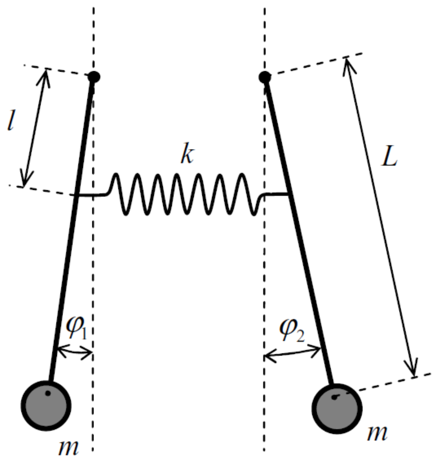
Cvičení 9

1. Závaží o hmotnosti m jsou zavěšeny na tuhých závěsech délky L, jejichž hmotnosti můžeme zanedbat. Ve vzdálenosti l od osy otáčení jsou závěsy jsou spojeny pružinou o tuhosti k, jak je vidět na obrázku. Nalezněte módy této soustavy, tj. úhlové frekvence s jakou mohou kyvadla kmitat.



[*řešení:* $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2kl^2}{mL^2}}$]

2. Najděte poměr rychlostí zvuku v héliu a vodíku při téže teplotě.

[*řešení:* $\frac{v_{\mathrm{He}}}{v_{\mathrm{H_2}}} = \sqrt{\frac{\gamma_{\mathrm{He}} M_{\mathrm{H_2}}}{\gamma_{\mathrm{H_2}} M_{\mathrm{He}}}} = 0.77$, kde $\gamma_{\mathrm{He}} = \frac{5}{3}$ a $\gamma_{\mathrm{H_2}} = \frac{7}{5}$ jsou hodnoty Poissonovy konstanty pro molekuly He a H_2, M_{He} a $M_{\mathrm{H_2}}$ jsou molární hmotnosti molekul He a H_2.]

3. Máme dvě stejné píšťaly. Do jedné foukáme vzduch ochlazený na $t_1 = -180°\mathrm{C}$ a do druhé teplejší vzduch. Jaká musí být teplota t_2 teplejšího vzduchu aby se tón, který píšťaly vydávají, lišil o oktávu?

[*řešení:* Pro termodynamické teploty platí vztah $T_2 = 4T_1$, tedy $t_2 = 99°\mathrm{C}$.]

4. Jakou rychlostí se vůči Zemi musí pohybovat hvězda aby její červené světlo (vlnová délka $\lambda_0 = 630$ nm) nebylo okem vidět? Rozsah vlnových délek viditelných lidským okem je od $\lambda_1 = 390$ nm po $\lambda_2 = 790$ nm.

[*řešení:* $v_{1,2} = c\frac{\lambda_{1,2} - \lambda_0}{\lambda_0}$. Hvězda se musí od Země vzdalovat rychlostí $v_2 = 0.25\,c$ (červený posuv) nebo přibližovat rychlostí $v_1 = 0.38\,c$ (modrý posuv).]

Pozn.: S uvážením efektů speciální teorie relativity platí pro rychlost hvězdy přesnější vztah $v_{1,2} = c\frac{\lambda_{1,2}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{12}^2} - \lambda_0^2$. Hvězda se tedy ve skutečnosti musí pohybovat rychlostí $0.22\,c$ směrem k Zemi nebo rychlostí $0.45\,c$ směrem od Země.

5. V době, kdy Christian Doppler vybudoval teorii Dopplerova posuvu (1842), bylo velmi obtížné tuto teorii experimentálně potvrdit. První serióznější experimentální důkaz tohoto jevu poskytl v roce 1845 nizozemský meteorolog Christophe Ballot. Žil totiž blízko železniční dráhy, a tak ho velmi upoutala změna frekvence píšťaly při projíždění vlaků. Uspořádal tedy následující veřejnou demonstraci. Nechal k vlaku připojit vozík, na kterém jelo několik hráčů na trumpetu. Další hráči stáli ve stanici. Vlakvedoucí poté velkou rychlostí projel kolem nádraží. Přestože všichni hráči při tom hráli tu samou notu na naladěné nástroje, hráči ve vlaku zněli díky svému pohybu lidem stojícím na nádraží falešně.
(a) Když se vlak přibližoval ke stanici, zněli hráči ve vlaku níž, nebo výš než hráči ve stanici? Jak to bylo, když vlak stanici projel a vzdaloval se od ní?
(b) Jak velkou musel jet vlak rychlostí, aby se frekvence obou skupin trumpetistů lišila o půltón? Podíl frekvencí dvou tónů vzdálených o půltón je $\sqrt[12]{2}$. Rychlost zvuku při 20°C je $v = 343$ m s^{-1}
(c) Jaká by byla frekvence vzniklých záznějů, kdyby hráči hráli tón s frekvencí $f = 440$ Hz (komorní a) a vlak se pohyboval rychlostí $w = 20$ km h^{-1}?

[*řešení:* (a) Zněli výš, když se vlak přibližoval, a níž, když se vzdaloval.
(b) Vlak by se musel přibližovat rychlostí $v_1 = 69.3$ km h^{-1} nebo vzdalovat rychlostí $v_2 = 73.4$ km h^{-1}.
(c) Frekvence záznějů je 7.2 Hz při přibližování vlaku a 7.0 Hz při vzdalování.]

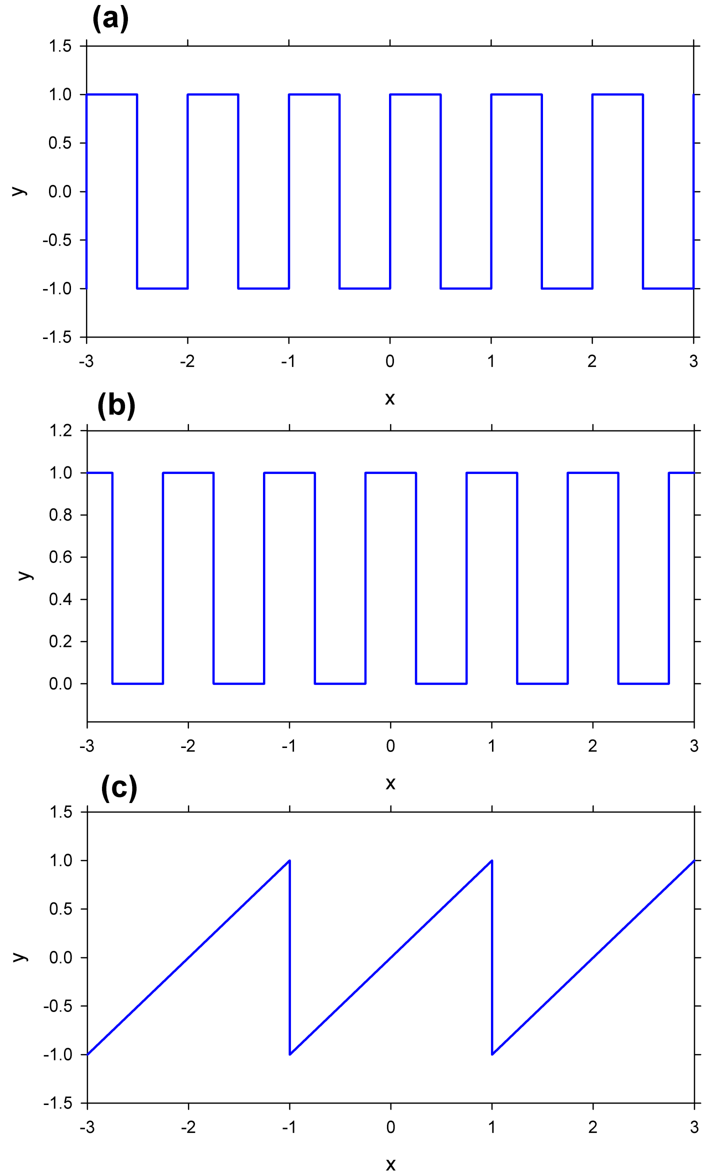
6. Pokud foukneme do prázdné láhve od piva (viz. obrázek) jaký tón bude hrát? Objem láhve je $V = 0.5$ l.

[*řešení:* $f = \frac{v}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi r^2}{l_1 V}} = 144$ Hz.]

7. Jaký tón bude hrát struna na kytaře vyrobená z materiálu o hustotě ϱ? Struna má délku L, průměr d a je napnutá napěťovou silou F_t.

[*řešení:* $f = \frac{1}{Ld}\sqrt{\frac{F_t}{\pi\varrho}}$]

8. Najděte Fourierův rozvoj následujících funkcí.



[*řešení:*

$$(a)\quad \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[2\pi(2n-1)t\right]$$

$$(b)\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\left[2\pi(2n-1)t\right]$$

$$(c)\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\pi n t\right)$$

]

Základní vztahy a údaje

Zvuk

vlnová rovnice	$\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = \frac{1}{v_z^2}\frac{\partial \xi^2}{\partial t^2}$
rychlost zvuku	$v_z^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{\gamma p}{\varrho} = \frac{\gamma k T}{m}$
Poissonova konstanta	$\gamma = 1 + \frac{2}{f}$, kde f je počet stupňů volnosti molekuly ideálního plynu
Dopplerův posuv	$f = f_0 \frac{v+v_p}{v+v_s}$ v - rychlost šíření vlnění v_s - rychlost pohybu zdroje vlnění v_p - rychlost pohybu pozorovatele $f = f_0\sqrt{\frac{c-v'}{c+v'}}$ (relativisticky) c - rychlost šíření světla ve vakuu v' - vzájemná rychlost zdroje a pozorovatele

Fourierova řada pro periodickou funkci $f(t)$ s periodou T

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right),$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\,\mathrm{d}t,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\,\mathrm{d}t.$$