Příklad 9.1

• fyzické kyvadlo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Mg\,R}}$$

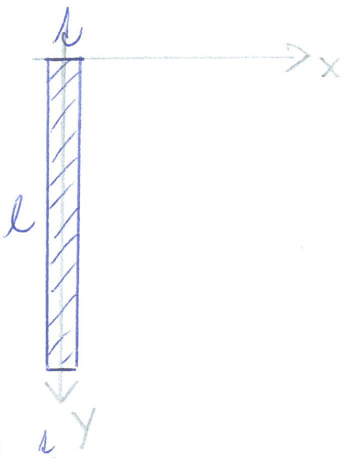
T … perioda kmitů

R … vzdálenost hmotného středu od osy otáčení o

I_o … celkový moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení o

• doba kyvu $\qquad t = \frac{1}{2}T$

• moment setrvačnosti $\quad \rightarrow$ tyč



$$I_1 = \frac{m_1}{l \cdot t}\int_0^l \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(x^2+y^2\right) dx\, dy$$

$$= \frac{m_1}{l \cdot t}\int_0^l \left[\frac{x^3}{3} + x y^2\right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} dy$$

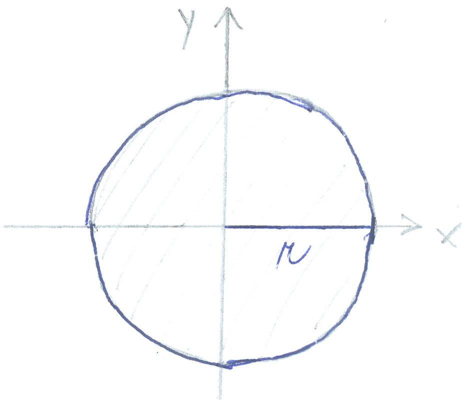
$$= \frac{m_1}{l \cdot t}\int_0^l \left(\frac{t^3}{12} + t y^2\right) dy$$

$$= \frac{m_1}{l \cdot t}\left[\frac{t^3}{12} y + \frac{t}{3} y^3\right]_0^l$$

$$= \frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{1}{12} m_1 t^2$$

9.1.2.

→ disk



$$I_2' = \frac{m_2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r'^2 \, r' \, dr' \, d\varphi$$

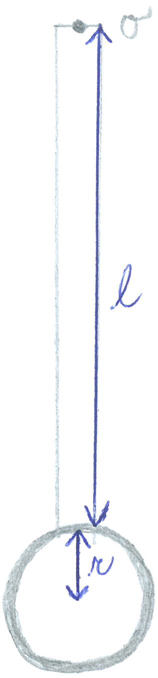
$$= \frac{m_2}{\pi r^2} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{r'^4}{4}\right]_0^{r}$$

$$= \underline{\frac{1}{2} m_2 r^2}$$ ... vzhledem k ose jdoucí hm. středem

↓

Steinerova věta

- vzdálenost od osy otáčení ... $r+l$



$$\Rightarrow I_2 = I_2' + m_2 (r+l)^2$$

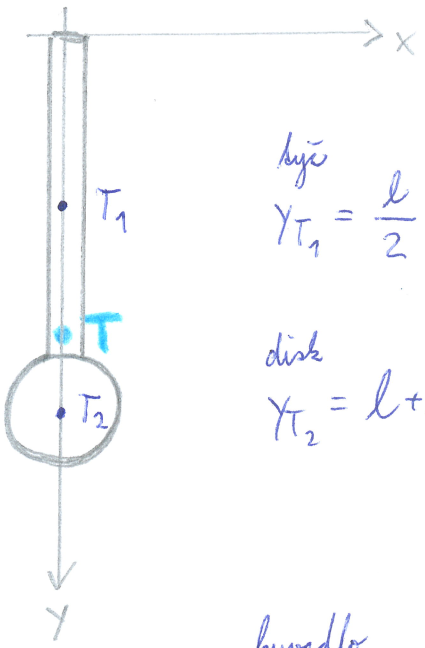
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} m_2 r^2 + m_2 (r+l)^2}}$$

→ celkový moment setrvačnosti

$$I_o = I_1 + I_2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 + m_2 (r+l)^2}}$$

• hmotný stred



tyč

$$y_{T_1} = \frac{l}{2}$$

disk

$$y_{T_2} = l + r$$

$$R = \overset{\text{kyvadlo}}{y_T} = \frac{m_1 y_{T_1} + m_2 y_{T_2}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_2 (r + l)}{m_1 + m_2}$$

• dohromady

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{1}{12} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 + m_2 (r+l)^2}{\underbrace{(m_1 + m_2)}_{=M} \, g \, \frac{\frac{1}{2} m_1 l + m_2 r + m_2 l}{m_1 + m_2}}}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 + m_2 (r+l)^2}{g \left(\frac{1}{2} m_1 l + m_2 r + m_2 l \right)}}$$

$$t = 1{,}0039 \, s$$

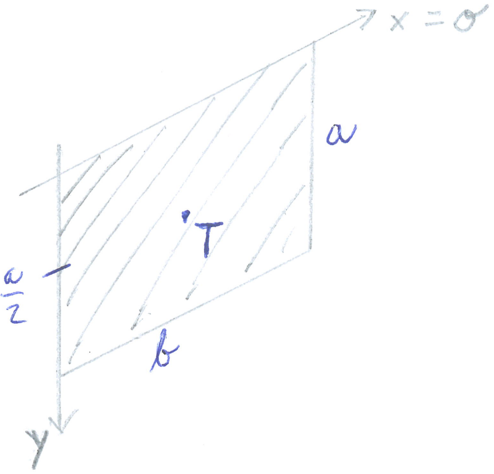
Příklad 9.2.

a) deska → moment setrvačnosti

$$I_0 = \frac{m}{ab} \int_0^a \int_0^b y^2 \, dx dy = \frac{m}{ab} \left[x\right]_0^b \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a$$

zanedbáme tloušťku desky

$$\underline{I_0 = \frac{1}{3} m a^2}$$



→ hmotný střed

$$y_T = \frac{a}{2}$$

→ perioda kmitů :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m a^2}{m g \frac{a}{2}}} = \underline{\underline{2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}}}$$

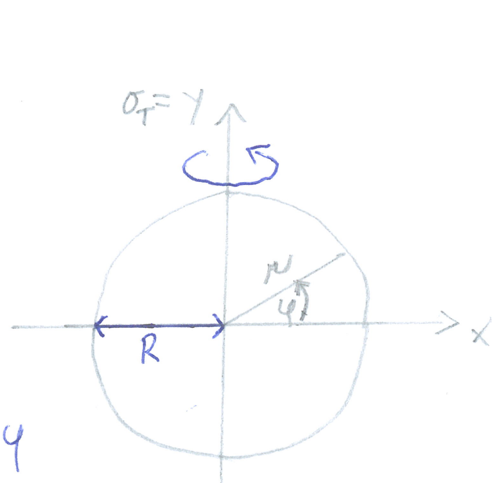
I_0, y_T

fyzické kyvadlo

b) deska s dírou → moment setrvačnosti

$$I = I_0 - I'$$

deska, kruhový disk

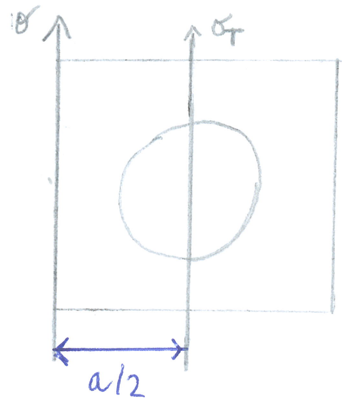


$$I'_T = \frac{m'}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cos\varphi)^2 \, r \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{m'}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi}_{= \pi} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{\frac{R^4}{4}} = \frac{1}{4} m' R^2$$

$$= \left[\frac{\varphi + \sin\varphi \cos\varphi}{2} \right]_0^{2\pi}$$

Steinerova věta



$$I' = I'_T + m' \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I' = \frac{1}{4} m' R^2 + \frac{1}{4} m' a^2$$

→ hmotnosti: deska: $m = \sigma a b$ ⇒ $\sigma = \frac{m}{ab}$

plošná hustota

disk/díra: $m' = \sigma \pi R^2 = m \frac{\pi R^2}{ab}$

deska s dírou: $M = m - m' = m \left(1 - \frac{\pi R^2}{ab}\right)$

→ hmotný střed: $y_T = \frac{a}{2}$

→ perioda kmitů

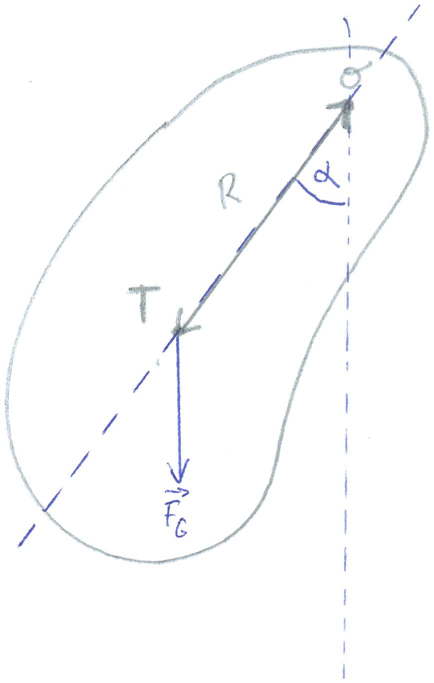
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m a^2 - \frac{1}{4} m \frac{\pi R^2}{ab} R^2 - \frac{1}{4} m \frac{\pi R^2}{ab} a^2}{m\left(1 - \frac{\pi R^2}{ab}\right) g \frac{a}{2}}}$$

$$T = \underbrace{2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}}_{T_0} \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4} \frac{\pi R^2}{ab}\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)}{\left(1 - \frac{\pi R^2}{ab}\right)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}} \sqrt{\frac{ab - \frac{3}{4}\pi R^2\left(1 + R^2/a^2\right)}{ab - \pi R^2}}$$

Příklad 9.3.

• fyzické kyvadlo



→ 2. věta impulzová

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

\+ moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$

$M = R \cdot mg \cdot \sin\alpha$ / směr „před papír"

\+ moment setrvačnosti $I = I_T + mR^2$

I: vzhledem k ose O

I_T: vzhledem k ose jdoucí hmotným středem

\+ úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$ ... // směr „před papír"

$$\varepsilon = -\ddot{\alpha}$$

roste ⇒ klesá a naopak

$$\Rightarrow \quad mgR\sin\alpha = (I_T + mR^2)(-\ddot{\alpha})$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{mgR}{I_T + mR^2}\sin\alpha$$

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin\alpha \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_T + mR^2}}$$

- matematické kyvadlo $\qquad I = mR^2 \quad$ neboli $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{moment setrvačnosti hmotného bodu}}}{I_T} = 0$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{g}{R}}}} \quad \text{viz dříve}$$

- a) malé výchylky $\alpha << 1 \quad \Rightarrow \sin\alpha \doteq \alpha$

$$\underline{\ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha}$$

$\downarrow$

harmonické kmity s periodou $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

- b) velké výchylky + ROOT $\quad \Rightarrow \quad$ $T(10°) = \underline{\underline{2{,}010\,s}}$, $T(90°) = \underline{\underline{2{,}368\,s}}$ } numerické řešení

↑ počáteční výchylka

- c) velké výchylky + ELIPTICKÉ INTEGRÁLY $\Rightarrow T = \frac{4}{\omega} K\left(\sin\frac{\varphi_m}{2}\right)$ ← amplituda

↓ eliptický integrál 1. druhu

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

$$T(\varphi_m) = \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}_{T_0}\Bigg(\underset{\text{0. přiblížení}}{1} + \underset{\text{1. přiblížení}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}$$

$$+ \underset{\text{2. přiblížení}}{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)} + \ldots \text{atd.}$$

$T_0 = 2{,}005\,s \quad \longrightarrow \quad T_1(10°) \doteq 1{,}002\,T_0 = 2{,}009\,s$

$T_1(90°) \doteq 1{,}125\,T_0 = 2{,}256\,s$

$T_2(10°) \doteq 1{,}002\,T_0 = 2{,}009\,s$

$T_2(90°) \doteq 1{,}160\,T_0 = 2{,}326\,s$

↓

atd.

Příklad 9.4.

- součet funkcí sinus / kosinus

→ součtové vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\Rightarrow \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$x+y=a \qquad x-y=b \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{a+b}{2} \qquad y = \frac{a-b}{2}$$

$$\underline{\underline{\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$x+y=a \qquad x-y=b \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{a+b}{2} \qquad y = \frac{a-b}{2}$$

$$\underline{\underline{\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}}$$

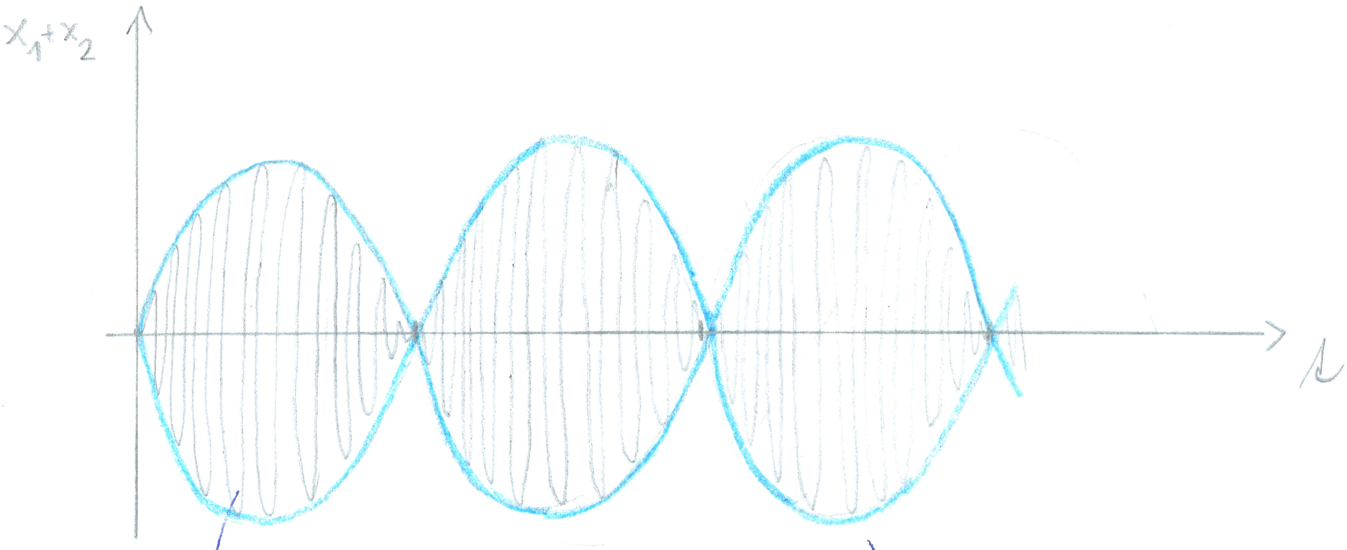
- součet 2 kmitů ve fázi (!) + se stejnou amplitudou

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)$$
$$= 2 \sin\left(2\pi \frac{f_1+f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1-f_2}{2} t\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\bar{f} = \frac{f_1+f_2}{2} \qquad \tilde{f} = \frac{f_1-f_2}{2}$$

9.4.2.



harmonické kmity
s průměrnou frekvencí $\bar{f}$

$\bar{f} = \frac{f_1+f_2}{2} = 437{,}5\ Hz$

modulace amplitudy → ZÁZNĚJE
s frekvencí $2\tilde{f}$

$\Downarrow$

$T = \frac{1}{2\tilde{f}} = \frac{1}{f_1 - f_2} = 0{,}2\ s$

Příklad 9.5.

$$x_1 = A e^{i(\omega t+\varphi_1)} = A e^{i\omega t} e^{i\varphi_1}$$

$$x_2 = B e^{i(\omega t+\varphi_2)} = B e^{i\omega t} e^{i\varphi_2}$$

$$\longrightarrow \quad x_1 + x_2 = e^{i\omega t}\underbrace{\left(A e^{i\varphi_1} + B e^{i\varphi_2}\right)}_{\hat{C}\ (\text{komplexní číslo})}$$

$$\hat{C} = A e^{i\varphi_1} + B e^{i\varphi_2} = A(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + B(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\hat{C} = \underbrace{(A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2)}_{\substack{\text{reálná část } \hat{C} \\ Re(\hat{C})}} + i\underbrace{(A\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)}_{\substack{\text{imaginární část } \hat{C} \\ Im(\hat{C})}}$$

- $\hat{C}$ lze zapsat ve tvaru: $\hat{C} = C e^{i\alpha}$

C → amplituda (reálná)

α → fáze (reálná)

$$\hat{C} = C e^{i\alpha} = C(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \underbrace{C\cos\alpha}_{Re(\hat{C})} + i\underbrace{C\sin\alpha}_{Im(\hat{C})}$$

OBECNĚ

výpočet amplitudy

- $$|\hat{C}| = \sqrt{(Re(\hat{C}))^2 + (Im(\hat{C}))^2} = \sqrt{C^2\cos^2\alpha + C^2\sin^2\alpha} = C$$

výpočet fáze

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Im(\hat{C})}{Re(\hat{C})} = \frac{C\sin\alpha}{C\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

$\Rightarrow$ amplituda $C = \sqrt{(A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2)^2 + (A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2)^2}$

$$= \sqrt{(A^2\cos^2\varphi_1 + 2AB\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + B^2\cos^2\varphi_2) + (A^2\sin^2\varphi_1 + 2AB\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + B^2\sin^2\varphi_2)}$$

$$= \sqrt{A^2 + 2AB\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1-\varphi_2)} + B^2}$$

$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ... součtový vzorec

$$C = \sqrt{A^2 + 2AB\cos(\varphi_1-\varphi_2) + B^2}$$

$\Rightarrow$ fáze $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2}{A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2}$

výsledek: $\quad A e^{i(\omega t+\varphi_1)} + B e^{i(\omega t+\varphi_2)} = C e^{i(\omega t+\alpha)}$

neboli:

Re. části $\rightarrow$ $\quad A\cos(\omega t+\varphi_1) + B\cos(\omega t+\varphi_2) = C\cos(\omega t+\alpha)$

Im. části $\rightarrow$ $\quad +i\left(A\sin(\omega t+\varphi_1) + B\sin(\omega t+\varphi_2)\right) = +iC\sin(\omega t+\alpha)$

Příklad 9.6.

a) aperiodický pohyb

– obecné řešení: $x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$, kde $\alpha_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

označení: $\psi = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 e^{\psi t} + c_2 e^{-\psi t}\right)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = e^{-\delta t}\left(c_1(-\delta+\psi)e^{\psi t} + c_2(-\delta-\psi)e^{-\psi t}\right)$$

– počáteční podmínky: $x(t=0) = \underline{0} = e^0\left(c_1 e^0 + c_2 e^0\right) = \underline{c_1 + c_2}$

$$v(t=0) = u = e^0\left(c_1(-\delta+\psi)e^0 + c_2(-\delta-\psi)e^0\right)$$

$$\underline{u = c_1(-\delta+\psi) + c_2(-\delta-\psi)}$$

$$c_1 = -c_2$$

$$u = -c_1\delta + c_1\psi + c_1\delta + c_1\psi = 2c_1\psi$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{u}{2\psi} \qquad \Rightarrow c_2 = \frac{u}{2\psi}$$

$$x(t) = \frac{u}{\psi} e^{-\delta t}\left(\frac{e^{\psi t} - e^{-\psi t}}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{u \cdot e^{-\delta t}}{\psi} \sinh(\psi t)}}$$

b) mezní aperiodický pohyb

- obecné řešení: $x(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t}$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -c_1 \delta e^{-\delta t} + c_2 e^{-\delta t} - c_2 \delta t e^{-\delta t}$$

- počáteční podmínky: $x(t=0) = \underline{0} = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = \underline{c_1}$

$$v(t=0) = \underline{u} = -c_1 \delta e^0 + c_2 e^0 - c_2 \delta \cdot 0 e^0 = \underline{c_2}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0 \qquad c_2 = u$$

$$\underline{\underline{x(t) = u t e^{-\delta t}}}$$

c) tlumené kmity

- obecné řešení: $x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$

označení: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- počáteční podmínky: $x(t=0) = \underline{0} = A \cdot e^0 \sin(0+\varphi) = \underline{A \sin \varphi}$

$$v(t=0) = u = -\delta A e^0 \sin(0+\varphi) + \omega A e^0 \cos(0+\varphi)$$

$$\underline{u = -\delta A \sin \varphi + \omega A \cos \varphi}$$

$$\varphi = 0$$

$$u = \omega A \quad \Rightarrow A = \frac{u}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{u}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

Příklad 9.7.

a) řešení ve tvaru

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\dot{x}(t) = c_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\ddot{x}(t) = c_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 t}$$

$\downarrow$

dosadit do rovnice $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

+ podmínka $\omega_0 > \delta$

$$\Rightarrow c_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 t} + 2\delta c_1 \alpha_1 e^{\alpha_1}$$

$$+ 2\delta c_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t} + \omega_0^2 c_1 e^{\alpha_1 t} + \omega_0^2 c_2 e^{\alpha_2 t} = 0$$

$$c_1 e^{\alpha_1 t}(\alpha_1^2 + 2\delta\alpha_1 + \omega_0^2) + c_2 e^{\alpha_2 t}(\alpha_2^2 + 2\delta\alpha_2 + \omega_0^2) = 0$$

→ závorky musejí být nulové

→ stejné rovnice pro α_1 a α_2

→ jediná rovnice ~~pro~~ pro α s kořeny α_1 a α_2

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

výraz pod odmocninou záporný kvůli podmínce $\omega_0 > \delta$

$$\Rightarrow \alpha_{1/2} = \frac{-2\delta \pm 2i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega$$

$\downarrow$

označení

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$\Rightarrow$ 1. tvar řešení: $x(t) = c_1 e^{-\delta t} e^{+i\omega t} + c_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right)$$

... komplexní řešení

b) řešení ve tvaru $x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$

$$\dot{x}(t) = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = \delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - \delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - \delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

2x

$\downarrow$

dosadit do rovnice $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

+ podmínka $\omega_0 > \delta$

$$\Rightarrow \delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - 2\delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$- \omega^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - 2\delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$+ 2\delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\delta)\left(\underbrace{\delta^2-\omega^2+\omega_0^2 -2\delta^2}_{=0}\right)+Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\delta)\left(\underbrace{-2\delta\omega+2\delta\omega}_{=0}\right)=0$$

automaticky

$$-\delta^2-\omega^2+\omega_0^2=0$$
$$\omega^2=\omega_0^2-\delta^2$$
$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$\Rightarrow$ 2. tvar řešení : $x(t)=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi)$

... reálné řešení

c) konstanty v 1. řešení C_1 a C_2 } určené počátečními podmínkami
konstanty v 2. řešení A a φ

$\downarrow$

vzájemný vztah

1. tvar $\quad x(t)=x(t) \quad$ 2. tvar

$$e^{-\delta t}\left(c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t}\right)=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$e^{-\delta t}\left(c_1\cos\omega t+ic_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t-ic_2\sin\omega t\right) = Ae^{-\delta t}\left(\sin\omega t\cos\varphi+\sin\varphi\cos\omega t\right)$$

$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$
$e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$

$$e^{-\delta t}\cos\omega t\,(c_1+c_2) + e^{-\delta t}\sin\omega t\,(ic_1-ic_2) = e^{-\delta t}\cos\omega t\,(A\sin\varphi) + e^{-\delta t}\sin\omega t\,(A\cos\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1+c_2 &= A\sin\varphi \\ i(c_1-c_2) &= A\cos\varphi \end{aligned}} \quad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\end{aligned}$$

$(1)\,/\,(2)$
$$\frac{c_1+c_2}{i(c_1-c_2)} = \frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{tg}\varphi = \frac{c_1+c_2}{i(c_1-c_2)}}}$$

$(1)^2+(2)^2$
$$c_1^2+2c_1c_2+c_2^2 \underset{\uparrow\, i^2}{-} (c_1^2-2c_1c_2+c_2^2) = A^2\sin^2\varphi + A^2\cos^2\varphi$$

$$4c_1c_2 = A^2 \Rightarrow \underline{\underline{A = \sqrt{4c_1c_2}}}$$

(1): $c_1 = A\sin\varphi - c_2$

$\Rightarrow (2)$: $iA\sin\varphi - ic_2 - ic_2 = A\cos\varphi$

$$-2i\,c_2 = A\cos\varphi - iA\sin\varphi$$

$$c_2 = -\frac{A}{2i}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\underline{\underline{c_2 = -\frac{A}{2i}e^{-i\varphi}}}$$

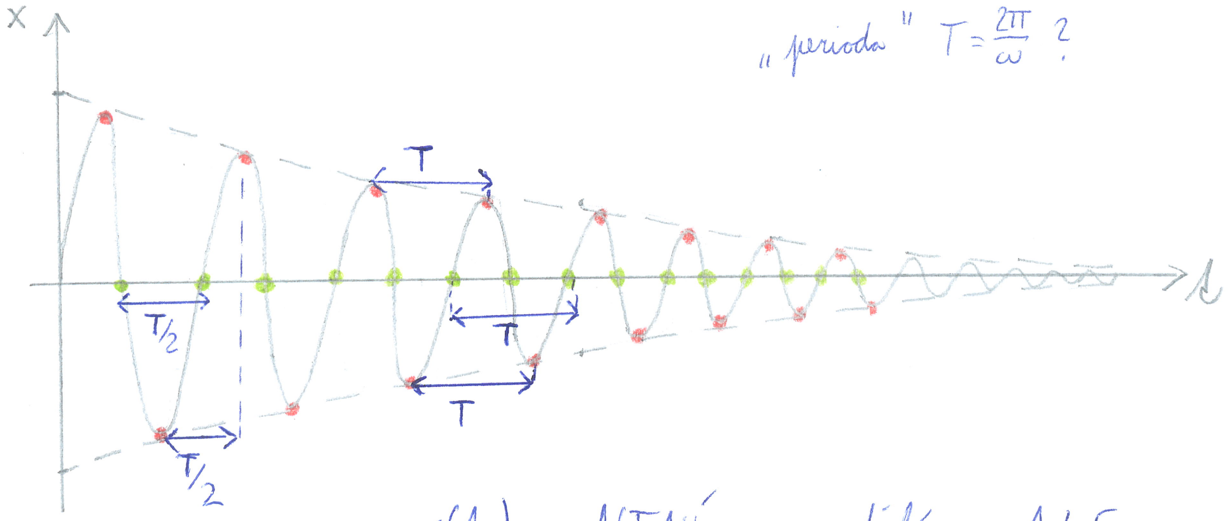
$$c_1 = A\sin\varphi + \frac{A}{2i}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{A}{2i}(2i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$c_1 = \frac{A}{2i}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \underline{\underline{\frac{A}{2i}e^{i\varphi}}}$$

Příklad 9.8.

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

„perioda" $T = \frac{2\pi}{\omega}$?



$x(t)$ NENÍ periodická ALE:

i) vzdálenost nulových bodů ($x=0$) je $T/2$

ii) vzdálenost sousedních lokálních maxim a minim je $T/2$

důkaz: i) nulové body

$$x(\bar{t}) = 0 = \underbrace{A \cdot e^{-\delta \bar{t}}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\sin(\omega \bar{t} + \varphi)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \sin(\omega \bar{t} + \varphi) = 0$$

PERIODA $\frac{T}{2}$ $\rightarrow$ $\sin\left(\omega\left(\bar{t} + \frac{T}{2}\right) + \varphi\right) = 0$

$$0 \overset{*}{=} \overset{=0}{\sin(\omega \bar{t} + \varphi)} \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) + \underbrace{\cos(\omega \bar{t} + \varphi)}_{\neq 0} \underbrace{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}_{=0}$$

* součtový vzorec
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$$\sin \omega \frac{T}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \frac{T}{2} = k\pi \quad k=1$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ii) lokální maxima a minima

$$\dot{x}(\tilde{t}) = 0$$

$$\dot{x}(t) = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$0 = \underbrace{A e^{-\delta \tilde{t}}}_{\neq 0} \Big(\underbrace{-\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi)}_{=0} \Big)$$

$$\Rightarrow -\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) = 0$$

PERIODA $\frac{T}{2}$ $\rightarrow$ $-\delta \sin(\omega(\tilde{t} + \frac{T}{2}) + \varphi) + \omega \cos(\omega(\tilde{t} + \frac{T}{2}) + \varphi) = 0$

* součtové vzorce

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$0 \overset{*}{=} -\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) \cos(\omega \tfrac{T}{2}) - \delta \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) \sin(\omega \tfrac{T}{2}) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) \cos(\omega \tfrac{T}{2}) - \omega \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) \sin(\omega \tfrac{T}{2})$$

$$0 = \cos(\omega \tfrac{T}{2}) \Big(\underbrace{-\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi)}_{=0} \Big) + \underbrace{\sin(\omega \tfrac{T}{2})}_{=0} \underbrace{\Big(-\delta \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) - \omega \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) \Big)}_{\neq 0}$$

$$\sin \omega \frac{T}{2} = 0 \Leftrightarrow \omega \frac{T}{2} = k\pi \quad \Big) k = 1$$

$$\underline{\underline{T = \frac{2\pi}{\omega}}}$$

* střídání maxim a minim $\Rightarrow$ vzdálenost sousedních maxim $\ldots 2 \cdot \frac{T}{2} = T$

=||= minim $\ldots 2 \cdot \frac{T}{2} = T$ ∇

Příklad 9.9

- nucené kmity: $x(t) = A_0 \sin(\Omega t + \vartheta)$

- činitel jakosti: $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = 1 \quad \Rightarrow \omega_0 = 2\delta$

- amplituda: $A_0(\Omega) = \frac{F_0}{m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1/2}$

$\downarrow$

maximální amplituda: $\frac{dA_0}{d\Omega} = 0$

$$= \frac{-F_0}{2m}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\left(2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\delta^2\Omega\right)}_{=0}$$

$$0 = -4\omega_0^2\Omega + 4\Omega^3 + 8\delta^2\Omega$$

$$0 = \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 \underset{\omega_0 = 2\delta}{=} \Omega^2 - 4\delta^2 + 2\delta^2$$

rezonance $\Rightarrow \Omega_{rez} = \sqrt{2}\,\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{rez}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\omega_0}$$

- výkon: $P_F(\Omega) = \frac{F_0^2\Omega^2\delta}{m\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right]}$

$\downarrow$

maximální výkon: $\frac{dP_F}{d\Omega} = 0$

9.9.2..

$$0 = \frac{F_0^2 \delta}{m} \quad \frac{2\Omega\left((\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right)-\Omega^2\left(2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\delta^2\Omega\right)}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right]^2}$$

$$0 = 2\Omega\left((\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right)-\Omega^2\left(2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\delta^2\Omega\right)$$

$$0 = 2\Omega\left(\omega_0^4-2\omega_0^2\Omega^2+\Omega^4+4\delta^2\Omega^2\right)-\Omega^2\left(-4\omega_0^2\Omega+4\Omega^3+8\delta^2\Omega\right)$$

$$0 = 2\omega_0^4\Omega - \cancel{4\omega_0^2\Omega^3}+2\Omega^5+\cancel{8\delta^2\Omega^3}+\cancel{4\omega_0^2\Omega^3}-4\Omega^5-\cancel{8\delta^2\Omega^3}$$

$$0 = 2\omega_0^4\Omega - 2\Omega^5 \qquad = 2\Omega(\omega_0^4-\Omega^4)$$

rezonance $\Rightarrow \Omega_{rez} = \omega_0$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{rez}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Příklad 9.10.

- rezonanční křivka : $P_F = \frac{F_0^2 \delta}{m} \frac{\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}$

- rezonance $\Omega = \Omega_{rez} = \omega_0$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2 = (\omega_0-\Omega)^2\underbrace{(\omega_0+\Omega)^2}_{\doteq 2\omega_0} \doteq 4\omega_0^2(\omega_0-\Omega)^2$$

$$P_F = \frac{F_0^2\delta}{m}\frac{\omega_0^2}{4\omega_0^2(\omega_0-\Omega)^2+4\delta^2\omega_0^2} = \underbrace{\overbrace{\frac{F_0^2\delta}{4m}}^{A}\frac{1}{(\omega_0-\Omega)^2+\delta^2}}_{\text{Lorentzián}}$$

- pološířka Lorentziánu : maximum ... $\Omega=\omega_0$ ... $P_F = \frac{A}{\delta^2} \xrightarrow{\frac{1}{2}\max}$
(FWHM)
Full
Width
at
Half
Maximum

$\frac{1}{2}$ maxima ... $\Omega=\bar{\Omega}$ ... $P_F = A\frac{1}{(\omega_0-\bar{\Omega})^2+\delta^2} = \frac{A}{2\delta^2}$

$$\Rightarrow (\bar{\Omega}-\omega_0)^2+\delta^2 = 2\delta^2$$
$$(\bar{\Omega}-\omega_0)^2 = \delta^2$$

$$\Rightarrow \bar{\Omega}_{1/2} = \omega_0 \pm \delta$$

$$w = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = (\omega_0+\delta)-(\omega_0-\delta) = 2\delta$$

- pološířka rezonanční křivky: maximum ... $\Omega=\omega_0$ ... $P_F = \frac{A}{\delta^2} \xrightarrow{\frac{1}{2}\max}$

$\frac{1}{2}$ maxima ... $\Omega=\bar{\Omega}$ ... $P_F = 4A\frac{\bar{\Omega}^2}{(\omega_0^2-\bar{\Omega}^2)^2+4\delta^2\bar{\Omega}^2} = \frac{A}{2\delta^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\bar{\Omega}^2}{(\omega_0^2-\bar{\Omega}^2)^2+4\delta^2\bar{\Omega}^2} = \frac{1}{2\delta^2}$$

$$8\delta^2\bar{\Omega}^2 = \bar{\Omega}^4 - 2\bar{\Omega}^2\omega_0^2 + \omega_0^4 + 4\delta^2\bar{\Omega}^2$$

$$0 = \bar{\Omega}^4 + \bar{\Omega}^2(-2\omega_0^2 - 4\delta^2) + \omega_0^4$$

$\uparrow$

kvadratická rovnice pro $\bar{\Omega}^2$

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{1}{2}\left(2\omega_0^2 + 4\delta^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 + 16\delta^2\omega_0^2 + 16\delta^4 - 4\omega_0^4}\right)$$

$$\bar{\Omega}^2 = \omega_0^2 + 2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^2\omega_0^2 + 4\delta^4}$$

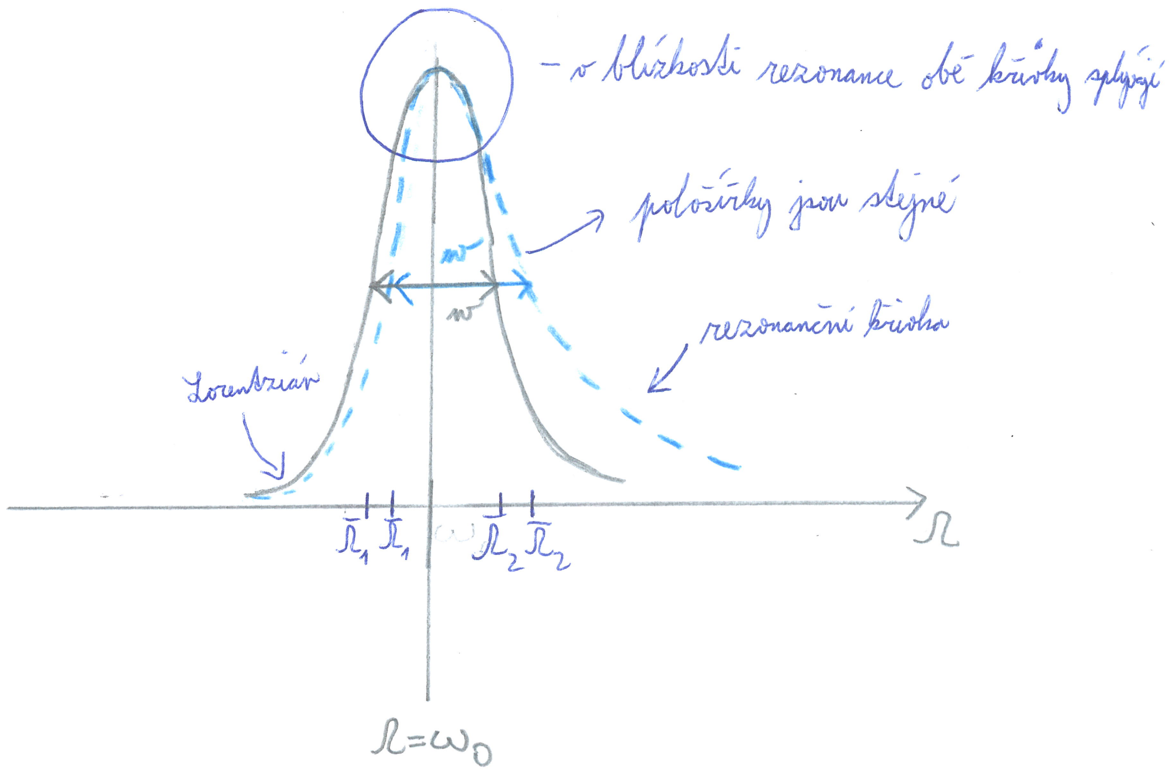
$$\bar{\Omega}^2 = \omega_0^2 + 2\delta^2 \pm 2\delta\sqrt{\omega_0^2+\delta^2}$$

$$\bar{\Omega}^2 = (\omega_0^2+\delta^2) \pm 2\delta\sqrt{\omega_0^2+\delta^2} + \delta^2 = \left(\sqrt{\omega_0^2+\delta^2} \pm \delta\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_{1/2} = \pm\delta \pm \sqrt{\omega_0^2+\delta^2}$$

$$w = \Omega_2 - \Omega_1 = \left(\sqrt{\omega_0^2+\delta^2}+\delta\right) - \left(\sqrt{\omega_0^2+\delta^2}-\delta\right) = 2\delta$$

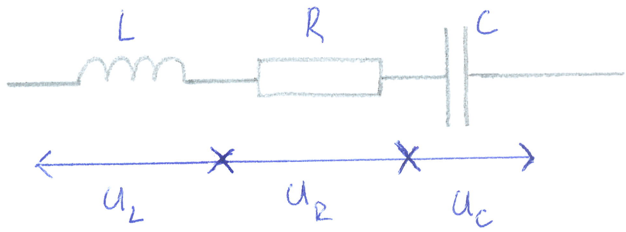
- graficky



Příklad 9.11.

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0 \qquad / :L$$

neboli $\underbrace{U_L + U_R + U_C}_{\text{napětí v RLC obvodu}} = 0$



$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

→ totéž jako $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$x \Leftrightarrow Q$

$2\delta \Leftrightarrow \frac{R}{L}$

$\omega_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{LC}$

$$\delta = \frac{R}{2L} = 10^4\,\Omega H^{-1} = 10^4\,s^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^4\,F^{-\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}} = 10^4\,s^{-1}$$

trénink na jednotky

$\Rightarrow \omega_0 = \delta$ ... mezní aperiodický pohyb

9.11.2.

$\downarrow$

obecné řešení: $$x(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t}$$

$$Q(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t}$$

$$\dot{Q}(t) = -c_1 \delta e^{-\delta t} + c_2 e^{-\delta t} - c_2 \delta t e^{-\delta t}$$

$\downarrow$

počáteční podmínky: $Q(t=0) = Q_0$ ... počáteční náboj na kondenzátoru

$\dot{Q}(t=0) = I_0$ ... počáteční proud v obvodu

$$Q_0 = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = c_1 \quad \Rightarrow \underline{Q_0 = c_1}$$

$$I_0 = -c_1 \delta e^0 + c_2 e^0 - c_2 \delta \cdot 0 e^0$$

$$I_0 = -Q_0 \delta + c_2 \quad \Rightarrow \underline{c_2 = I_0 + Q_0 \delta}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\delta t} + I_0 t e^{-\delta t} + Q_0 \delta t e^{-\delta t}$$

$$\underline{\underline{Q(t) = Q_0 (1 + \delta t) e^{-\delta t} + I_0 t e^{-\delta t}}}$$

$$\underline{\underline{\delta = \frac{R}{2L} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^{-4}\, s^{-1}}}$$