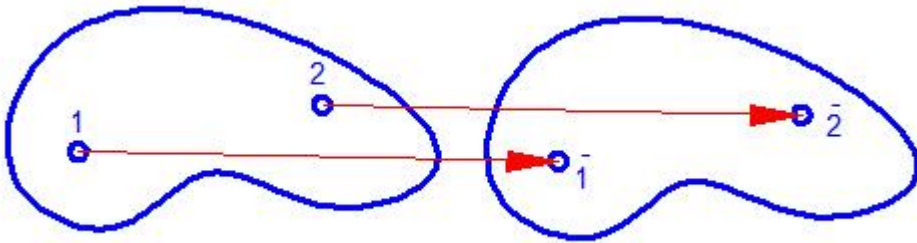


Otáčení a posunutí

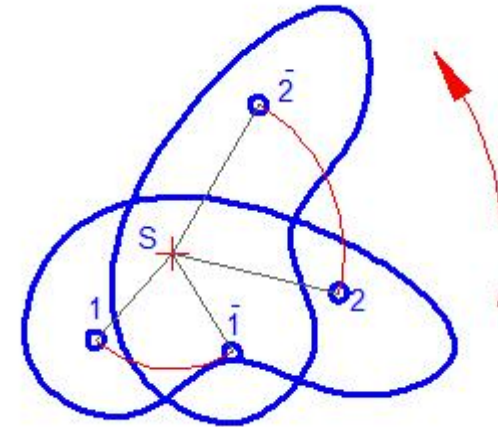
posunutí (translace)

- všechny body tělesa se pohybují po rovnoběžných trajektoriích



otočení (rotace)

- všechny body tělesa se pohybují po kružnicích okolo osy otáčení



Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- práce: $\Delta W = \vec{F} \Delta \vec{s}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (xF_y - yF_x) \Delta \varphi$$

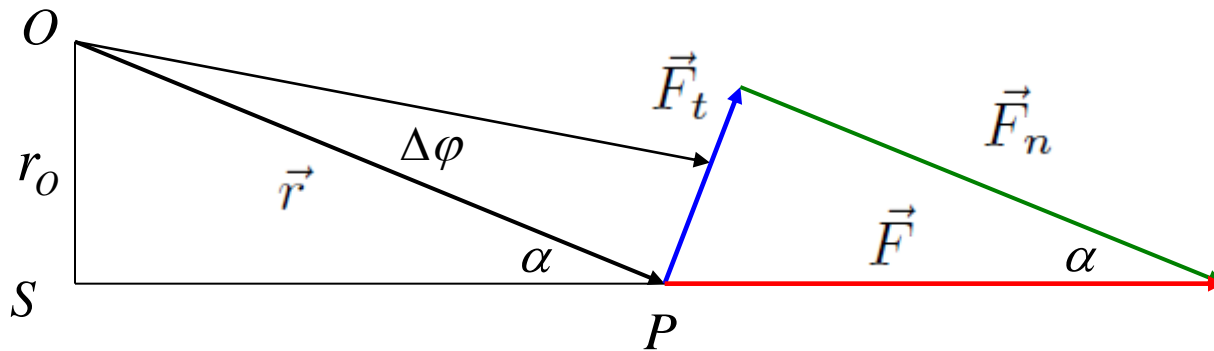
moment síly: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment síly

moment síly: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\tau = rF_t = rF \sin \alpha = r_O F$$

r_O – rameno síly



Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- 2. Newtonův zákon: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\tau = xF_y - yF_x = mx \frac{d^2y}{dt^2} - my \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(mx \frac{dy}{dt} - my \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \underbrace{(xp_y - yp_x)}$$

moment hybnosti: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$

moment hybnosti L

Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$

- 2. Newtonův zákon $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$

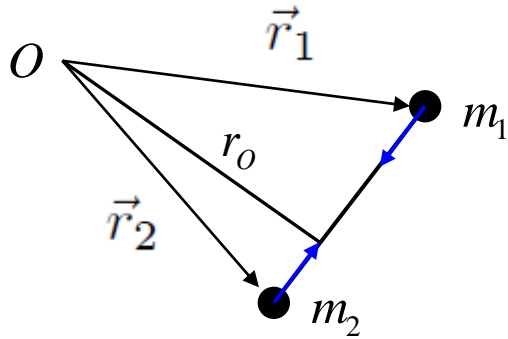
- moment hybnosti $L = xp_y - yp_x$

- 2. Newtonův zákon $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Celkový moment hybnosti

celkový moment síly:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



2. impulsová věta:
$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Rychlost změny celkového momentu hybnosti vzhledem ke kterékoliv ose je rovna celkovému momentu vnějších sil vzhledem k téže ose.

Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- hybnost p

- 2. Newtonův zákon $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$

- moment hybnosti $L = xp_y - yp_x$

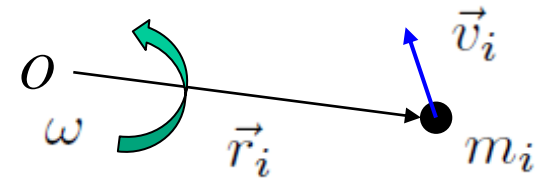
- 2. Newtonův zákon $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Moment setrvačnosti

hmotný bod: m_i $[x_i, y_i]$

moment hybnosti: $L_i = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega$

součet pro všechny hmotné body: $L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = J \omega$



moment setrvačnosti: $J = \sum_i m_i r_i^2$

Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- hybnost p

- 2. Newtonův zákon $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

- hmotnost m

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$

- moment hybnosti $L = xp_y - yp_x$

- 2. Newtonův zákon $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- moment setrvačnosti J

Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

- hybnost p $\vec{p} = m\vec{v}$

- 2. Newtonův zákon $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

- hmotnost m

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

- moment hybnosti $L = xp_y - yp_x$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

- 2. Newtonův zákon $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- moment setrvačnosti J

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

Moment setrvačnosti

- moment setrvačnosti tyče délky l
- pro osu otáčení na kraji

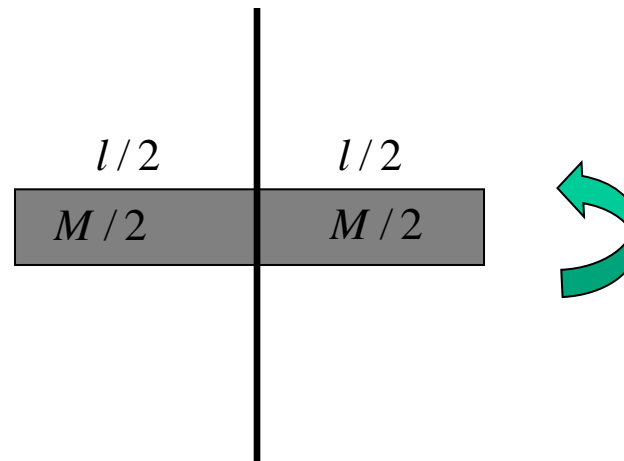
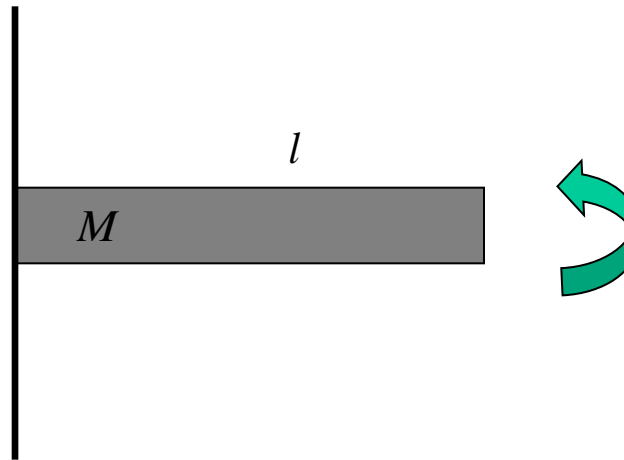
$$J = \int x^2 dm = \rho S \int_0^l x^2 dx$$

$$J = \frac{1}{3} M l^2$$

- moment setrvačnosti tyče délky l
- pro osu otáčení ve středu tyče

$$J = \int x^2 dm = 2\rho S \int_0^{l/2} x^2 dx$$

$$J = \frac{1}{12} M l^2$$



Steinerova věta (rovnoběžné osy)

- moment setrvačnosti pro osu O
- x -ová souřadnice i -té částice

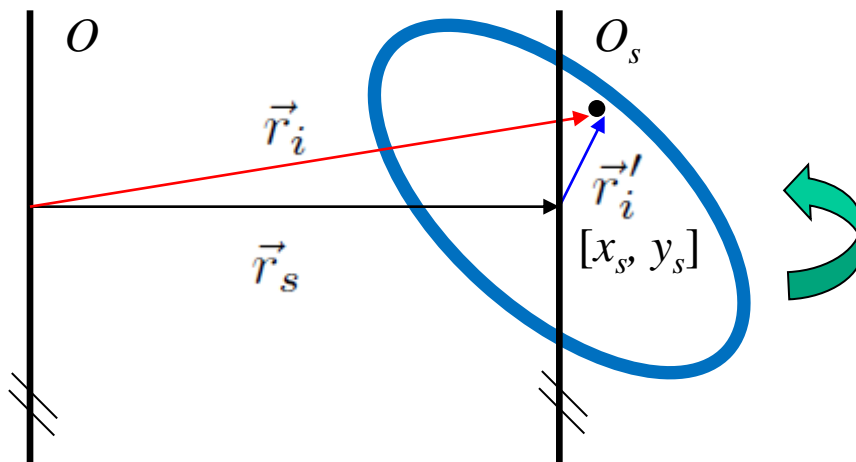
$$x_i = x'_i + x_s$$

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i x_i'^2 + M x_s^2$$

$$J = J_s + M r_s^2$$

moment setrvačnosti
vůči rovnoběžné ose otáčení O_s
procházející hmotným středem

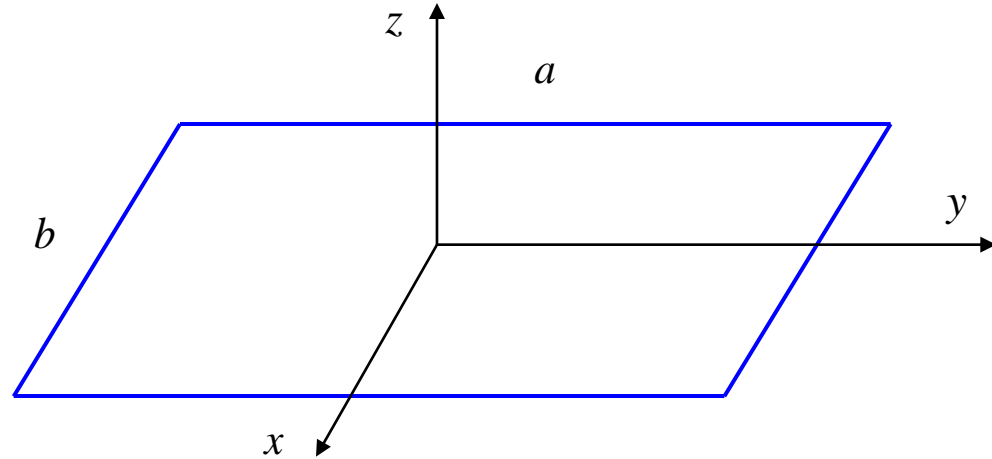
moment setrvačnosti hmotného středu
vzhledem k ose O



Moment setrvačnosti (kolmé osy)

- rovinný obrazec
- osa otáčení z kolmá k rovině obrazce

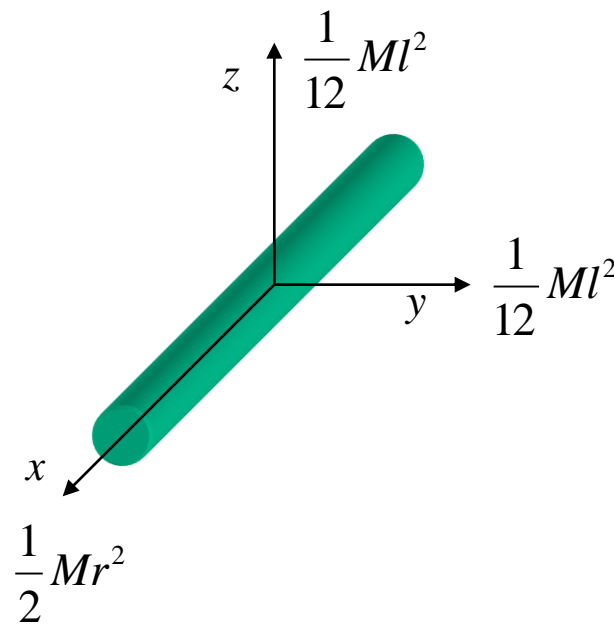
$$J_z = J_x + J_y$$



- př. obdélník o stranách a, b , osa otáčení prochází středem: $J_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$

Moment setrvačnosti

- **hlavní osy tělesa**
- každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
 - J vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
 - J vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
- př. tyč délky l a kruhového průřezu o poloměru r



Rotační kinetická energie

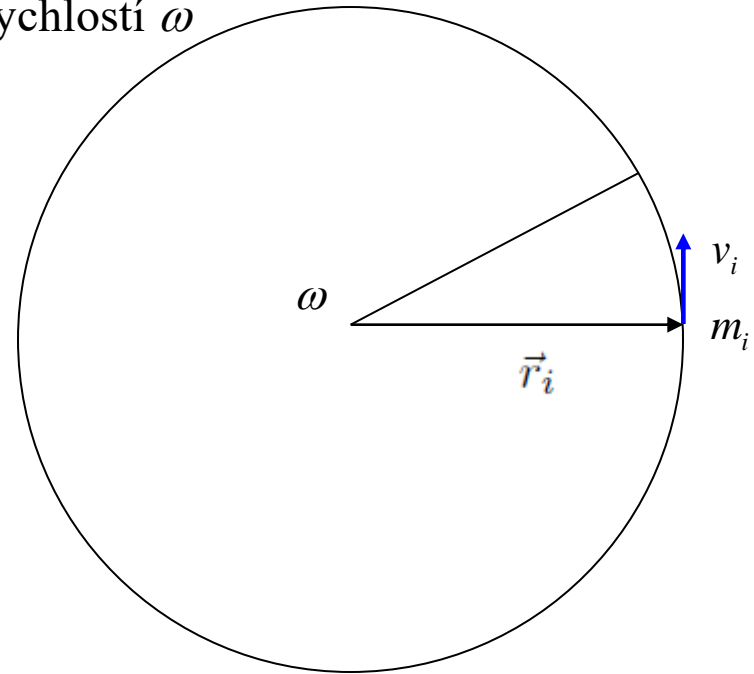
- částice rotují kolem společné osy otáčení s úhlovou rychlostí ω
- kinetická energie i -té částice

$$E_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i \omega^2 r_i^2$$

- celková kinetická energie tělesa

$$E = \sum_i E_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$



- Königova věta: celková energie soustavy hmotných bodů je rovna součtu kinetické energie hmotného středu soustavy a vnitřní kinetické energie (tj. kinetická energie relativního pohybu částic soustavy vzhledem k hmotnému středu)

Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ $\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

- hybnost p $\vec{p} = m\vec{v}$

- 2. Newtonův zákon $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

- hmotnost m

- kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

- 1. Impulsová věta $\vec{F}^E = \frac{d\vec{P}}{dt}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

- moment hybnosti $L = xp_y - yp_x$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

- 2. Newtonův zákon $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- moment setrvačnosti J

- kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

- 2. Impulsová věta $\vec{\tau}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti

- 1. impulzová věta $\vec{F}^E = \frac{d\vec{P}}{dt}$

- je-li výslednice vnějších sil nulová:

$$\vec{F}^E = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{konst.}$$

zákon zachování hybnosti

- důsledek symetrie fyzikálních zákonů vůči posunutí v prostoru

- 2. impulzová věta $\vec{\tau}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- je-li celkový moment vnějších sil nulový:

$$\vec{\tau}^E = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$$

zákon zachování momentu hybnosti

- důsledek symetrie fyzikálních zákonů vůči otočení v prostoru

- analogie zákona zachování hybnosti pro případ rotace

Valení po nakloněné rovině

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad (2. \text{ impulsová věta})$$

$$F_t R = J \frac{d\omega}{dt}$$

za jednu otočku: dráha $s = 2\pi R$

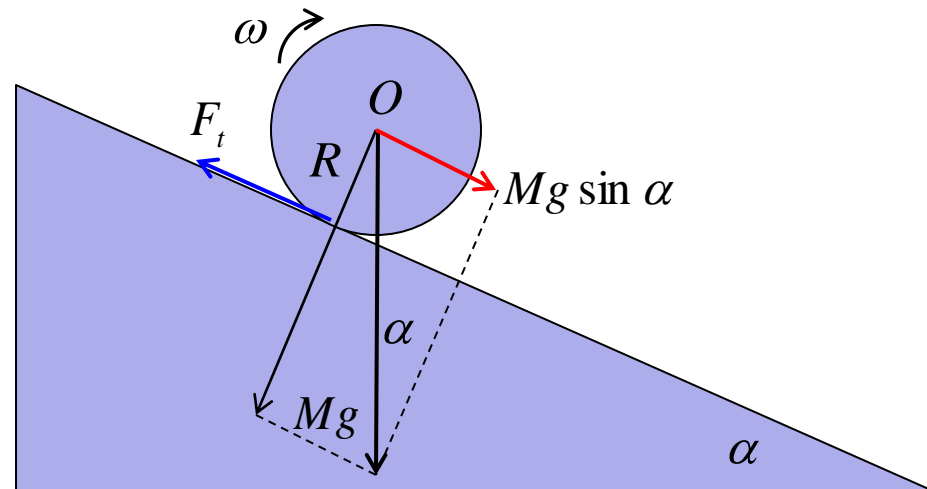
$$\text{čas } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

rychlost hmotného středu $v_s = \frac{s}{T} = \omega R$

$$F_t R = J \frac{d\omega}{dt} = \frac{J}{R} \frac{dv_s}{dt} = \frac{J}{R} a_s \quad \leftarrow \text{zrychlení hmotného středu}$$

$$F_t = \frac{J}{R^2} a_s$$

homogenní válec: $J = \frac{1}{2} M R^2 \rightarrow a_s = \frac{g \sin \alpha}{1 + 1/2} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$

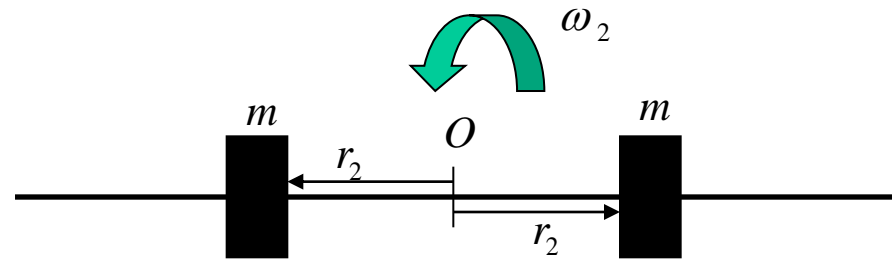
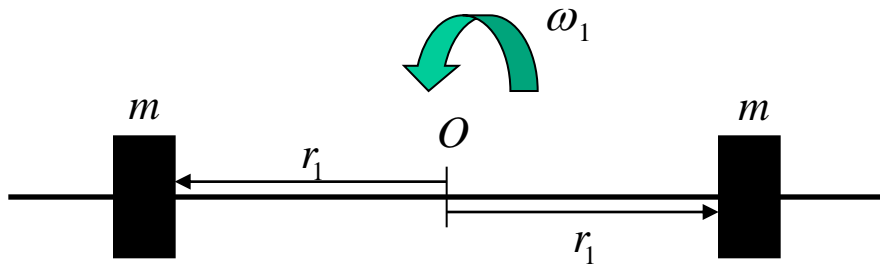


$$F = \frac{dP}{dt} \quad (1. \text{ impulsová věta})$$

$$Mg \sin \alpha - F_t = M a_s$$

$$a_s = \frac{Mg \sin \alpha}{M + J/R^2}$$

Zákon zachování momentu hybnosti



- moment setrvačnosti: $J = 2mr^2$
- zákon zachování momentu hybnosti: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$
- zde konkrétně: $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$
- kinetická energie: $\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = mr_1^2\omega_1^2$
 $\frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = mr_2^2\omega_2^2$

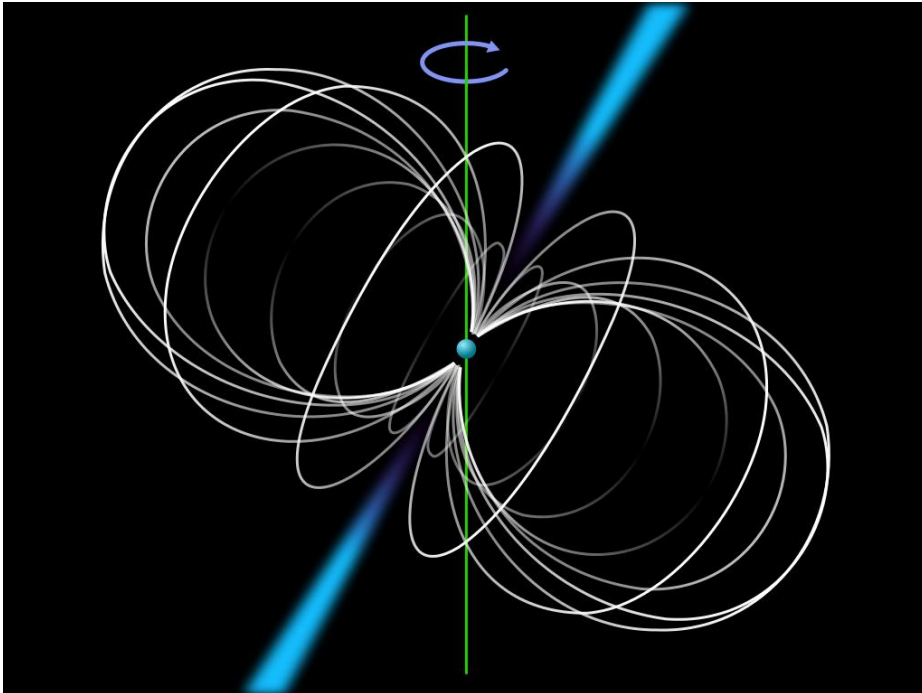
• jestliže platí $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$

• nemůže současně platit ~~$J_1\omega_1^2 = J_2\omega_2^2$~~

• **při přesunutí otáčejících se závaží se koná práce**

Neutronová hvězda

- hmotnost $\sim 1.5 M_{\text{Slunce}}$
- průměr ~ 30 km
- perioda rotace \sim ms



*pulsar v Krabí mlhovině
pozůstatek supernovy SN 1054*