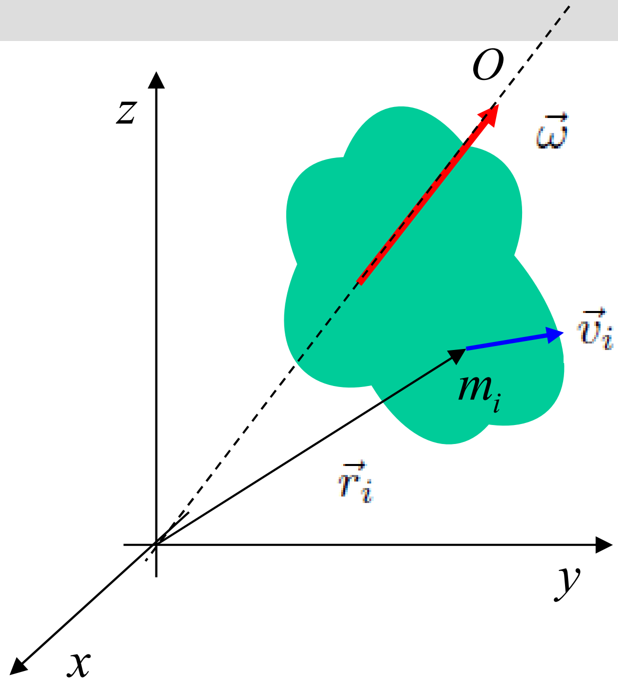
Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose otáčení

- otáčení kolem obecné osy *O*
- kinetická energie tělesa



$$E_k = \frac{1}{2} J_o \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left| \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right|^2$$

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \qquad \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i \left[(\omega_y z_i - \omega_z y_i)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)^2 + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)^2 \right]$$

$$E_k = \frac{1}{2}\omega_x^2 J_{xx} + \frac{1}{2}\omega_y^2 J_{yy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 J_{zz} - \omega_x \omega_y D_{xy} - \omega_y \omega_z D_{yz} - \omega_x \omega_z D_{xz}$$

Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose otáčení

$$E_k = \frac{1}{2}\omega_x^2 J_{xx} + \frac{1}{2}\omega_y^2 J_{yy} + \frac{1}{2}\omega_z^2 J_{zz} - \omega_x\omega_y D_{xy} - \omega_y\omega_z D_{yz} - \omega_x\omega_z D_{xz} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$$

• momenty vůči souřadnicovým osám *x,y,z*

$$J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2)$$

$$J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

• deviační momenty

$$D_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i$$

$$D_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i$$

$$D_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i$$

• **tenzor momentu setrvačnosti**

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Tenzory

- zobecnění skalárů a vektorů
- počet indexů → řád tenzoru

		komponenta	řád tenzoru	počet komponent
skalár	a	a	0	1
vektor	$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$	a_i	1	3
tenzor 2. řádu	$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$a_{i,j}$	2	9
tenzor 3. řádu	$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{112} & a_{122} & a_{132} \\ a_{212} & a_{222} & a_{232} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{pmatrix}$	$a_{i,j,k}$	3	27
...	...	...	...	...

Tenzory

• zobecnění skalárů a vektorů

• počet indexů → řád tenzoru

• transformace souřadnic $x'_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j$ $\qquad \mathbf{X}' = \mathbf{AX}$

• vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

• vektory se transformují jako souřadnice $u'_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} u_j$ $\qquad \mathbf{U}' = \mathbf{AU}$

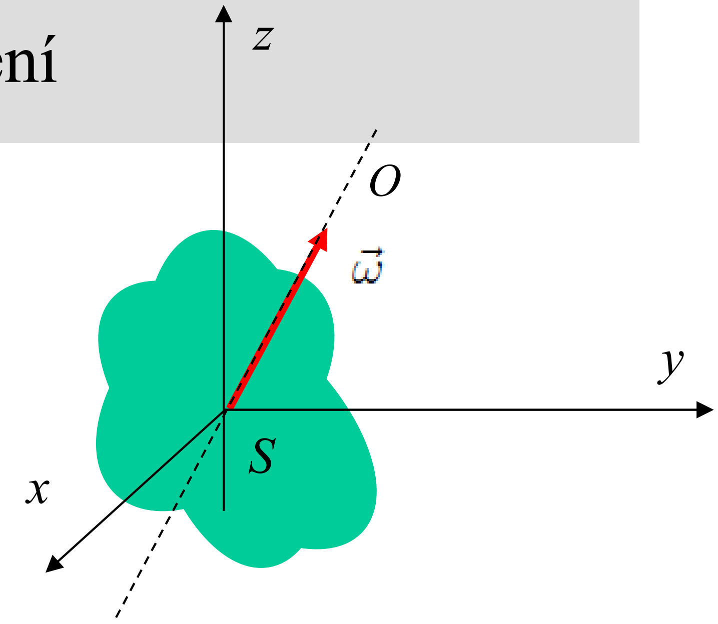
$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} v_j \qquad \mathbf{V}' = \mathbf{AV}$$

• veličina obsahující součiny komponent dvou vektorů $t_{ij} = u_i v_j$

$$t'_{ij} = u'_i v'_j = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} A_{ik} A_{jl} u_k v_l = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} A_{ik} A_{jl} t_{kl} \qquad \mathbf{T}' = \mathbf{ATA}^{\mathrm{T}}$$

• tenzor 2. řádu se transformuje jako součin komponent 2 vektorů

Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose otáčení



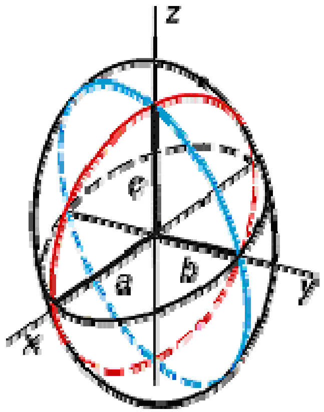
- **tenzor momentu setrvačnosti**

  vyjádřený vzhledem k bodu S

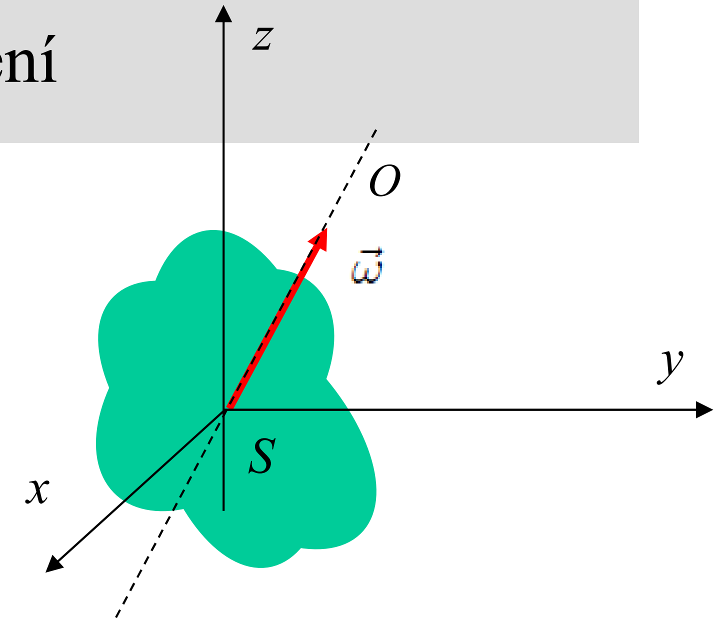
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

- **moment setrvačnosti je symetrický tenzor 2. řádu** $J_{ij} = J_{ji}$

- geometrické znázornění – elipsoid



Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose otáčení



- **tenzor momentu setrvačnosti**

  vyjádřený vzhledem k bodu S

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

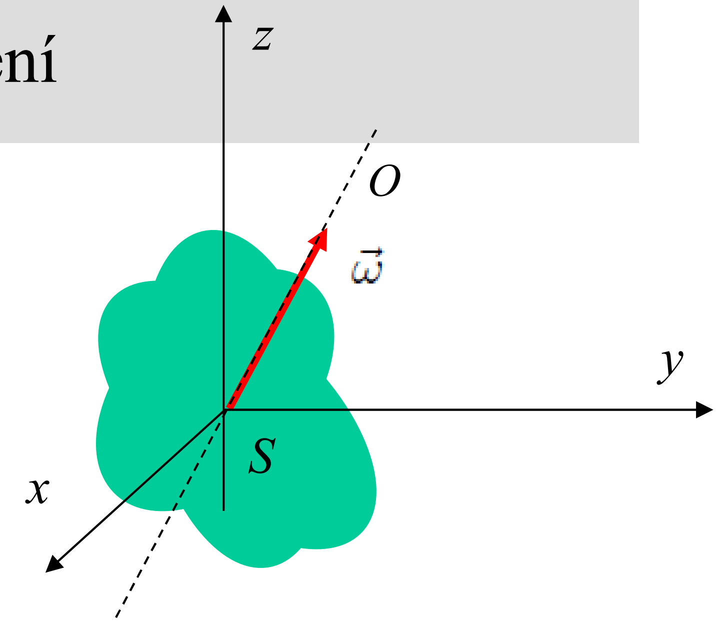
- **osa otáčení O** $\quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

Jednotkový vektor ve směru osy otáčení: $\vec{\nu} = \dfrac{\vec{\omega}}{\omega} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$

Moment setrvačnosti vůči ose otáčení O:

$$J = (\nu_x, \nu_y, \nu_z) \begin{pmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{pmatrix} = \nu_x^2 J_{xx} + \nu_y^2 J_{yy} + \nu_z^2 J_{zz} - 2\nu_x \nu_y D_{xy} - 2\nu_y \nu_z D_{yz} - 2\nu_x \nu_z D_{xz}$$

Moment setrvačnosti vzhledem k obecné ose otáčení



• **tenzor momentu setrvačnosti**

vyjádřený vzhledem k bodu S

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

• **osa otáčení O** $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

sloupcový vektor $\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{pmatrix}$

Jednotkový vektor ve směru osy otáčení: $\vec{\nu} = \dfrac{\vec{\omega}}{\omega} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$

Moment setrvačnosti vůči ose otáčení O:

$$J_o = (\nu_x, \nu_y, \nu_z) \begin{pmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{J}\, \boldsymbol{\nu}$$

Tenzor momentu setrvačnosti

• směrové kosiny $\nu_x = \cos\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}$ $\quad \nu_y = \cos\beta = \frac{\omega_y}{\omega}$ $\quad \nu_z = \cos\gamma = \frac{\omega_z}{\omega}$

$$J_o = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\cos^2\beta + J_{zz}\cos^2\gamma - 2D_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2D_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2D_{xz}\cos\alpha\cos\gamma$$

• pokud zvolíme jako souřadnicové osy hlavní osy tělesa jsou deviační momenty nulové

• tenzor momentu setrvačnosti

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Tenzor momentu setrvačnosti

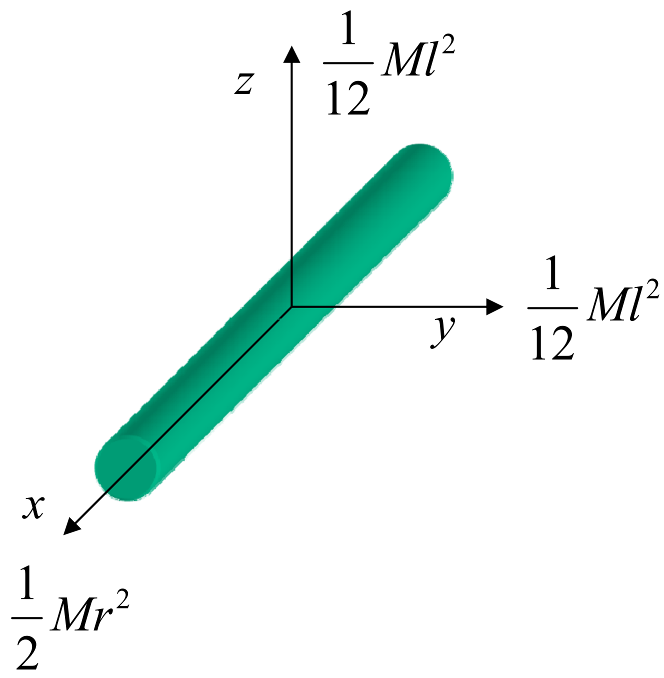
• **hlavní osy tělesa**

• každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
- *J* vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
- *J* vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem

• př. tyč délky *l* a kruhového průřezu o poloměru *r*

• tenzor momentu setrvačnosti

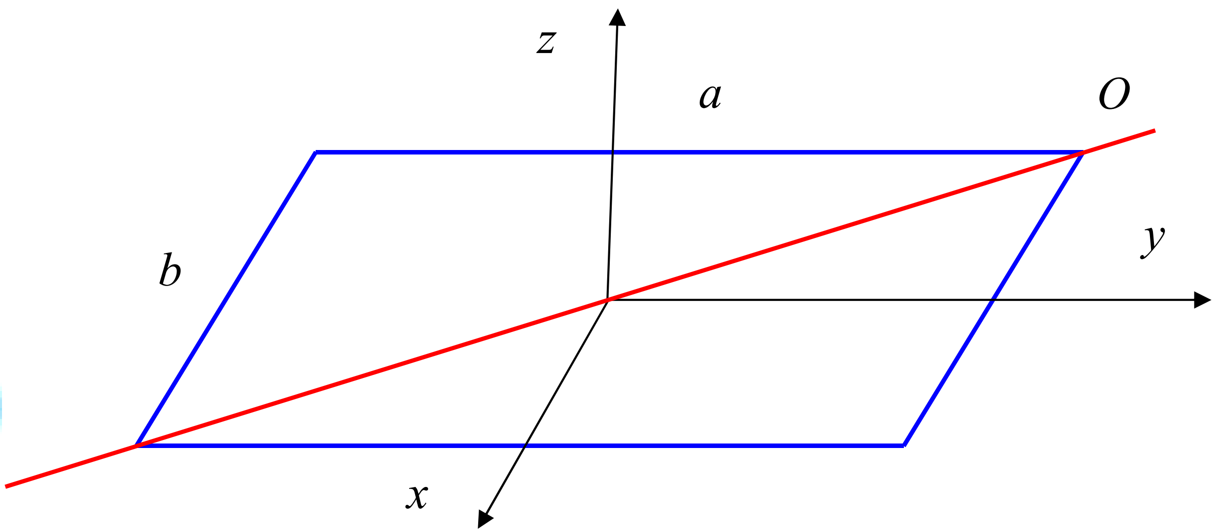
$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}Ml^2 \end{pmatrix}$$



Tenzor momentu setrvačnosti

• obdélník se stranami *a*, *b*

• hlavní osy



• tenzor momentu setrvačnosti

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

• moment setrvačnosti pro otáčení okolo úhlopříčky

$$J_o = \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{J}\, \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{a^2+b^2}(-b, a, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{12}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}M\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Pohyb tuhého tělesa

• *Chaslesův teorém*

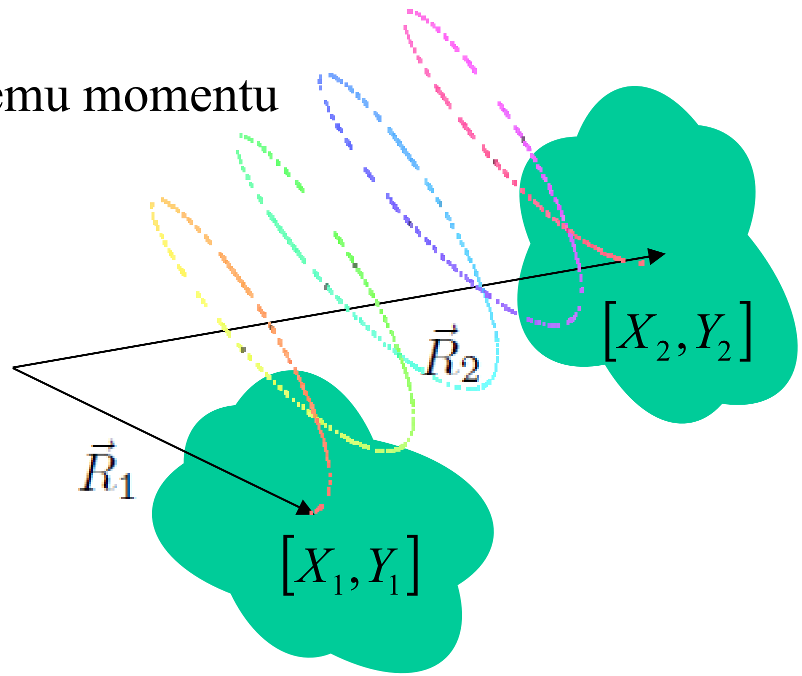
Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z rotace kolem osy a translace podél této osy

• hmotný střed se pohybuje jako hmotný bod v němž se soustředěna celá hmotnost tělesa a na který působí výslednice všech vnějších sil

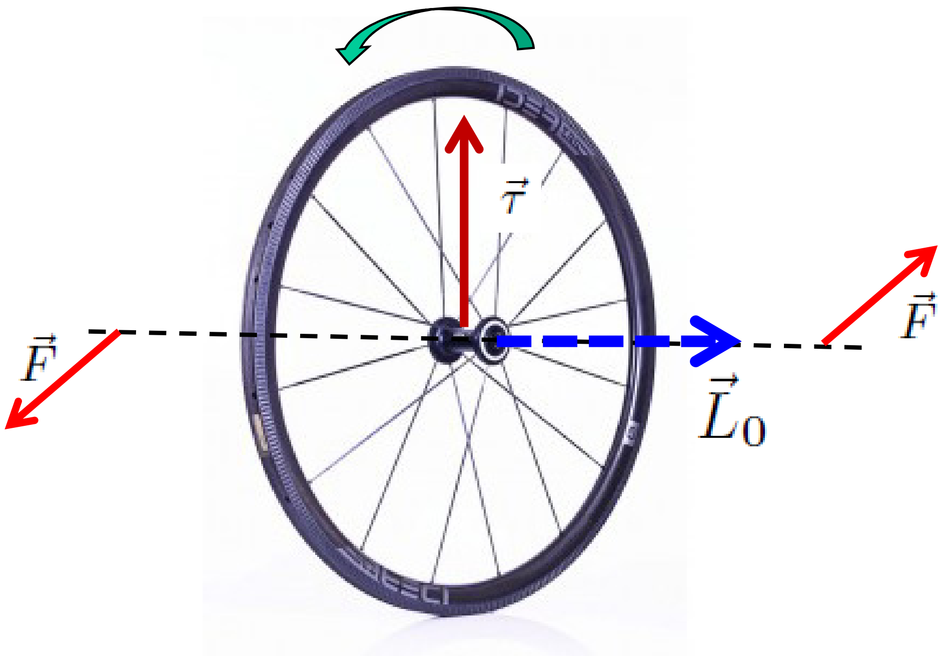
$$\vec{F}^E = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$ (*1. impulsová věta*)

• časová změna momentu hybnosti soustavy je rovna výslednému momentu vnějších sil (počítanému vzhledem ke stejnému bodu)

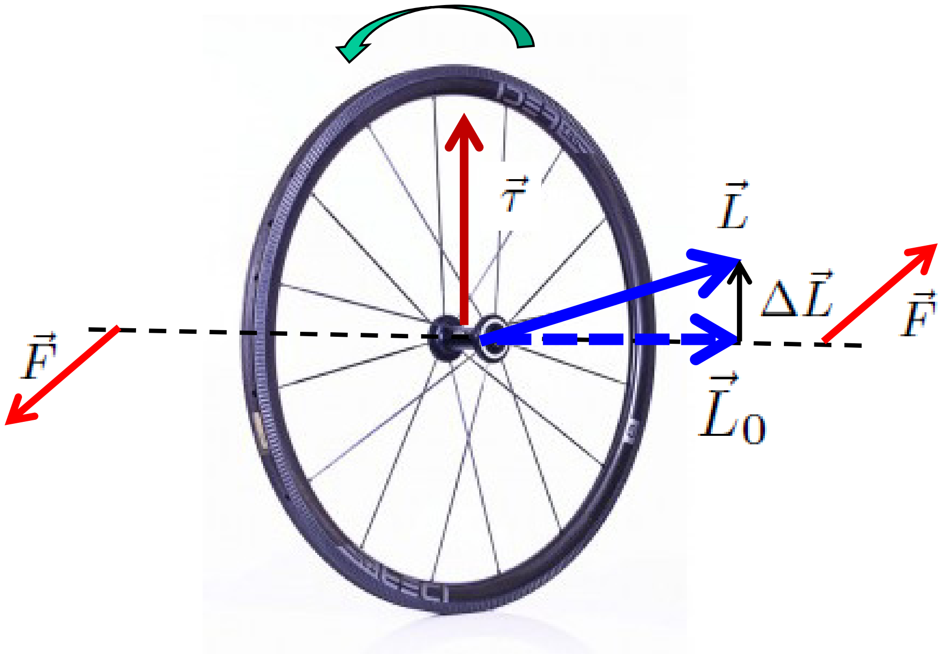
$$\vec{\tau}^E = J\vec{\varepsilon} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ (*2. impulsová věta*)



Setrvačník

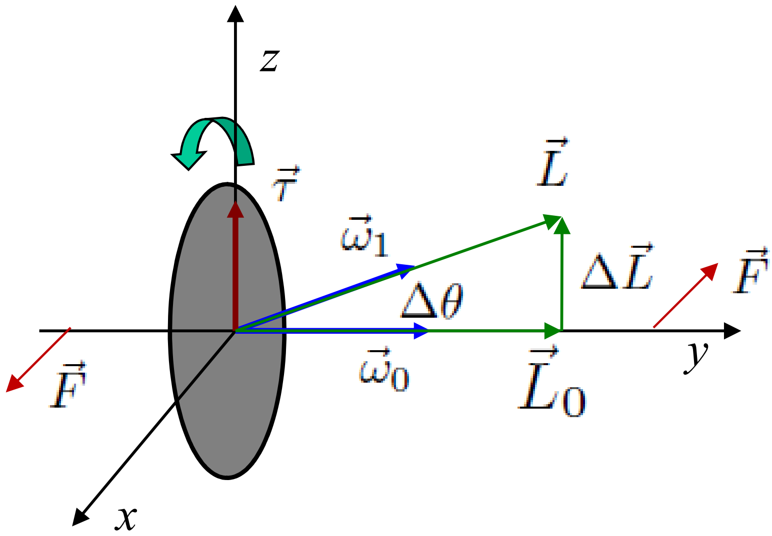


Setrvačník

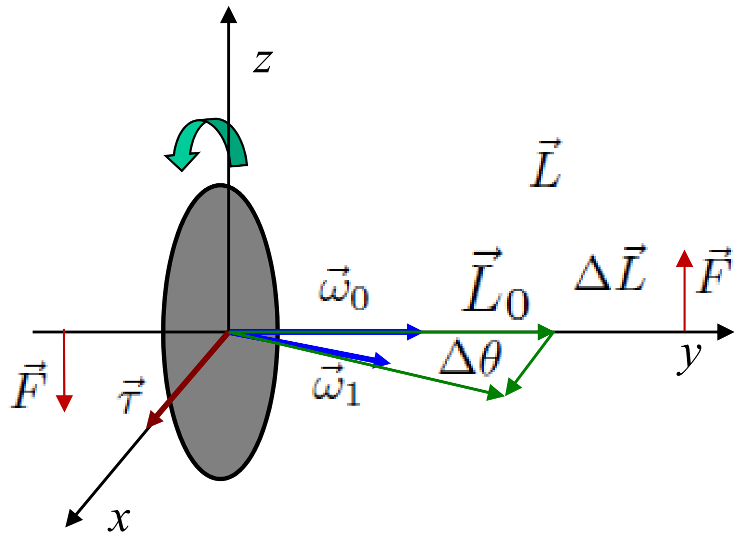


$$\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$

Setrvačník

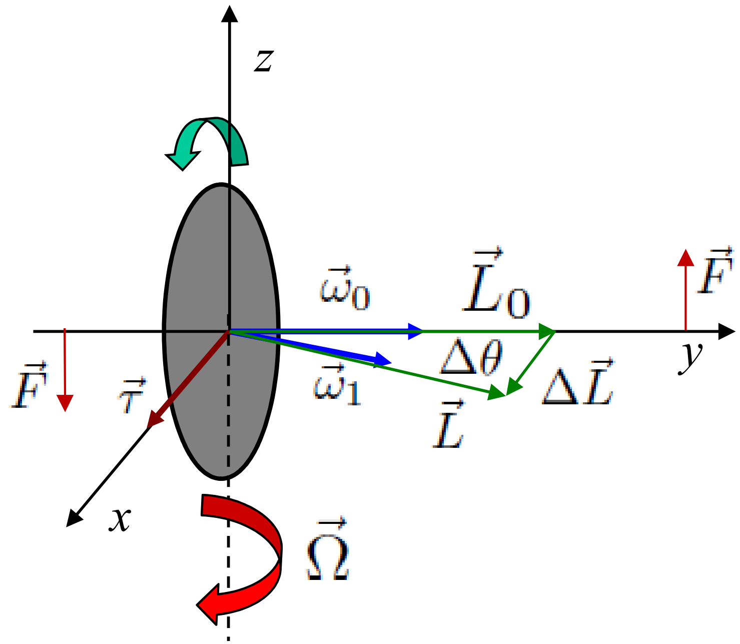


z
$\vec{\tau}$
$\vec{L}$
$\vec{\omega}_1$
$\Delta\vec{L}$
$\Delta\theta$
$\vec{F}$
$\vec{F}$
$\vec{\omega}_0$
$\vec{L}_0$
y
x



z
$\vec{L}$
$\vec{\omega}_0$
$\vec{L}_0$
$\Delta\vec{L}$
$\vec{F}$
$\Delta\theta$
$\vec{F}$
$\vec{\tau}$
$\vec{\omega}_1$
y
x

Setrvačník



• změna momentu hybnosti: $\Delta L = L_0 \Delta\theta$ (za předpokladu že $L_0 >> \Delta L$)

• moment síly: $\tau = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} = L_0 \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = L_0 \Omega$

• moment síly: $\vec{\tau} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_0$

úhlová rychlost precese

Setrvačník

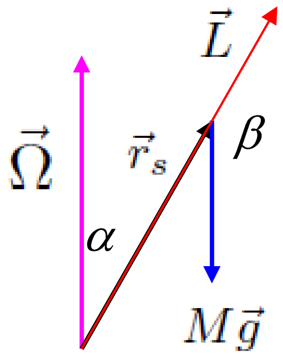
• 2. impulsová věta: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^E = \vec{r}_s \times M\vec{g}$$

$$\vec{\tau}^E = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

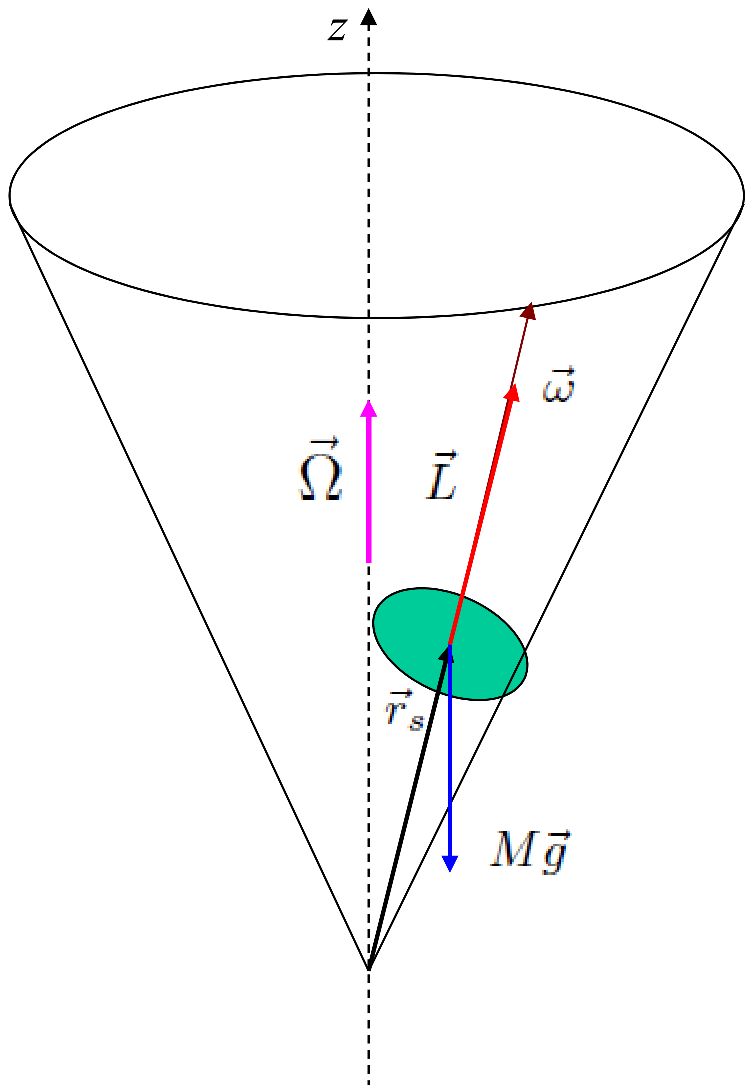
$$\vec{r}_s \times M\vec{g} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

$$M r_s g \sin\beta = \Omega L \sin\alpha$$

$$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \sin\beta = \sin\alpha$$



• precesní rychlost $$\boxed{\Omega = \frac{r_s M g}{L} = \frac{r_s M g}{J_s \omega}}$$



Setrvačník

- volný setrvačník (gyroskop)
- nulový moment vnějších sil
- osa rotace je stálá