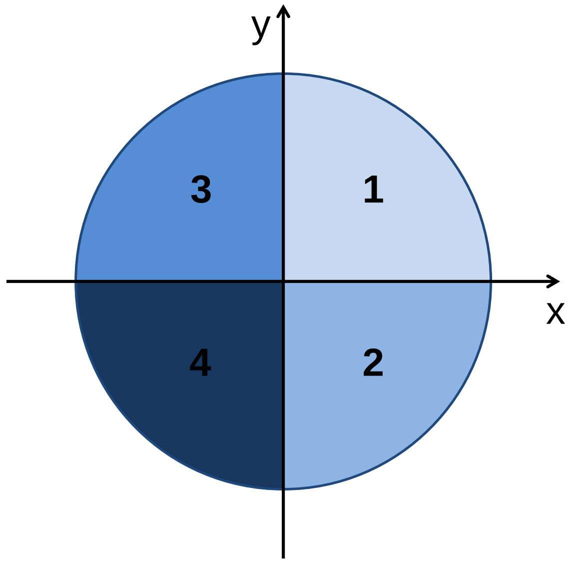
Cvičení 7

1. Disk o poloměru R byl vytvořen slepením 4 čtvrtkruhů vyrobených z různých materiálů. Hustoty materiálů jednotlivých částí jsou v poměru 1:2:3:4 podle obrázku. Najděte hmotný střed tohoto tělesa.



[*řešení:* $[x_T, y_T] = \left[-\frac{8R}{15\pi}, -\frac{4R}{15\pi}\right]$]

2. Vypočítejte polohu hmotného středu homogenní polokoule o poloměru R.
[*řešení:* $[x_T, y_T, z_T] = \left[0, 0, \frac{3}{8}R\right]$, původní koule má střed v počátku soustavy souřadnic a je rozdělena rovinou xy.]

3. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenních těles o hmotnosti M:
(a) tyč o délce L vzhledem k ose kolmé na tyč a procházející jejím koncem,
(b) válec o poloměru podstavy R a výšce h vzhledem k ose procházející středy obou podstav,
(c) kužel o poloměru podstavy R a výšce h vzhledem k ose procházející středem podstavy a vrcholem kuželu,
(d) koule o poloměru R vzhledem k ose procházející jejím středem,
(e) koule o poloměru R vzhledem k ose, která je tečnou k povrchu koule.
[*řešení:* (a) tyč: $J = \frac{1}{3}ML^2$, (b) válec: $J = \frac{1}{2}MR^2$, (c) kužel: $J = \frac{3}{10}MR^2$, (d) koule (střed): $J = \frac{2}{5}MR^2$, (e) koule (tečna): $J = \frac{7}{5}MR^2$]

4. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního kvádru o hmotnosti M a délkách stran a, b, c vzhledem k ose, která je tělesovou úhlopříčkou.
[*řešení:* $J = \frac{1}{6}M\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$]

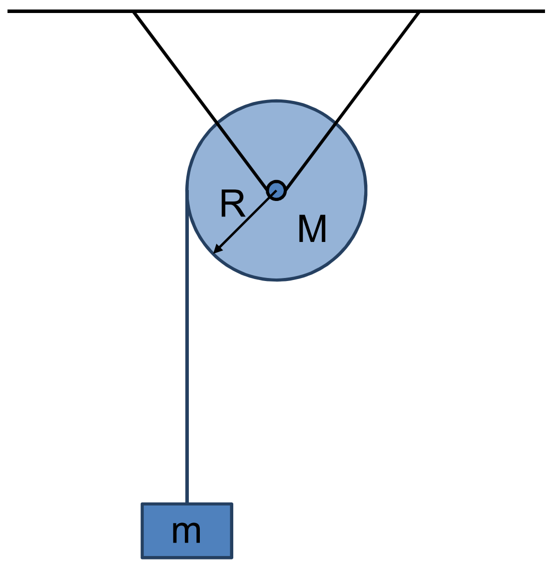
5. Závaží o hmotnosti m se pohybuje po hladké vodorovné ploše stolu. K závaží je přivázána nit, která je vedena malým otvorem ve stole směrem dolů. Na počátku je závaží ve vzdálenosti r_1 od otvoru a pohybuje se po kružnici rychlostí v_1. Potom za nit zespoda zatáhneme a závaží se přiblíží k otvoru na vzdálenost r_2.
(a) Jaká bude rychlost v_2 závaží ve vzdálenosti r_2 od otvoru?
(b) Jakou práci W jsme vykonali při přitažení závaží do vzdálenosti r_2 od otvoru?
(c) Jaká je hmotnost závaží m_2, které bychom museli na nit připevnit, aby poloměr kružnice po níž se pohybuje závaží m zůstával r_2?

[*řešení:* (a) $v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$, (b) $W = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right)$, (c) $m_2 = \frac{m}{g} \frac{v_1^2 r_1^2}{r_2^3}$]

6. Kdyby všechen led na Zemi roztál, střední výška hladiny světového oceánu by se zvedla asi o $h = 61$ m. Odhadněte, jaký by to melo vliv na délku dne. Při odhadu předpokládejte, že všechen led je na pólech, a zanedbáváme nerovnoměrné rozložení oceánů. Zemi si budeme představovat jako dokonalou kouli o poloměru $R = 6371$ km s momentem setrvačnosti $I_0 = 8.1 \times 10^{37}$ kg m^2 vzhledem k ose otáčení procházející jejím středem.

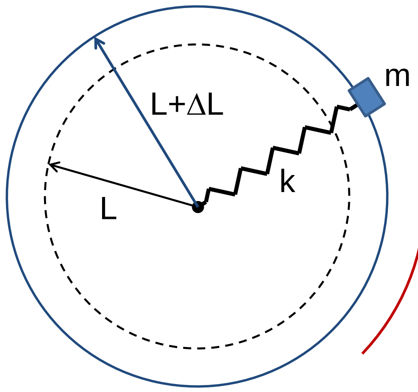
[*řešení:* Den by se prodloužil zhruba o $\Delta T \approx T_0 \frac{8\pi \varrho_v R^4 h}{3 I_0} = 0.9$ s.]

7. Závaží o hmotnosti m je zavěšeno na vlákně namotaném na plném válci o poloměru R a hmotnosti M. Válec se může otáčet okolo vodorovné osy bez tření. Najdete zrychlení závaží m.



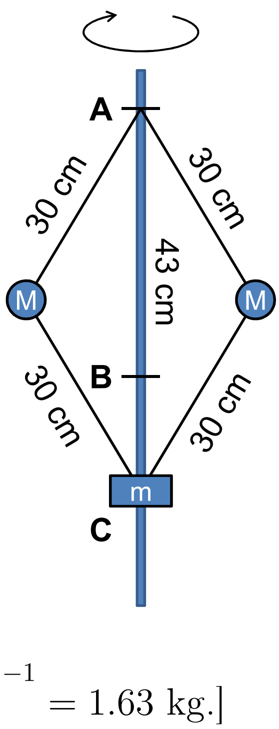
[*řešení:* zrychlení závaží: $a = g \frac{m}{m + \frac{J}{R^2}} = g \frac{m}{m + \frac{M}{2}}$]

8. Závaží o hmotnosti $m = 100$ g upevněné na pružině o zanedbatelné hmotnosti a tuhosti $k = 200$ kg s^{-2} koná rovnoměrný kruhový pohyb naznačený na obrázku. Frekvence otáčení je $f = 5$ Hz. Určete prodloužení pružiny ΔL, pokud je její délka v nenapjatém stavu $L = 10$ cm.



[*řešení:* Pružina se prodlouží o $\Delta L = L\left(\frac{k}{4\pi^2 f^2 m} - 1\right)^{-1} = 9.7$ cm.]

9. Odstředivý Wattův regulátor má vypínat motor když rychlost rotace překročí $f = 120$ ot./min. Objímka C má hmotnost $m = 4$ kg a klouže bez tření po svislé tyči AB. Délka každého ramene regulátoru je $l = 30$ cm. Motor se vypne když objímka C narazí na kontakt B vzdálený od bodu A $d = 43$ cm. Jaká musí být hmotnost závaží M? Hmotnost ramen a tření v kloubech zanedbáme.



[*řešení:* $M = m\left(\frac{4\pi^2 f^2}{g}\frac{d}{2} - 1\right)^{-1} = 1.63$ kg.]

Základní vztahy a údaje

Tuhé těleso

hmotný střed	$\vec{R}_T = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\int_V \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int_V}$
	$x_T = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{1}{V}\int_V x\,\mathrm{d}V$
	$y_T = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{1}{V}\int_V y\,\mathrm{d}V$
	$z_T = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i = \frac{1}{V}\int_V z\,\mathrm{d}V$
moment setrvačnosti	$I = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 = \frac{M}{V}\int_V r_\perp^2\,\mathrm{d}V$
	$r_\perp$ je kolmá vzdálenost od osy otáčení
tenzor setrvačnosti	$I_{ij} = \frac{M}{V}\int_V \left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right)\,\mathrm{d}V$
	$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 + y^2 + z^2$
	$\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$
moment setrvačnosti	$I_\nu = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\nu_i\nu_j$
(vzhledem k obecné ose)	$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$
	$\vec{\nu}$ je jednotkový vektor ve směru osy otáčení
moment hybnosti	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$
moment síly	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\varepsilon} = I\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
2. impulzová věta	$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

Pappova věta (o hmotném středu rovinného útvaru)

$2\pi x_T \cdot S = V,$

kde S je povrch rovinného útvaru, V je objem tělesa, které vznikne jeho rotací, a x_T je kolmá vzdálenost hmotného středu od osy otáčení.

Steinerova věta

$I_o = I_T + MR_T^2,$

kde I_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení o_T procházející hmotným středem tělesa, I_o je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení o, která je rovnoběžná s osou o_T a její kolmá vzdálenost od hmotného středu je R_T.