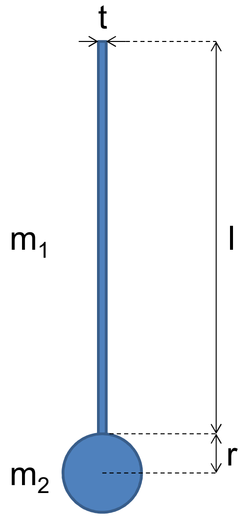
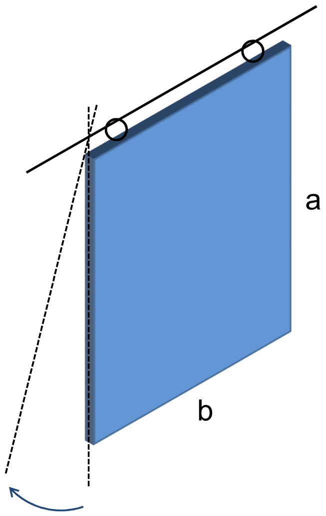
Cvičení 8

1. Hodinové kyvadlo je tvořené tyčí o hmotnosti $m_1 = 1$ kg, délce $l = 100$ cm a šířce $t = 2$ cm a diskem o hmotnosti $m_2 = 3$ kg a poloměru $r = 10$ cm, viz obrázek. Vypočítejte dobu kyvu t tohoto kyvadla



[*řešení:* $t = \pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}m_1 l^2 + \frac{1}{12}m_1 t^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2 + m_2(r+l)^2}{g\left(m_1\frac{l}{2} + m_2 l + m_2 r\right)}} = 1.004$ s]

2. Obdélníková deska o rozměrech a, b je zavěšena na vodorovné tyči podle obrázku. Desku vychýlíme o malý úhel od svislého směru. Tření v závěsech zanedbáváme.
(a) Vypočítejte periodu s jakou periodou T bude kmitat.
(b) Jak se tato perioda změní, vyřízneme-li ve středu desky díru o poloměru R?



[*řešení:* (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$, (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}\sqrt{\frac{ab - \frac{3}{4}\pi R^2\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)}{ab - \pi R^2}}$]

3. Současně rozezvučíme dvě ladičky: jednu s frekvencí $f_1 = 440$ Hz a druhou mírně podladěnou na $f_2 = 435$ Hz. Jaká bude perioda T záznějů?

[*řešení:* $T = \frac{1}{f_1 - f_2} = 0.2$ s]

4. S využitím komplexní reprezentace složte následující kmity: $x_1(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi_1)}$ a $x_2(t) = Be^{i(\omega t + \varphi_2)}$.

[*řešení:* $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \hat{C}e^{i\omega t}, \hat{C} = Ce^{i\alpha}$ (komplexní amplituda);
kde $C = \sqrt{A^2 + 2AB\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + B^2}$ a $\mathrm{tg}\alpha = \frac{A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2}{A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2}$]

5. Vypočítejte časovou závislost výchylky $x(t)$ hmotného bodu, který má v čase $t = 0$ nulovou výchylku a nenulovou rychlost u a koná:
(a) aperiodický pohyb,
(b) mezní aperiodický pohyb,
(c) tlumený harmonický pohyb.

[*řešení:*
(a) $x(t) = \frac{ue^{-\delta t}}{\psi}\sinh(\psi t)$, kde $\psi = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
(b) $x(t) = ut\ e^{-\delta t}$,
(c) $x(t) = \frac{ue^{-\delta t}}{\omega}\sin(\omega t)$, kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$]

6. Ověřte, že funkce $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$ a $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ jsou obecným řešením tlumeného harmonického oscilátoru, tj. splňují rovnici $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Nalezněte vztah mezi konstantami C_1, C_2 a A, φ.

[*řešení:*
$\alpha_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\alpha_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
$C_1 = \frac{A}{2i}e^{i\varphi}$ a $C_2 = -\frac{A}{2i}e^{-i\varphi}$,
$A = \sqrt{4c_1 c_2}$ a $\mathrm{tg}\varphi = \frac{c_1 + c_2}{i(c_1 - c_2)}$]

7. Ověřte, že perioda tlumených kmitů je $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

[*řešení:* Funkce $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ sice není periodická, ale časová vzdálenost sousedních maxim (minim) a dvojnásobek časové vzdálenosti nulových výchylek je přesně $T = \frac{2\pi}{\omega}$.]

8. Tlumený harmonický oscilátor s činitelem jakosti $Q = 1$ koná nucené kmity. Jaká je perioda kmitů oscilátoru, je-li maximální (a) amplituda kmitů, (b) výkon vynucovací síly?

[*řešení:* (a) $T = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\omega_0}$, (b) $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$]

9. Rezonanční křivku $\frac{F_0^2\Omega^2\delta}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2]}$ můžeme v oblasti rezonance $\Omega \approx \omega_0$ aproximovat Lorentziánem $\frac{F_0^2\delta}{4m[(\omega_0-\Omega)^2+\delta^2]}$. Jaká je pološířka w (tj. šířka v polovině maxima) obou křivek?

[*řešení:* $w = 2\delta$ pro rezonanční křivku i pro Lorentzián]

10. Sériový RLC obvod je tvořený rezistorem o odporu $R = 20\ \Omega$, kondenzátorem o kapacitě $C = 10^{-5}$ F a cívkou o indukčnosti $L = 10^{-3}$ H, zapojenými v sérii. Pro elektrický náboj Q poté platí rovnice:

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = 0,$$

analogická rovnici tlumených kmitů. Určete, jaký bude typ časové závislosti elektrického náboje (aperiodický pohyb, mezní aperiodický pohyb nebo tlumené kmity), a napište obecnou závislost elektrického náboje na čase $Q(t)$.

[*řešení:* Závislost náboje Q na čase odpovídá meznímu aperiodickému pohybu danému rovnicí $Q(t) = c_1e^{-\delta t} + c_2te^{-\delta t}$, resp. $Q(t) = Q_0(1+\delta t)e^{-\delta t} + I_0te^{-\delta t}$, kde Q_0 je počáteční náboj na kondenzátoru, I_0 počáteční proud procházející RLC obvodem a $\delta = \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$.]

11. Závaží o hmotnosti $m = 10$ kg visí na závěsu délky $l = 1$ m, jehož hmotnost můžeme zanedbat. Jak se bude lišit perioda kmitů T když toto kyvadlo vychýlíme o úhel $10°$ a $90°$ od svislého směru?

[*řešení:* V aproximaci malých kmitů dostaneme pro obě výchylky periodu $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2.005$ s. Ve skutečnosti ale bude při výchylce $10°$ perioda $T(10°) = 1.002\ T_0 = 2.010$ s a při výchylce $90°$ se prodlouží na hodnotu $T(90°) = 1.18\ T_0 = 2.368$ s.]

Základní vztahy a údaje

Perioda kmitů fyzického kyvadla

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_T+MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{MgR}}$,

kde I_T je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení procházející hmotným středu, I_o je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení o a R značí vzdálenost hmotného středu od osy otáčení o.

Komplexní reprezentace

komplexní exponenciála	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
komplexní čísla	$z = z_1 + iz_2 = \mathrm{Re}[z] + i\mathrm{Im}[z]$
	$z = e^{\alpha} = e^{\alpha_1 + i\alpha_2} = \lvert z\rvert(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$
	$z_1 = \mathrm{Re}[z] = e^{\alpha_1}\cos\alpha_2$
	$z_2 = \mathrm{Im}[z] = e^{\alpha_1}\sin\alpha_2$

Tlumené kmity

pohybová rovnice	$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
aperiodický pohyb ($\delta > \omega_0$)	$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$
	$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
mezní aperiodický pohyb ($\delta = \omega_0$)	$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t}$
tlumené kmity ($\delta < \omega_0$)	$x(t) = A e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$
	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
činitel jakosti	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

Nucené kmity

pohybová rovnice	$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t$
partikulární řešení	$x(t) = A_0\sin(\Omega t + \vartheta)$
amplituda	$A_0(\Omega) = \frac{F_0}{m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1/2}$
fázový posuv	$\mathrm{tg}\vartheta(\Omega) = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$
výkon vynucovací síly	$P_F(\Omega) = \frac{F_0^2\Omega^2\delta}{m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1}$
Lorentzián	$P_F(\Omega) = \frac{F_0^2\delta}{4m}\left[(\Omega - \omega_0)^2 + \delta^2\right]^{-1}$