátor – pružina



$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

pohybová rovnice: $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$

obecné řešení:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

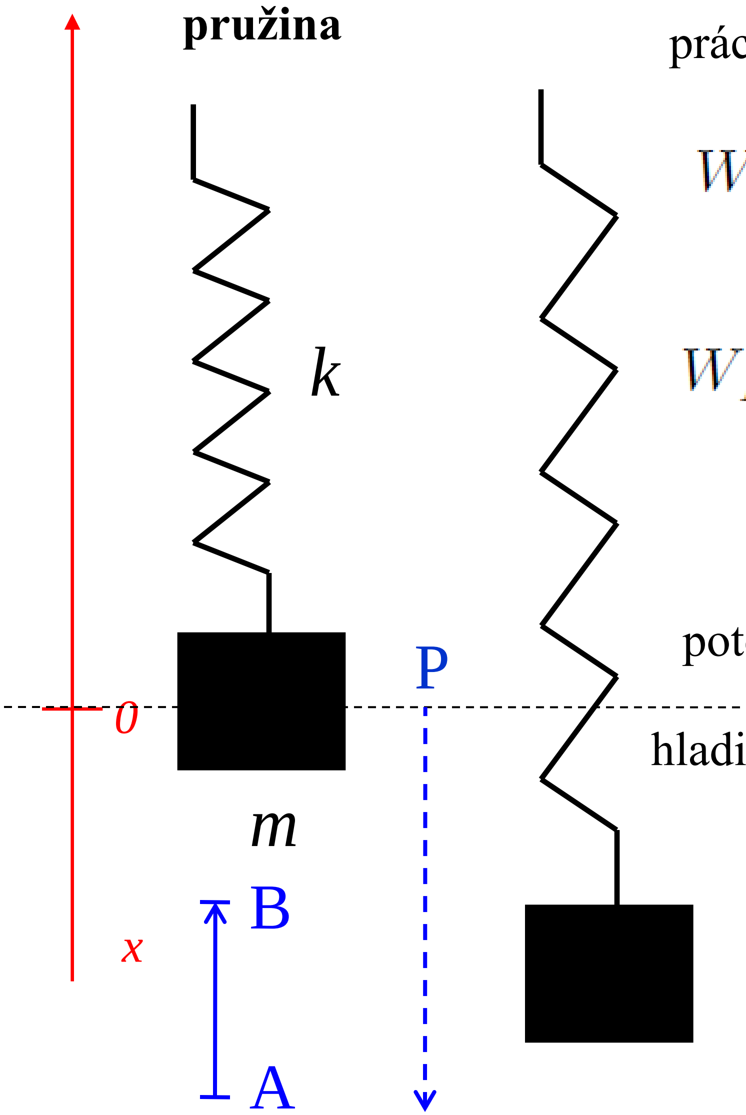
fázový posuv

$$x(t) = C_1 \sin\omega_1 t + C_2 \cos\omega_2 t$$

$$C_1 = A\cos\varphi$$

$$C_2 = A\sin\varphi$$

Harmonický oscilátor – pružina



práce, kterou vykoná pružina při přesunu závaží z A do B:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

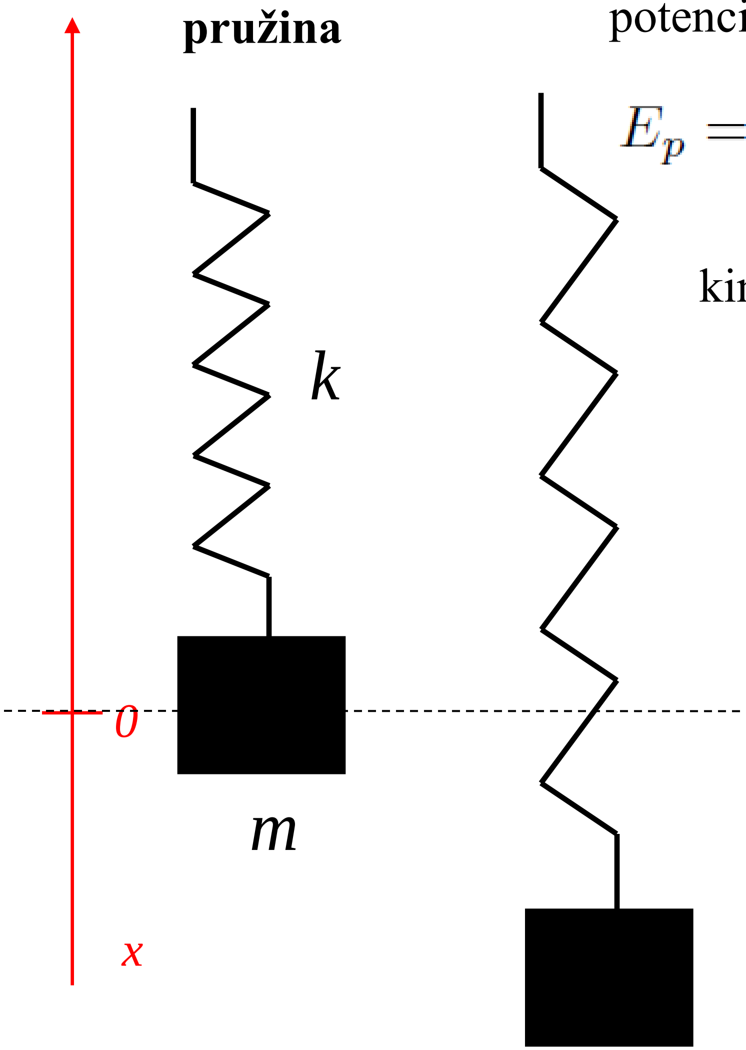
$$W_{PA} = \int_{x_P}^{x_A} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k(x_A^2 - x_P^2) = -\frac{1}{2}kx_A^2$$

potenciální energie v bodu A: $E_p(A) = -W_{PA} = \frac{1}{2}kx_A^2$

hladina nulové potenciální energie

potenciální energie pružiny: $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Harmonický oscilátor – pružina



potenciální energie:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

celková energie pružiny: $E_k + E_p = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$

Fyzické kyvadlo

2. impulsová věta: $\tau_o = Mgl\sin\varphi = -J_o\varepsilon = -J_o\ddot{\varphi}$

aproximace malých kmitů: $\sin\varphi \approx \varphi$

pohybová rovnice:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mgl}{J_o}\varphi$$

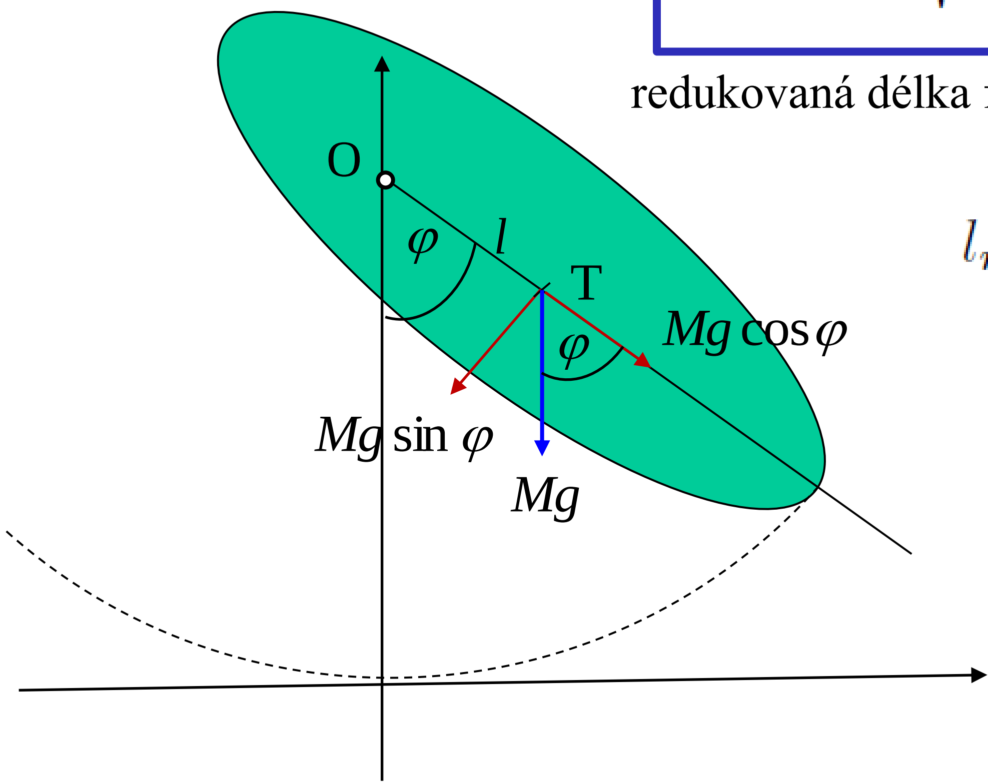
$$\varphi(t) = A\sin(\omega t + \varepsilon)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{J_o}}$$

Steinerova věta:

$$J_o = J_T + Ml^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{J_T + Ml^2}}$$



perioda kmitů:

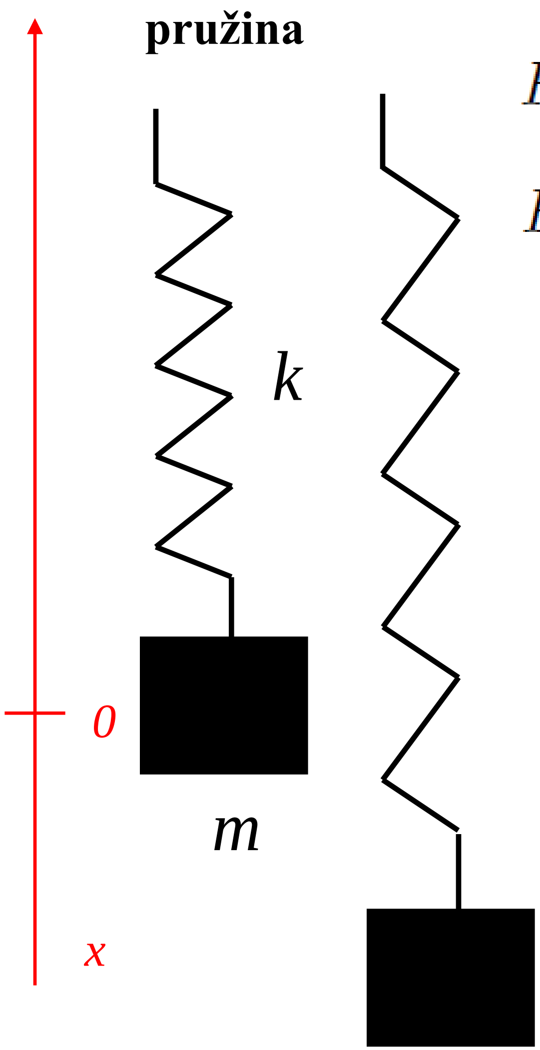
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_T + Ml^2}{Mgl}}$$

redukovaná délka fyzického kyvadla:

$$l_r = \frac{J_T + Ml^2}{Ml}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

Tlumené kmity



$$F_p = -kx$$

$$F_o = -h\dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{h}{m}\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}}$$

řešení hledáme ve tvaru: $x = Ce^{\alpha t}$

charakteristická rovnice: $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

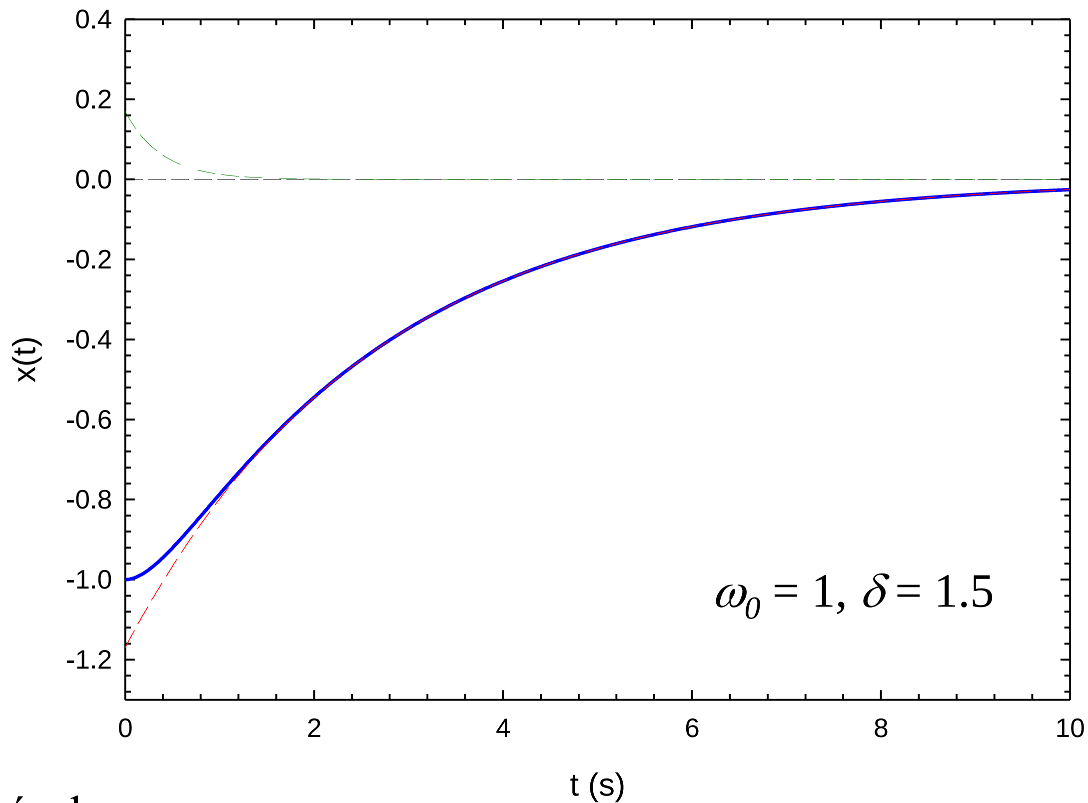
Tlumené kmity – aperiodický pohyb

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}}$$

aperiodický pohyb: $D > 0$

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$



konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek:

např. $x(0) = -a \quad C_1 + C_2 = -a \quad C_1 = \dfrac{a\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$

$\dot{x}(0) = 0 \quad C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 = 0 \quad C_2 = \dfrac{-a\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$

$$x = \frac{a\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{a\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}$$

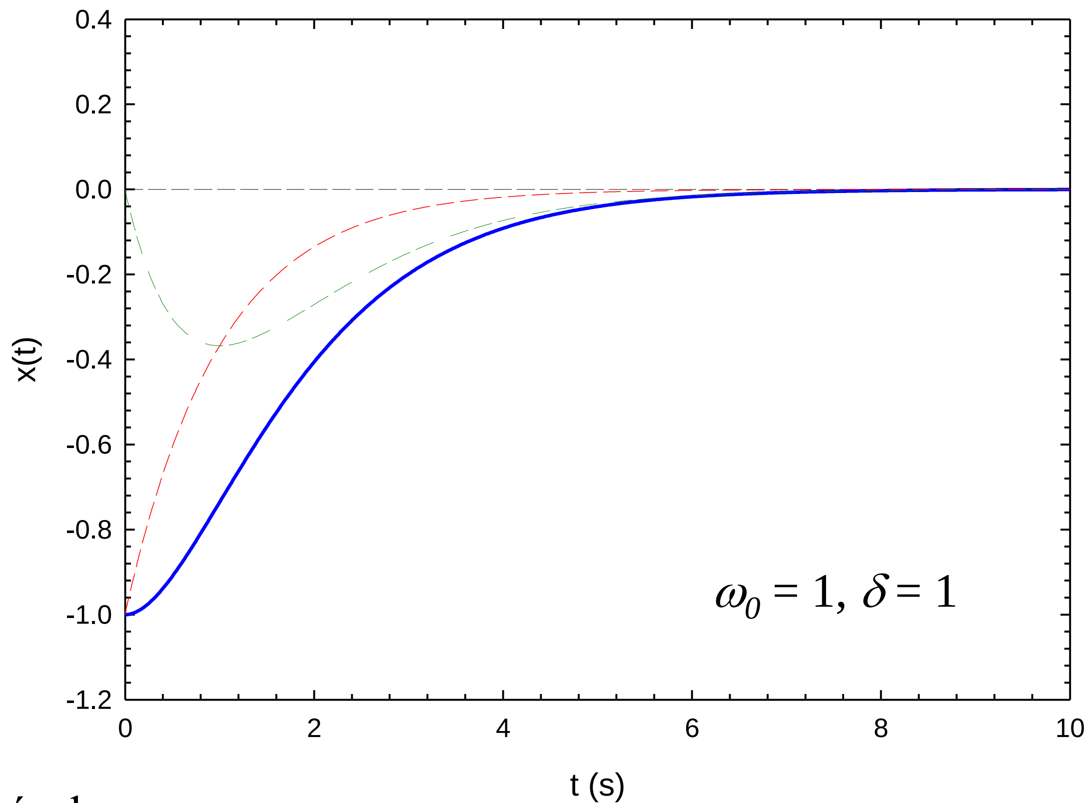
Tlumené kmity – mezní aperiodický pohyb

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}}$$

mezní aperiodický pohyb: $D = 0$

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -\delta$$



konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek:

např. $x(0) = -a \qquad C_1 = -a$

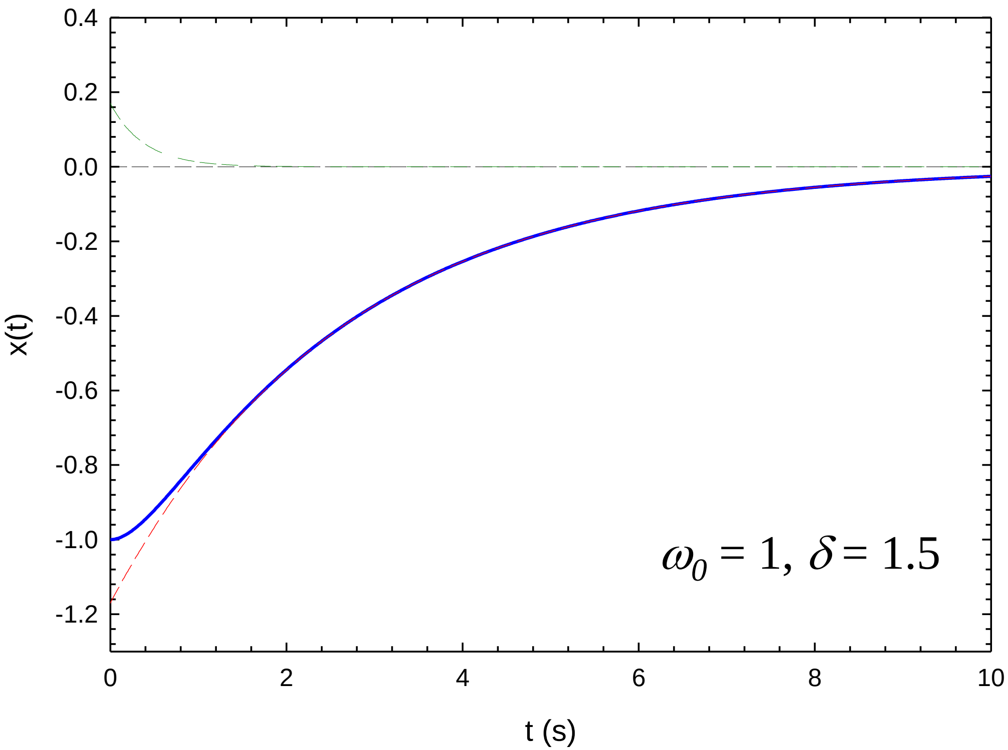
$$C_2 = a\alpha$$

$$\dot{x}(0) = 0 \qquad C_1\alpha + C_2 = 0$$

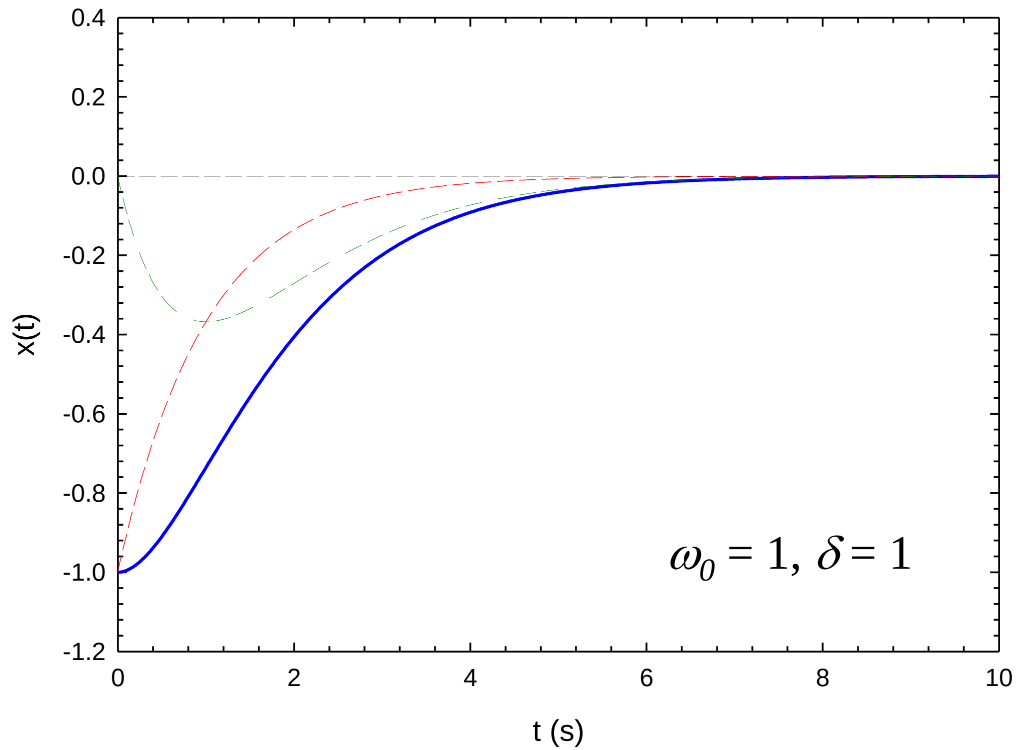
$$x = -ae^{-\delta t} - a\delta t e^{-\delta t}$$

Tlumené kmity

aperiodický pohyb



mezní aperiodický pohyb



Komplexní čísla

- **přirozená čísla**

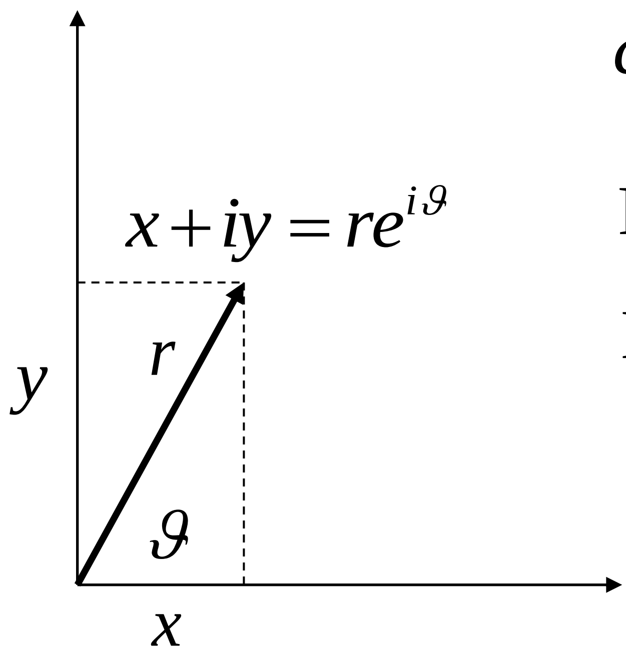
algebraická operace		inverzní operace	
• sčítání	$a + x = c$	$x = c - a$	→ ***celá čísla***
• násobení	$ax = c$	$x = \dfrac{c}{a}$	→ ***racionální čísla***
• umocňování	$x^a = c$	$x = \sqrt[a]{c}$	→ ***iracionální čísla***
			→ ***komplexní čísla***
• umocňování	$a^x = c$	$x = \log_a c$	

↓

stačí pro řešení všech algebraických rovnic

Komplexní čísla

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$



$$c = x + iy = re^{i\vartheta} = r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta$$

$$\mathrm{Re}\{c\} = x = r\cos\vartheta$$

$$\mathrm{Im}\{c\} = y = r\sin\vartheta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{y}{x}$$

Tlumené kmity – tlumený harmonický pohyb

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}}$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

tlumený harmonický pohyb: $D < 0$

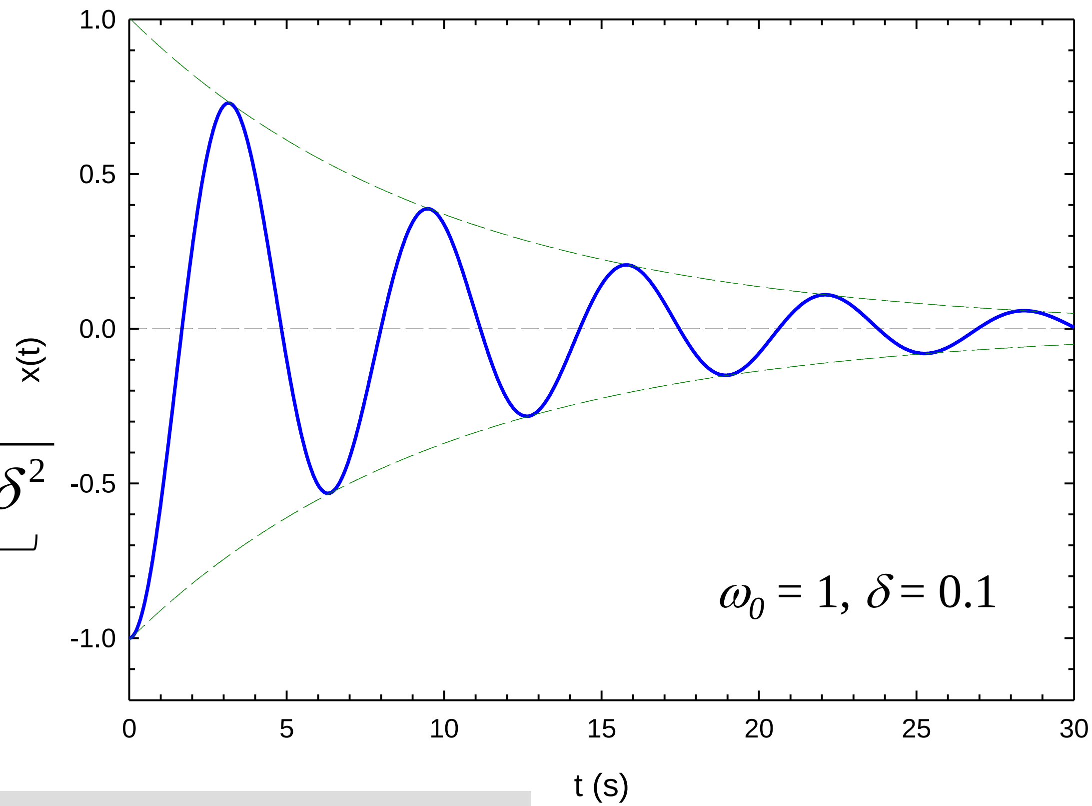
$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{\omega}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

$$x = C_1 e^{-\delta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$$

$$x = e^{-\delta t}\left(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= C_1 + C_2 \\ D_2 &= i\left(C_1 - C_2\right) \end{aligned}\right\} \quad C_2 = C_1^*$$



$$x = Ae^{-\delta t}\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

Konstanty A, φ určíme z počátečních podmínek:

např. $x(0) = -a$

$\dot{x}(0) = 0$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega}{\delta} \qquad A = -\frac{a}{\sin\varphi}$$

Harmonický oscilátor – komplexní reprezentace

harmonický kmit: $x = A\sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow Ae^{i(\omega t+\varphi)}$

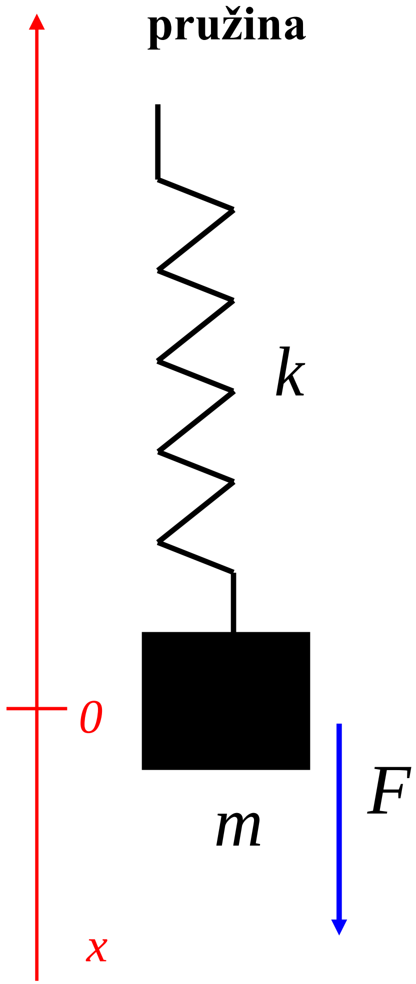
amplituda úhlová frekvence fázový posuv

$$Ae^{i(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi)$$

$$Ae^{i(\omega t+\varphi)} = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t} = \hat{A}e^{i\omega t}$$

komplexní amplituda

Nucené kmity



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

pohybová rovnice

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}}$$

- budící síla: $F = F_0 \sin(\Omega t) = F_0 e^{i\Omega t}$
- obecné řešení: $x = A\sin(\omega t + \varphi) + x_p$
- partikulární řešení: $\boldsymbol{x_p} = \hat{x}_p e^{i\Omega t}$

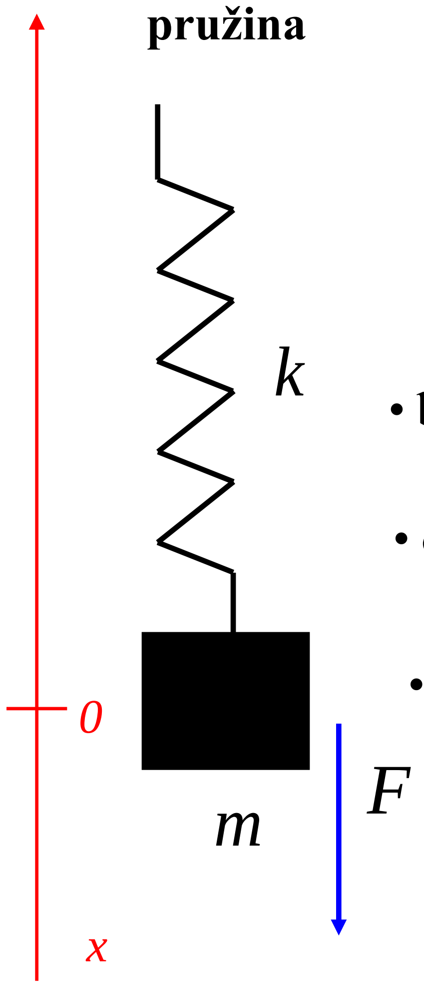
komplexní amplituda

partikulární řešení:

$$\boxed{\hat{x}_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}}$$

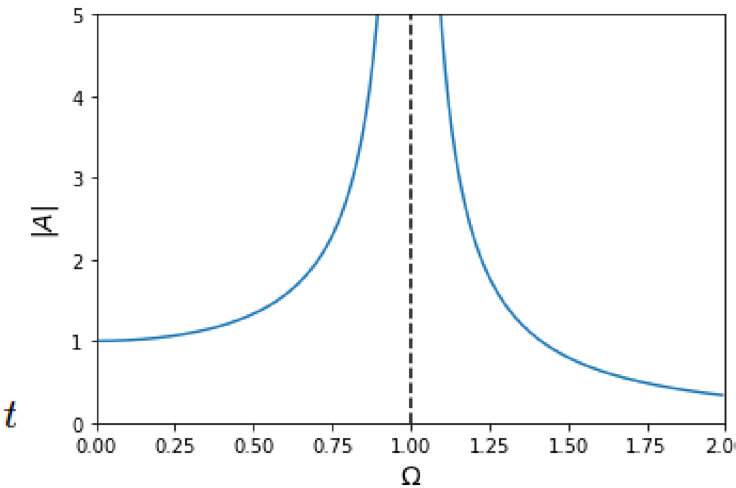
$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t)$$

Nucené kmity



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$



- budící síla: $F = F_0 \sin(\Omega t) = F_0 e^{i\Omega t}$
- obecné řešení: $x = A\sin(\omega t + \varphi) + x_p$
- partikulární řešení: $\boldsymbol{x_p} = \hat{x}_p e^{i\Omega t}$

komplexní amplituda

partikulární řešení:

$$\boxed{\hat{x}_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}}$$

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t)$$