

Soustava hmotných bodů

Těleso – soustava hmotných bodů

Tuhé těleso - pevný předmět jehož rozměry se nemění

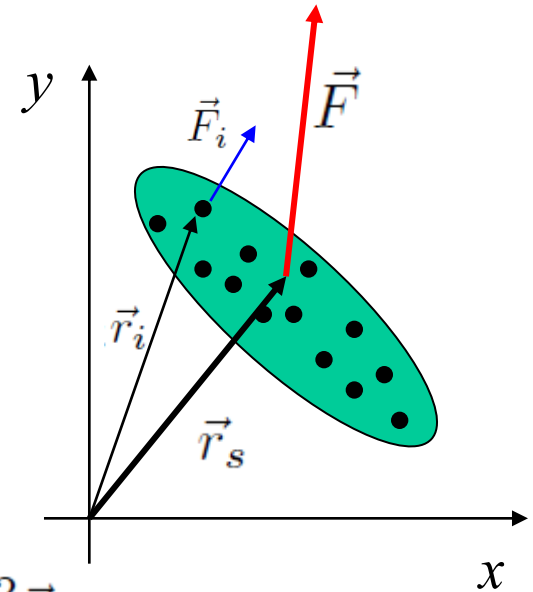
- každé těleso se skládá z mnoha částic

- síla působící na i -tou částici $\vec{F}_i = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$

- výsledná síla působící na soustavu $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$

- výsledná síla $\vec{F} = M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2}$

- hmotný střed $\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ $M = \sum_i m_i$



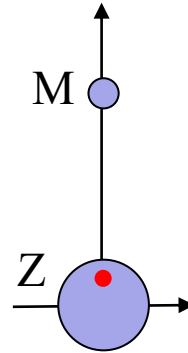
Hmotný střed

• hmotný střed $\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$m_1 = m_2 \rightarrow x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



$$x_s = (1 \times 0 + 0.0123 \times 394 \times 10^3) / 1.0123 = 4880 \text{ km}$$

• Země-Měsíc:

$$m_1 = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$m_2 = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg} = 0.0123 m_1$$

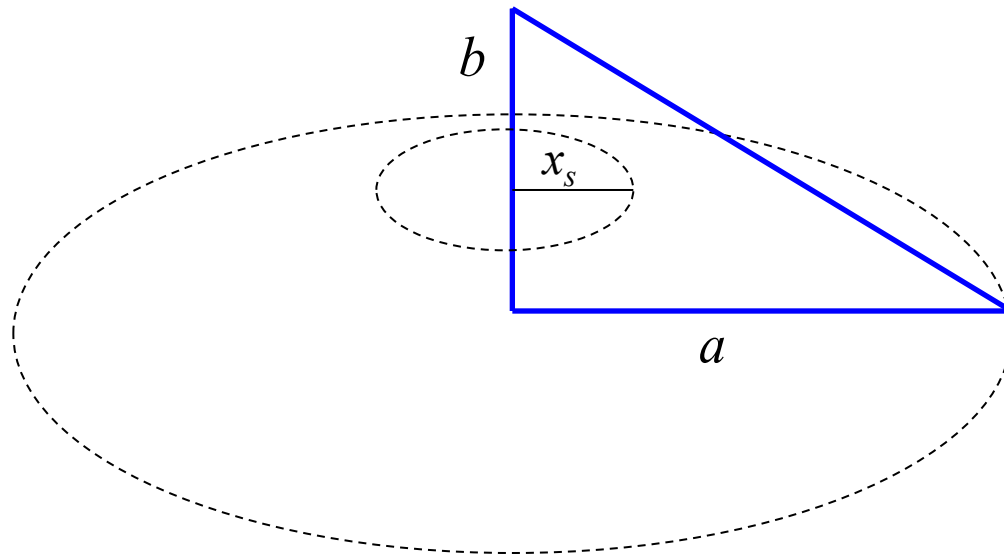
střední vzdálenost Země – Měsíc:
 $394 \times 10^3 \text{ km}$ (vzdálenost středů)

$\approx 1500 \text{ km}$ pod povrchem Země

Hmotný střed

- hmotný střed $\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

- Pappova věta



$$2\pi x_s \frac{1}{2} ab = \frac{1}{3} \pi a^2 b$$

$$x_s = \frac{a}{3}$$

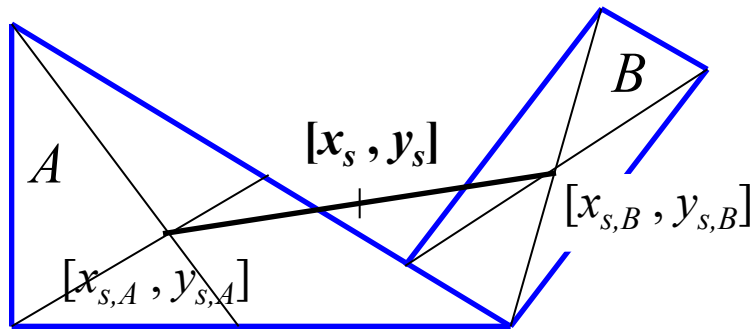
$$y_s = \frac{b}{3}$$

Hmotný střed

• hmotný střed $\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

$$Mx_s = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A x_{s,A} + M_B x_{s,B}$$

$$My_s = \sum_A m_i y_i + \sum_B m_i y_i = M_A y_{s,A} + M_B y_{s,B}$$



Soustava hmotných bodů

- síla působící na i -tou částici $\vec{F}_i = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{j'} \vec{F}_{i,j}^I$$

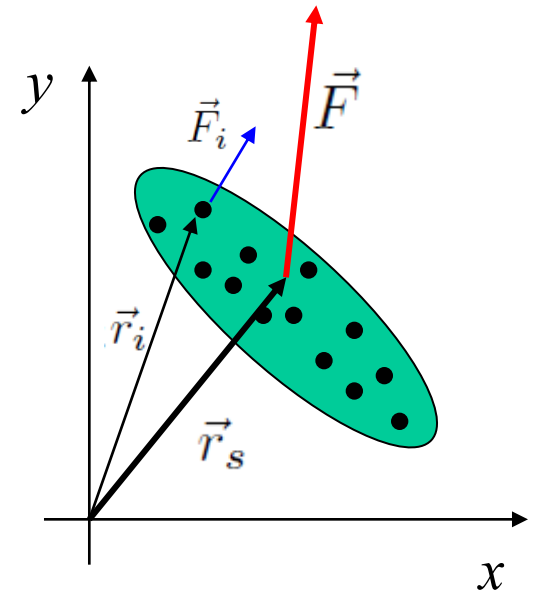
výslednice
vnějších sil
působících
na i -tý bod

vnitřní síly, kterými působí
 j -tý hmotný bod na i -tý

$$\vec{F}_{i,i} = 0$$

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$$

3. Newtonův zákon



- celková hybnost soustavy $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

1. impulsová věta $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^E = M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

výslednice
vnějších sil

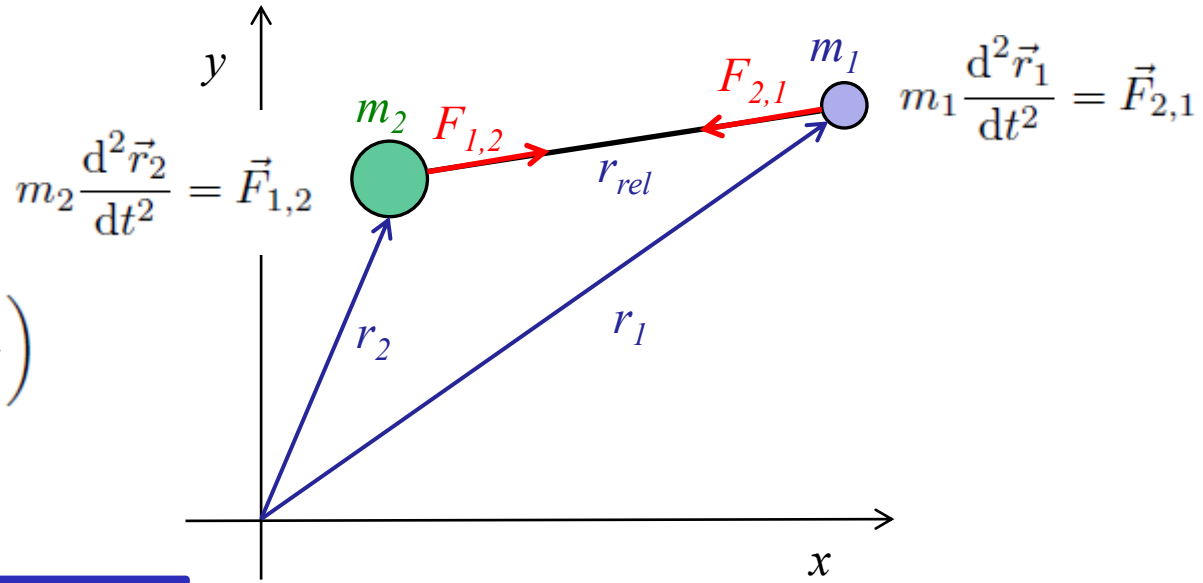
Časová derivace celkové hybnosti soustavy je rovna
výslednici vnějších sil působících na soustavu.

Problém dvou těles

• relativní poloha $\vec{r}_{rel} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

• 3. Newtonův zákon: $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$

$$\frac{d^2 \vec{r}_{rel}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_1} = \vec{F}_{1,2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$



$$\mu \frac{d^2 \vec{r}_{rel}}{dt^2} = \vec{F}_{1,2} \quad \text{jednočásticový problém}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{redukováná hmotnost}$$

těžišťová soustava

počátek soustavy souřadnic
dáme do hmotného středu

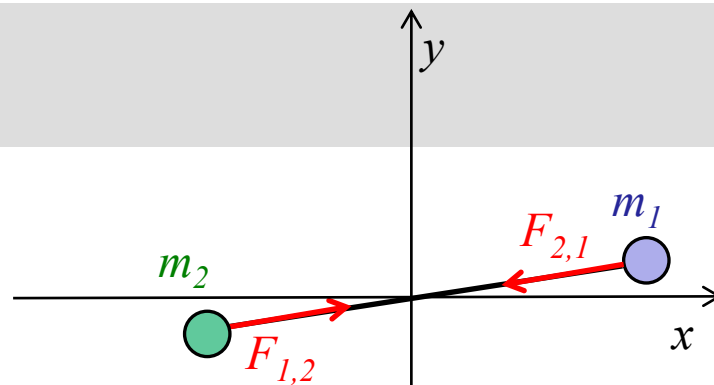
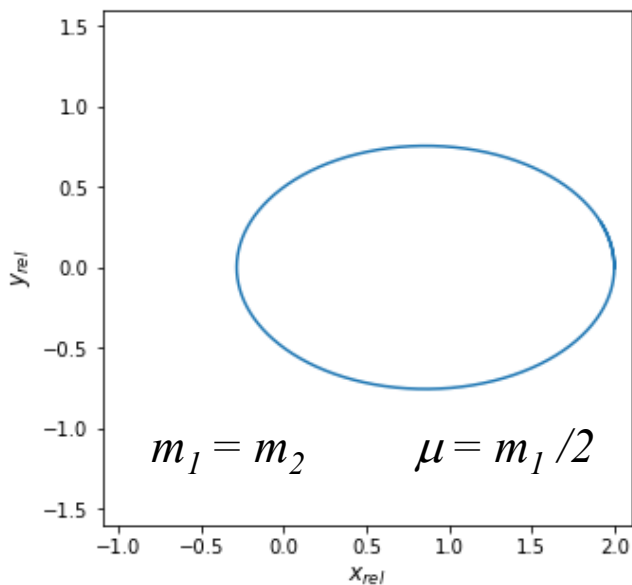
$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{rel}$$

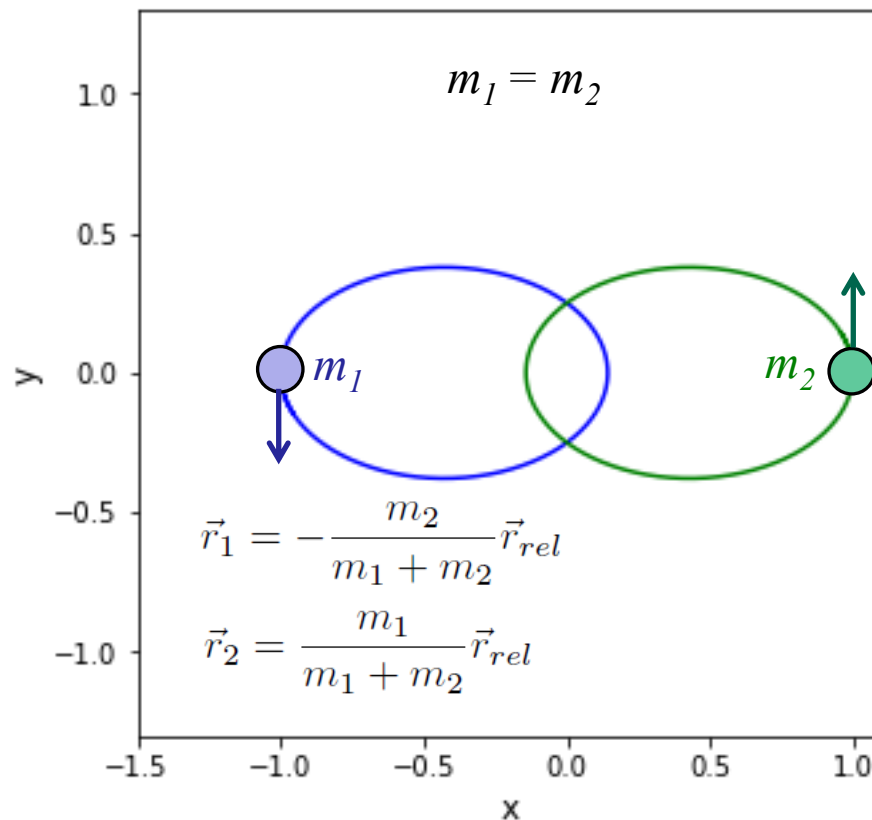
$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{rel}$$

Problém dvou těles

trajektorie fiktivního
hmotného bodu o hmotnosti μ

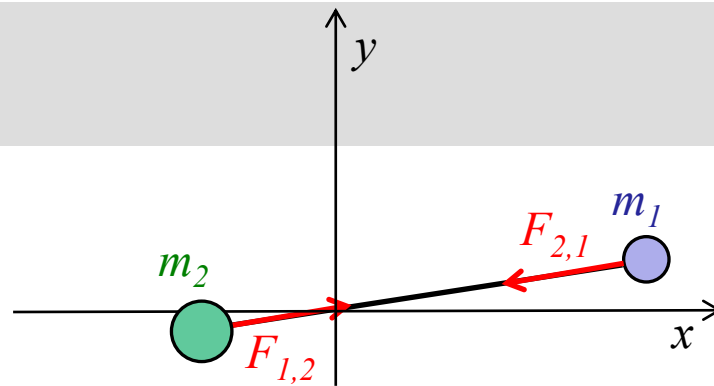
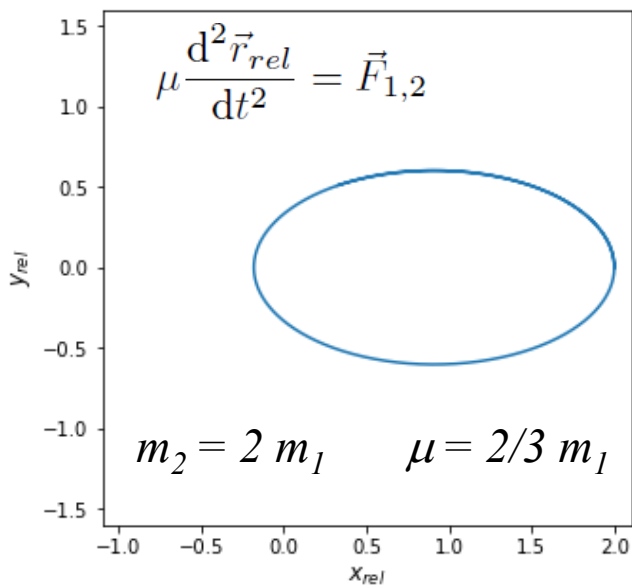


trajektorie skutečných hmotných bodů

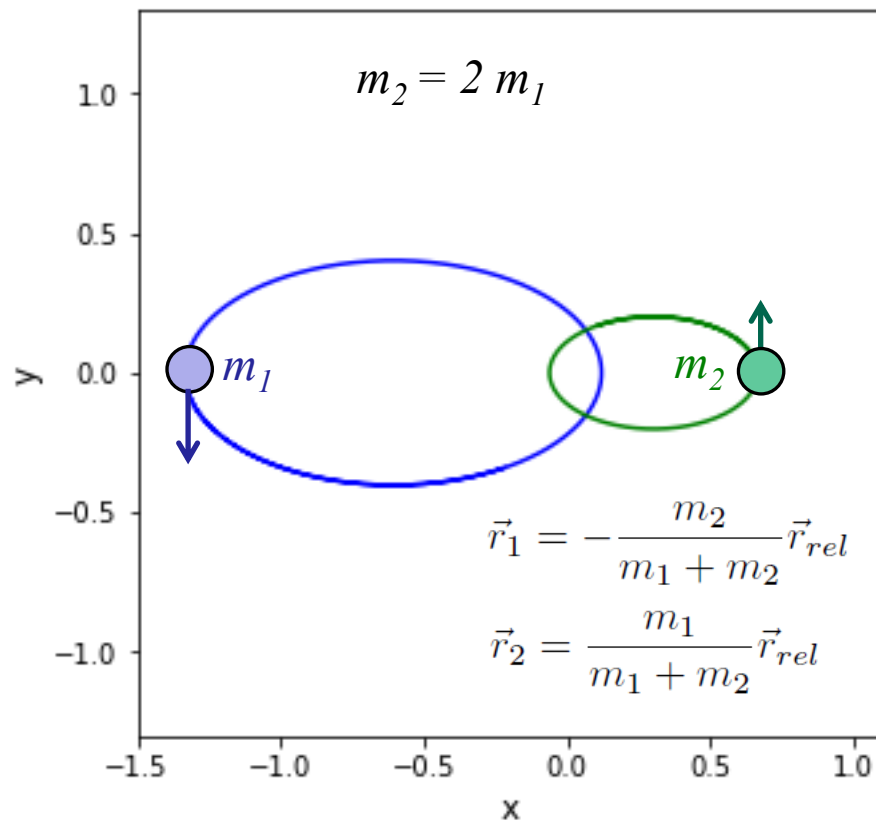


Problém dvou těles

trajektorie fiktivního
hmotného bodu o hmotnosti μ

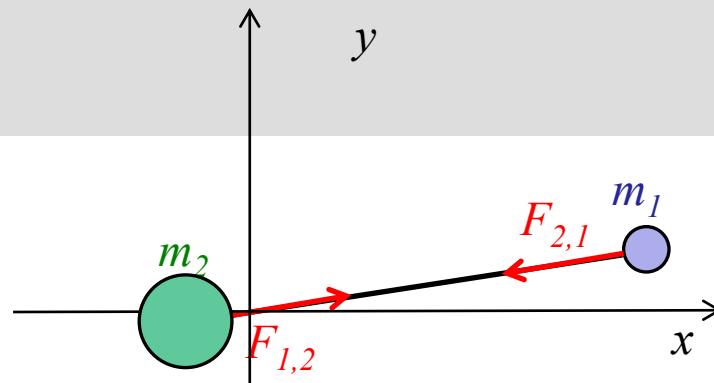
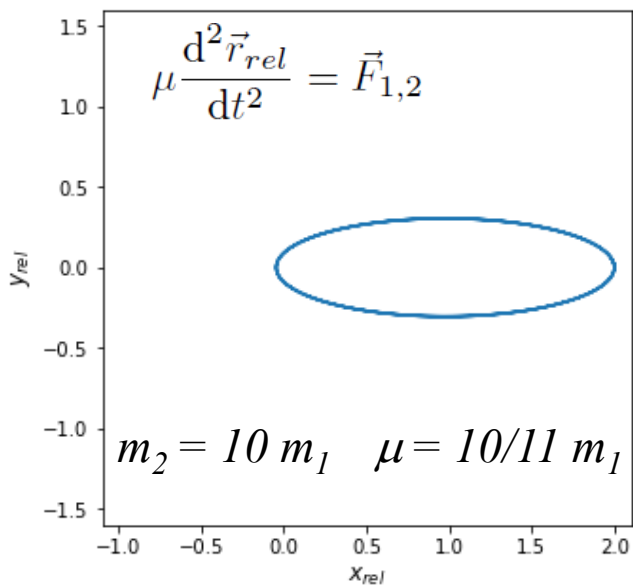


trajektorie skutečných hmotných bodů

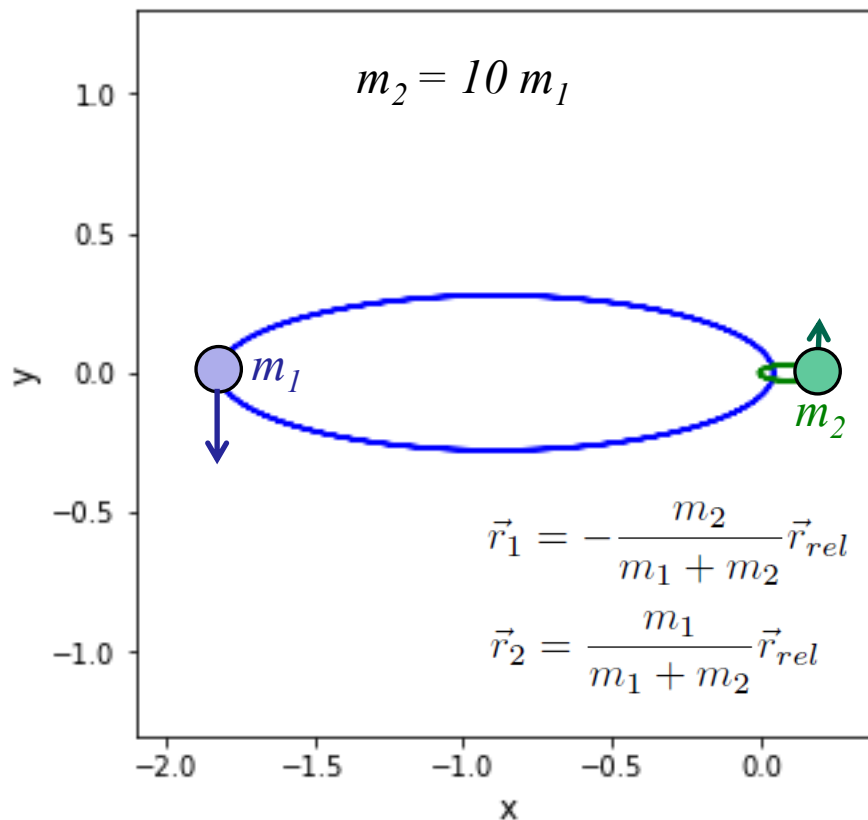


Problém dvou těles

trajektorie fiktivního
hmotného bodu o hmotnosti μ



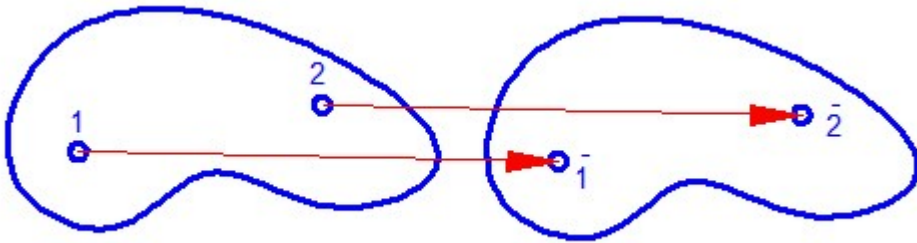
trajektorie skutečných hmotných bodů



Otáčení a posunutí

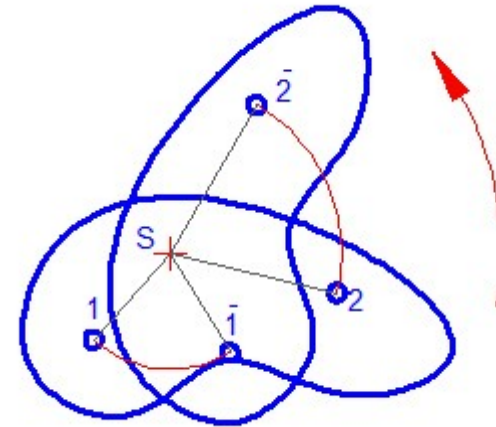
posunutí (translace)

- všechny body tělesa se pohybují po rovnoběžných trajektoriích



otočení (rotace)

- všechny body tělesa se pohybují po kružnicích okolo osy otáčení



Analogie otáčení a posuvu

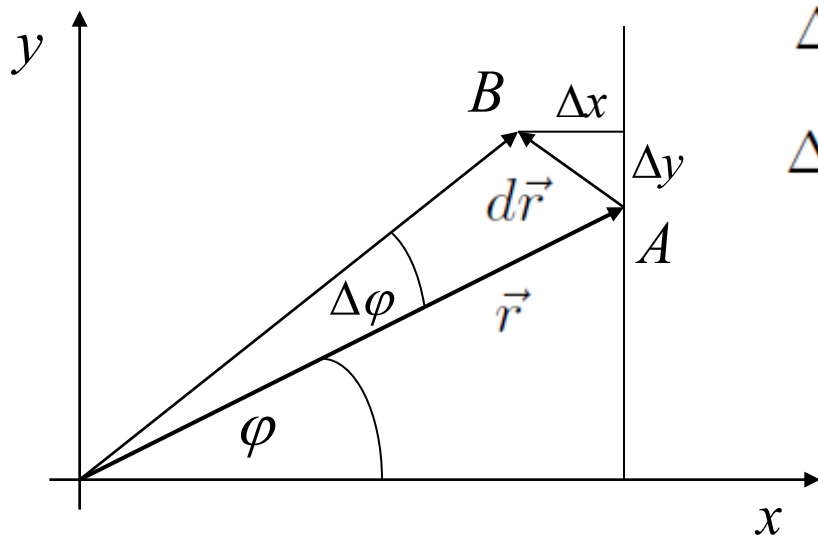
posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo
- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$
- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo
- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Analogie otáčení a posuvu



$$\Delta x = -|\text{AB}| \sin \varphi = -r \Delta \varphi \sin \varphi = -y \Delta \varphi$$

$$\Delta y = |\text{AB}| \cos \varphi = x \Delta \varphi$$

rychlost:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -y \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = -y \omega$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = x \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = x \omega$$

velikost rychlosti: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r$

Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo

- rychlost $v = \frac{dx}{dt}$

- zrychlení $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

- síla $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- práce: $\Delta W = \vec{F} \Delta \vec{s}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

- úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

- moment síly $\tau = xF_y - yF_x$

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (xF_y - yF_x) \Delta \varphi$$

moment síly: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment síly

moment síly: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\tau = rF_t = rF \sin \alpha = r_O F$$

r_O – rameno síly

