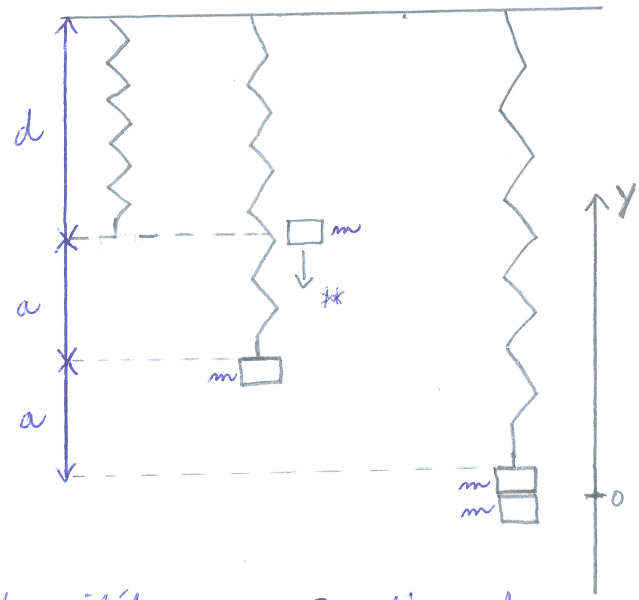
Příklad 6.1.



← rovnovážná poloha dvojitého závaží

• tuhost pružiny

$$mg = ka$$

$$k = \frac{mg}{a}$$

• harmonický oscilátor: $2m\ddot{y} = -ky$

$*$ $\ddot{x} = -\omega^2 x$

$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

$$\omega^2 = \frac{k}{2m}$$

a)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \sqrt{\frac{g}{2a}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

• počáteční podmínky: $y(0) = a$

$v(0) = -v_0$

$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \delta)$

** PRUŽNÁ SRÁŽKA ... ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{hybnost} \\ \text{před}}}{mv} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hybnost} \\ \text{po}}}{2mv_0} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2}v$$

$$s = a = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

$$v = g \cdot t = \sqrt{2ag}$$

$$v_0 = \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{ag}{2}}$$

$$y(0) = a = A\sin\delta \qquad \Rightarrow \quad a = A\sin\delta \quad (1)$$

$$v(0) = -\sqrt{\frac{ag}{2}} = A\sqrt{\frac{g}{2a}}\cos\delta \qquad \Rightarrow \quad -a = A\cos\delta \quad (2)$$

$$(1):(2) \rightarrow \quad -1 = \operatorname{tg}\delta$$

$$\Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}$$

$$x(0) = A \cdot \sin\delta = a$$

$$\underbrace{A \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\sin(-\frac{\pi}{4})} = a \qquad \Rightarrow \quad A = -\sqrt{2}\,a$$

dohromady $y(t) = -\sqrt{2}\,a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $v(t) = -\sqrt{2}\,a \sqrt{\frac{g}{2a}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

- potenciální energie $E_p = \frac{1}{2} k y^2$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{mg}{a}\, 2a^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $E_p = mga \sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

- kinetická energie $E_k = \frac{1}{2} \cdot 2m v^2$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2a^2 \frac{g}{2a} \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $E_k = mga \cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$

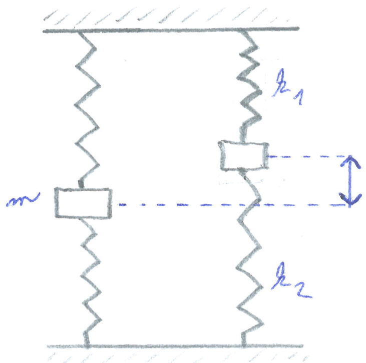
- celková energie $E = E_p + E_k$

c) $E = mga$

$= E_0$ … počáteční energie závaží 1. před upuštěním na závaží 2.

Příklad 6.2.

a) pružiny naproti sobě



y ... výchylka z rovnovážné polohy

$\Rightarrow$ výsledná síla

$$F = F_1 + F_2$$
$$F_1 = -k_1 y$$
$$F_2 = -k_2 y$$

rovnováha
$\Rightarrow$ výsledná síla $F = 0$

... rovnováha tíhové síly a sil pružnosti !!!

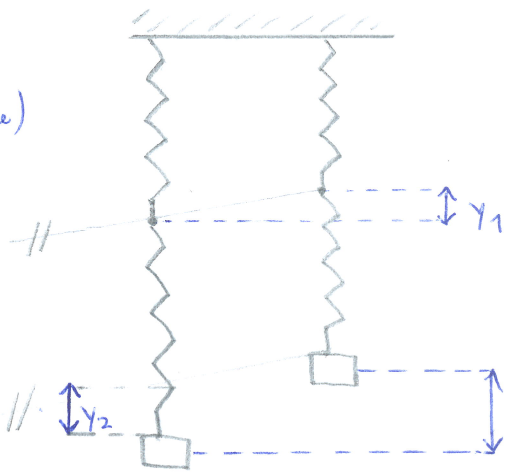
$\Rightarrow$ pohybová rovnice : $\quad m\ddot{y} = -(k_1 + k_2)\, y$

$\rightarrow$ řešení rovnice $\ddot{y} = -\omega^2 y$
má tvar $y = A \sin(\omega t + \delta)$, kde
konstanty A, δ závisí na počátečních podmínkách

$$\Rightarrow \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

b) pružiny za sebou
(stejná úvaha o rovnováze)



$$Y = Y_1 + Y_2$$

výsledná síla
$$F = F_1 = F_2$$
$$F_1 = -k_1 y$$
$$F_2 = -k_2 y$$

$\Rightarrow$ pohybová rovnice : $\quad m\ddot{y} = -k_1 y_1$
$$m\ddot{y} = -k_2 y_2$$

platí $y = y_1 + y_2$

$k_1 y_1 = k_2 y_2$ $\quad \Rightarrow \quad y = y_1 \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)$

$$y_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} y$$

$$y_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} y$$

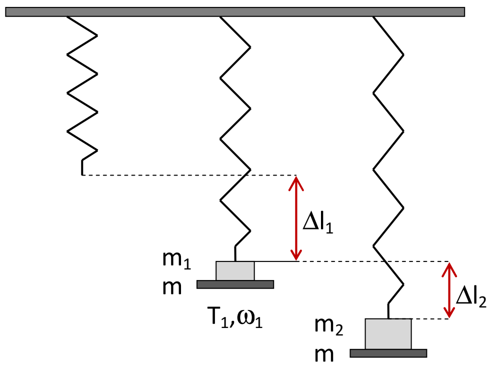
zpět k pohybové rovnici: $\quad m \ddot{y} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y \quad = -k_1 y_1 = -k_2 y_2$

$$\Rightarrow \omega_b = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = 2\pi \sqrt{m \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}}$$

Příklad 6.3

Zadání: Na svislé pružině o zanedbatelné hmotnosti je zavěšena destička o hmotnosti $m = 20$ g a na ní leží závaží o hmotnosti $m_1 = 5$ g. Rozkmitáme-li pružinu, zjistíme, že perioda kmitů je $T_1 = \pi/3$ s. Poté závaží m_1 nahradíme jiným o hmotnosti $m_2 = 25$ g. Jaká je vzdálenost ΔL, o kterou se posune destička vůči předchozí poloze (tj. poloze se závažím m_1)?



Řešení: Pro případ kmitání destičky m a závažíčka m_1 má pro tuhost pružiny k pohybová rovnice tvar:

$$(m + m_1)\ddot{y} = -ky.$$

Řešením této diferenciální rovnice je funkce $y(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi)$, kde konstanty A a φ závisejí na počátečních podmínkách. Úhlová frekvence ω_1 a perioda kmitů T_1 jsou dány jako:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m+m_1}} \\ T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_1}{k}}, \end{aligned}$$

odkud si můžeme vyjádřit tuhost pružiny

$$k = \frac{4\pi^2}{T_1^2}(m + m_1).$$

Nyní sledujme prodloužení pružiny (viz obrázek). Pro destičku m a závažíčko m_1 se pružina prodlouží o Δl_1. Po záměně závažíčka m_2 za m_1 se pružina prodlouží ještě o Δl_2, čili celkové prodloužení je v tomto případě $\Delta l_1 + \Delta l_2$. Vyjádříme-li si toto pomocí rovnic pro rovnováhu sil (rovnováha tíhové síly a síly pružnosti), dostaneme:

$$\begin{aligned} (m + m_1)g &= k\Delta l_1 \\ (m + m_2)g &= k(\Delta l_1 + \Delta l_2) \\ \Delta l_2 &= \frac{(m_2 - m_1)g}{k}. \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti dosazením za tuhost pružiny obdržíme výsledný vztah a číselný výsledek 21.8 cm.

$$\Delta l_2 = \frac{T_1^2}{4\pi^2}\frac{m_2 - m_1}{m + m_1}g$$

Příklad 6.4

Zadání: Na pružinu o zanedbatelné hmotnosti a tuhosti k zavěsíme závaží o hmotnosti m a rozkmitáme jej. Určete periodu T, fázový posuv φ a amplitudu kmitů A, víte-li, že v čase $t = 0$ má závaží kinetickou energii E_{k0} rovnu trojnásobku potenciální energie pružnosti E_{p0}.

Řešení: Obecné řešení pohybu harmonického oscilátoru má tvar:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

kde A, ω a φ značí po řadě amplitudu kmitů, úhlovou frekvenci a fázový posuv. Rychlost $v(t)$ získáme derivací okamžité výchylky $y(t)$ podle času.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Pro úhlovou frekvenci kmitání tělesa o hmotnosti m na pružině s tuhostí k platí známý vztah:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

perioda kmitů je tedy:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Amplitudu kmitů A a fázový posuv φ vypočítáme ze znalosti počátečních podmínek.

$$\begin{aligned} y_0 = y(t=0) &= A \sin\varphi \\ v_0 = v(t=0) &= A\omega \cos\varphi \end{aligned}$$

Fázový posuv dostaneme, vydělíme-li první rovnici druhou. Amplitudu získáme sečtením kvadrátů obou rovnic.

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{v_0} &= \frac{1}{\omega}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \\ \mathrm{tg}\varphi &= \frac{y_0}{v_0}\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 &= A^2 \sin^2\varphi + A^2 \cos^2\varphi \\ A^2 &= y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

Velikost počáteční výchylky y_0 a počáteční rychlosti v_0 spočítáme z počátečních hodnot kinetické a potenciální energie. Kinetická energii závaží E_k a potenciální energie pružnosti E_p jsou dány jako:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2, \\ E_p &= \frac{1}{2}ky^2. \end{aligned}$$

Počáteční výchylka y_0 a počáteční rychlost v_0 jsou tedy:

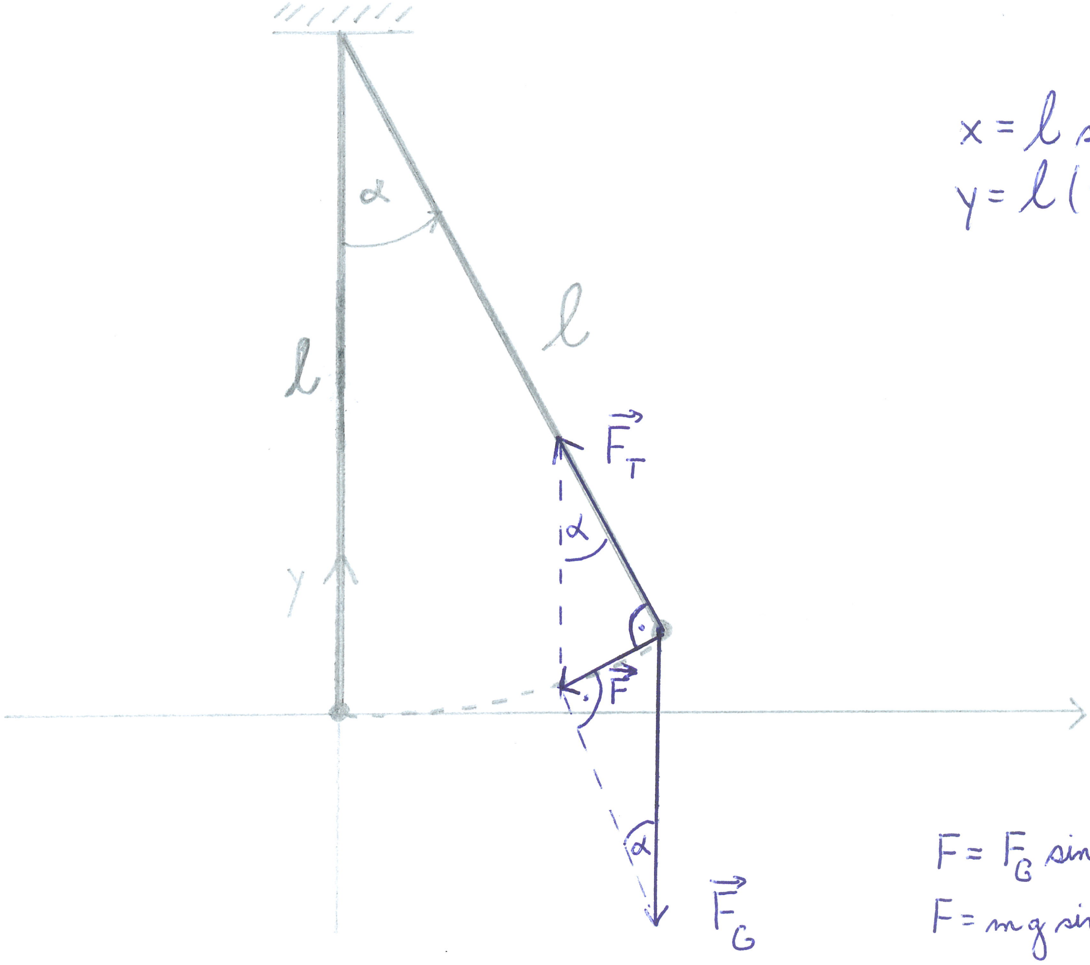
$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{\frac{2E_{p0}}{k}} = \sqrt{\frac{2E_{k0}}{3k}}, \\ v_0 &= \sqrt{\frac{2E_{k0}}{m}}, \end{aligned}$$

kde jsme využili znalosti, že ze zadání platí $E_{k0} = 3E_{p0}$. Dosaďme tedy zpět do předchozích vztahů a vypočítejme fázový posuv a amplitudu.

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\varphi &= \frac{\sqrt{\frac{2E_{k0}}{3k}}}{\sqrt{\frac{2E_{k0}}{m}}}\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \mathrm{tg}\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{6} \\ \varphi_2 &= \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{2E_{k0}}{3k} + \frac{2E_{k0}}{m}\frac{m}{k} \\ A^2 &= \frac{8E_{k0}}{3k} \\ A &= \sqrt{\frac{8E_{k0}}{3k}} \end{aligned}$$

Příklad 6.5.



$x = l \sin\alpha$
$y = l(1-\cos\alpha)$

$F = F_G \sin\alpha$
$F = mg\sin\alpha$

pro malé úhly α :

$\sin\alpha \approx \alpha$
$\cos\alpha \approx 1$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = l\alpha \\ y = l \end{array}\right\}$ pohyb po úsečce

$F = mg\alpha$

2. N. Z. :

$m\vec{a} = \vec{F}$

$m\ddot{x} = -mg\alpha$

$ml\ddot{\alpha} = -mg\alpha \longrightarrow \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\alpha$

– rovnice harmonických kmitů

obecné řešení

$\alpha(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$

→ počáteční podmínky $\alpha(t=0) = \alpha_0 = C_1$

$\dot{\alpha}(t=0) = 0 = C_2$

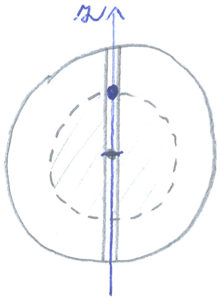
$$\dot{\alpha}(t) = -C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha(0)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$x(t) = l\alpha_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Příklad 6.6.

2. Newtonův zákon: $m\ddot{z} = F$



$$F = -\varkappa \frac{Mm}{R_Z^3} z$$

gravitační síla

na padající těleso působí gravitací pouze „vnitřek Země"

$$F_g = F_g^{h.b.} \cdot \frac{V_{vnitřní}}{V_{celá}} = -\varkappa \frac{Mm}{z^2} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi z^3}{\frac{4}{3}\pi R_Z^3}$$

gravitační síla hmotného bodu

gravitační zrychlení

$$mg = \varkappa \frac{mM}{R_Z^2}$$

$$g = \varkappa \frac{M}{R_Z^2}$$

$$\Rightarrow \quad F = -mg \frac{z}{R_Z}$$

dohromady: $m\ddot{z} = -mg \frac{z}{R_Z}$

– srovnej s harmonickým oscilátorem

$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$$\omega^2 = \frac{g}{R_Z}$$

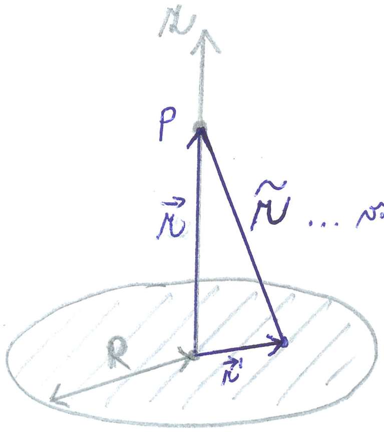
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_Z}}$$

$$\tau = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{g}{R_Z}} \doteq 42 \text{ min}$$

doba letu

6.7.1.

Příklad 6.7.



$\tilde{r} = |\vec{r} - \vec{r}'|$

$\tilde{r}$ ... vzdálenost bodu P od jednotlivých bodů disku

↓

každý vytváří pole

$$d\vec{K} \overset{(*)}{=} -\frac{\varkappa\, dm}{\tilde{r}^3}\,\tilde{r}$$

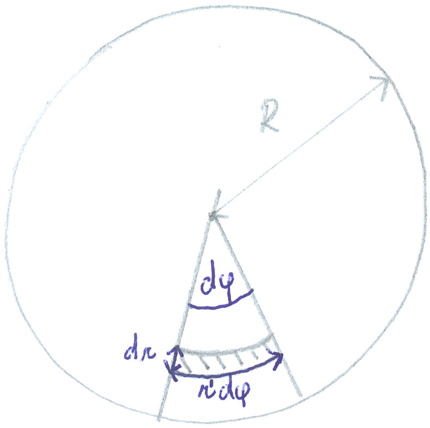
(*) složky pole nerovnoběžné s osou z se odečtou díky symetrii disku

disk: $dm = \sigma \cdot dS$

plošná hustota

plošný element v polárních souřadnicích

$dS = r'\,dr'\,d\varphi$ $\qquad r \in (0, R)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$



$\Downarrow$

$K_x = 0$

$K_y = 0$

$$dK_z = -\frac{\varkappa\, dm}{\tilde{r}^3}\, z = \frac{-\varkappa\, dm}{\sqrt{r'^2 + z^2}^3}$$

$$K_z = \int dK_z = -\int_0^{2\pi}\int_0^R \varkappa \sigma z \frac{r'\,dr'\,d\varphi}{\sqrt{r'^2 + z^2}^3}$$

- $\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi$
- $\int_0^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{r'^2+z^2}^3} = \left[-(r'^2+z^2)^{-1/2}\right]_0^R = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$

dohromady: $K_z = -2\pi \cdot \varkappa \sigma z \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right)$

plošná hustota $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$

$$K_z = \frac{2\varkappa M}{R^2} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1 \right)$$

$$K_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nezávisí na } x,y}}{=} -\frac{d\varphi}{dz} \Rightarrow \varphi(z) = -\int K_z \, dz$$

$$\varphi(z) = -\int \frac{2\varkappa M}{R^2} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1 \right) dz$$

$$\varphi(z) = -\frac{2\varkappa M}{R^2} \left[\sqrt{R^2+z^2} - z \right] + C$$

a) zvolme: $\varphi(z=0) = 0 = -\frac{2\varkappa M}{R^2} \left(\sqrt{R^2+0} - 0 \right) + C \Rightarrow C = \frac{2\varkappa M}{R}$

$$\varphi(z) = -\frac{2\varkappa M}{R} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2} - \frac{z}{R} + 1 \right)$$

b) zvolme: $\varphi(z \to +\infty) = 0 = -\frac{2\varkappa M}{R^2} \left(\sqrt{z^2} - z \right) + C = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$$\varphi(z) = -\frac{2\varkappa M}{R} \left(\sqrt{1+\left(\frac{z}{R}\right)^2} - \frac{z}{R} \right)$$

Příklad 6.8.

- pole homogenního disku (na ose) $K_z = -2\pi\sigma\varkappa\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$

- pole nekonečné homogenní roviny $K_z = -2\pi\sigma\varkappa$

$R \to +\infty$

- pole roviny s dírou ve tvaru disku $K_z = -2\pi\sigma\varkappa - \left(-2\pi\sigma\varkappa\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\right)$

ODEČTEME POLE DISKU

$$K_z = -2\pi\sigma\varkappa + 2\pi\sigma\varkappa - 2\pi\sigma\varkappa\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$K_z = -2\pi\sigma\varkappa\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

* potenciál disku $\varphi(z) = -2\pi\sigma\varkappa\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)$ // nulový potenciál v ∞

* potenciál roviny $\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa z$

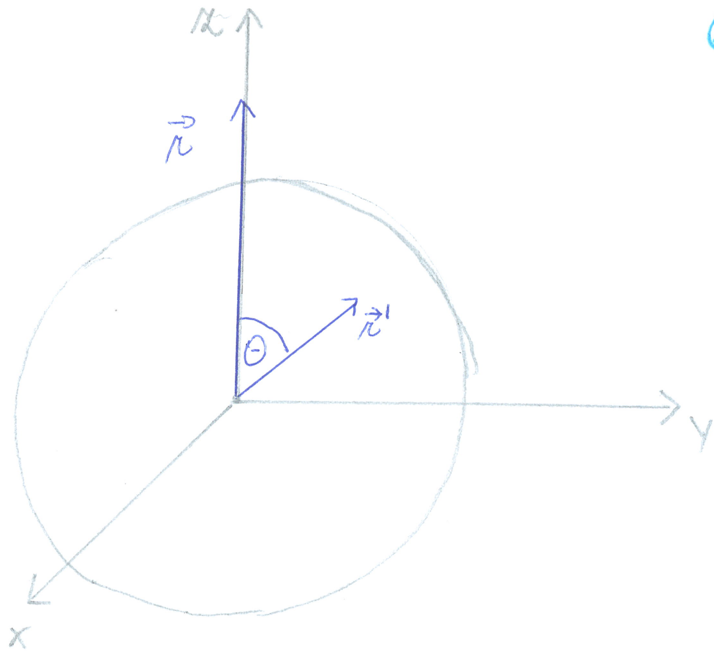
$$K_z = -\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}$$

* potenciál roviny s dírou $\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa z - \left(-2\pi\sigma\varkappa\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)\right)$

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa z + 2\pi\sigma\varkappa\sqrt{R^2+z^2} - 2\pi\sigma\varkappa z$$

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa\sqrt{z^2+R^2}$$

Příklad 6.9.



a) vně koule

* počítáme na ose z

$\vec{r} = (0, 0, z)$

→ pole 1 hmotného bodu o poloze $\vec{r}'$: $\quad d\varphi = -\dfrac{\varkappa\, dm}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

• $dm = \rho\, dV = \rho\, r'^2 \sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi$

↳ objemový element ve sférických souřadnicích

• $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')^2} = \left(r^2 - 2rr'\cos\Theta + r'^2\right)^{1/2} = \left(z^2 - 2zr'\cos\Theta + r'^2\right)^{1/2}$

→ pole vně koule :

$$\varphi = \int\limits_{\underset{\varphi}{\overset{\uparrow}{0}}}^{2\pi} \int\limits_{\underset{\Theta}{\overset{\uparrow}{0}}}^{\pi} \int\limits_{\underset{R}{\overset{\uparrow}{0}}}^{R} -\varkappa\rho\, \frac{r'^2 \sin\Theta}{\left(z^2 - 2zr'\cos\Theta + r'^2\right)^{1/2}}\, d\varphi\, d\Theta\, dr'$$

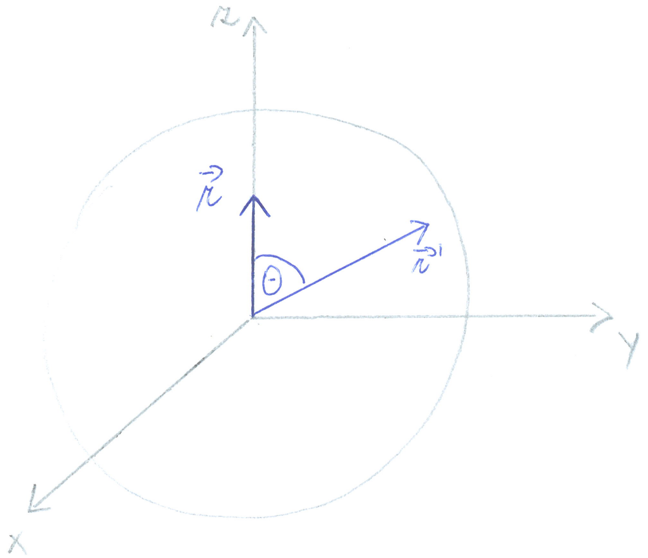
$$\underbrace{\varphi(z) = -2\pi\cdot\varkappa\rho}_{\text{integrál přes } \varphi} \cdot \int_0^R \underbrace{\left[\left(z^2 - 2zr'\cos\Theta + r'\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{zr'}\right]_{\Theta=0}^{\Theta=\pi}}_{\text{integrál přes } \Theta} r'^2\, dr'$$

$$\varphi(z) = -2\pi\varkappa\rho \int_0^R \Big(\underbrace{\sqrt{(z+r')^2}}_{=z+r'} - \underbrace{\sqrt{(z-r')^2}}_{=z-r'}\Big)\cdot\frac{r'}{z}\, dr'$$

$$\varphi(r) = -2\pi\varkappa\rho \int_0^R \frac{r'}{r}\left(r+r'-r+r'\right) dr' = -\frac{4\pi\varkappa\rho}{r}\int_0^R r'^2\, dr'$$

$$\varphi(r) = -\frac{4\pi\varkappa\rho}{r}\cdot\frac{R^3}{3} = -\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}_{M}\cdot\frac{\varkappa}{r} = \underline{\underline{-\frac{\varkappa M}{r}}}$$

b) <u>uvnitř koule</u>



$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} -\varkappa\rho\,\frac{r'^2\sin\Theta}{\left(r^2-2rr'\cos\Theta+r'^2\right)^{1/2}}\, d\varphi\, d\Theta\, dr'$$

$$\varphi(r) = -2\pi\varkappa\rho\int_0^R\left(\underbrace{\sqrt{(r+r')^2}}_{=|r+r'|} - \underbrace{\sqrt{(r-r')^2}}_{=|r-r'|}\right)\frac{r'}{r}\, dr'$$

stejné jako v(a)

musíme rozdělit meze integrace

$$\varphi(r) = -2\pi\varkappa\rho\left\{\int\limits_{\substack{0\\ r>r'}}^{r}\frac{r'}{r}\left(r+r'-\underline{\underline{(r-r')}}\right)dr' + \int\limits_{\substack{r\\ r<r'}}^{R}\frac{r'}{r}\left(r+r'-\underline{\underline{(r'-r)}}\right)dr'\right\}$$

$$\varphi(z) = -2\pi \varkappa \rho \left\{ \int_0^z \frac{2r'^2}{z} dr' + \int_z^R 2 r' dr' \right\}$$

$$\varphi(z) = -2\pi \varkappa \rho \left\{ \left[\frac{2r'^3}{3z} \right]_0^z + \left[r'^2 \right]_z^R \right\}$$

$$\varphi(z) = -2\pi \varkappa \rho \left(\frac{2}{3} z^2 + R^2 - z^2 \right) = -2\pi \varkappa \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \left(R^2 - \frac{1}{3} z^2 \right)$$

$$\underline{\varphi(z) = -\frac{\varkappa M}{2R^3} \left(3R^2 - z^2 \right)}$$

c) <u>zobecnění</u>

* počítáno pro $r = (0, 0, z)$

=> potenciál vně koule: $\underline{\varphi(\vec{r}) = -\frac{\varkappa M}{r}}$

potenciál uvnitř koule: $\underline{\varphi(\vec{r}) = -\frac{\varkappa M}{2R^3} \left(3R^2 - r^2 \right)}$

d) <u>intenzita pole</u>

$\vec{K} = -\nabla \varphi$ => intenzita vně koule $\underline{\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\varkappa M}{r^3} \vec{r}}$

intenzita uvnitř koule $\underline{\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\varkappa M}{R^3} \vec{r}}$

výpočet intenzity

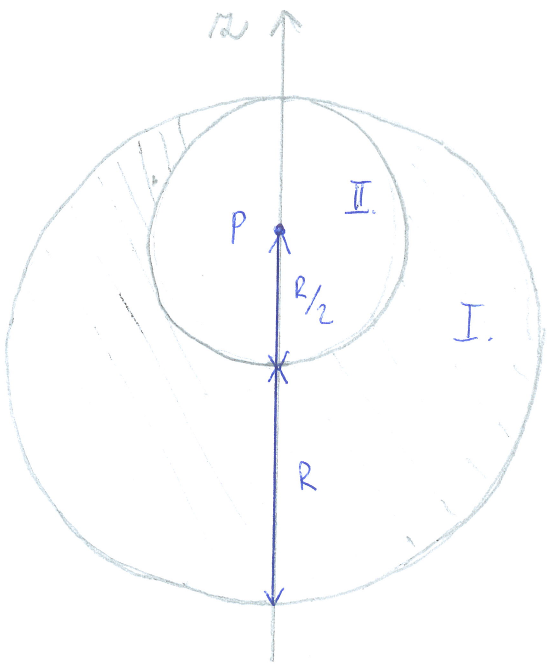
vně: $K_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\varkappa M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = +\varkappa M \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \cdot 2x$

$$\left.\begin{aligned} K_x &= -\frac{\varkappa M}{r^3}\,x \\ \text{podobně} \quad K_y &= -\frac{\varkappa M}{r^3}\,y \\ K_z &= -\frac{\varkappa M}{r^3}\,z \end{aligned}\right\} \quad \vec{K} = -\frac{\varkappa M}{r^3}\,\vec{r}$$

uvnitř: $K_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\varkappa M}{2R^3}\left(3R^2 - x^2 - y^2 - z^2\right)\right) = \frac{\varkappa M}{2R^3}\,(-2x)$

$$\left.\begin{aligned} K_x &= -\frac{\varkappa M}{R^3}\,x \\ \text{podobně:} \quad K_y &= -\frac{\varkappa M}{R^3}\,y \\ K_z &= -\frac{\varkappa M}{R^3}\,z \end{aligned}\right\} \quad \vec{K} = -\frac{\varkappa M}{R^3}\,\vec{r}$$

Příklad 6.10.



potenciál uvnitř homogenní koule: $\varphi(r) = -\frac{\varkappa M}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right)$

I. plná koule: $R_I = R$ $\quad r_I = R/2$ $\quad M_I = M$

$$\Rightarrow \varphi_I(P) = -\frac{\varkappa M}{2R^3}\left(3R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = -\frac{\varkappa M}{R} \cdot \frac{11}{8}$$

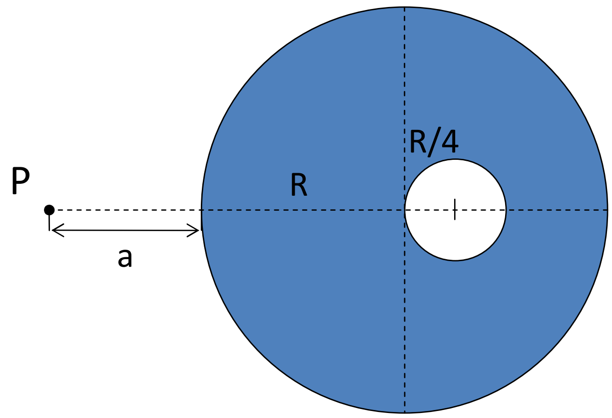
II. dutina: $R_{II} = R/2$ $\quad r_{II} = 0$ $\quad M_{II} = \frac{1}{8}M$

$$\Rightarrow \varphi_{II}(P) = -\frac{\varkappa M/8}{2\left(\frac{R}{2}\right)^3}\left(3(R/2)^2 - 1\right) = \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{\varkappa M}{R}\right)$$

$\Rightarrow$ koule s dutinou $\varphi(P) = \varphi_I - \varphi_{II} = -\frac{\varkappa M}{R} \cdot \left(\frac{11}{8} - \frac{3}{8}\right) = \underline{\underline{-\frac{\varkappa M}{R}}}$

Příklad 6.11

Zadání: Uvnitř koule o poloměru R a hustotě ϱ je kulová dutina o poloměru $R/4$ ve vzdálenosti $R/4$ od středu koule (viz obrázek který je řezem v rovině procházející středy obou koulí). Jaká je velikost gravitačního zrychlení v bodě P (vzdálenost a od povrchu koule), když pro stejnou kouli, ale bez dutiny je v bodě P velikost gravitačního zrychlení g?



Řešení: Jak známo gravitační pole (intenzita a potenciál) homogenní plné koule o hmotnosti M vně této koule má stejný tvar jako gravitační pole hmotného bodu o stejné hmotnosti M umístěného do jejího středu. Hodnota x-ové složky intenzity gravitačního pole velké koule bez dutiny v bodě P je tedy:

$$K_x^{(1)}(P) = \frac{\kappa M}{(a+R)^2} = g.$$

Pro malou kouli na místě a o velikosti dutiny má x-ová složka intenzity gravitačního pole v bodě P velikost:

$$K_x^{(2)}(P) = \frac{\kappa m}{\left(a + R + \frac{R}{4}\right)^2}.$$

Poznamenejme, že z důvodu symetrie je y-ová i z-ová složka obou intenzit gravitačního pole nulová.

Mezi hmotnostmi m malé koule a M velké koule platí vztah:

$$m = \varrho V_2 = M\frac{V_2}{V_1} = M\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{64}$$

Výsledná hledaná hodnota x-ové složky intenzity gravitačního pole v bodě P pro zadanou kouli s dutinou je rovna rozdílu intenzit $K_x^{(1)}(P)$ a $K_x^{(2)}(P)$.

$$\begin{aligned}
K_x(P) &= K_x^{(1)}(P) - K_x^{(2)}(P) = \frac{\kappa M}{(a+R)^2} - \frac{\kappa m}{\left(a + \frac{5}{4}R\right)^2} \\
K_x(P) &= \frac{\kappa M}{(a+R)^2}\left(1 - \frac{(a+R)^2}{64\left(a+\frac{5}{4}R\right)^2}\right) \\
K_x(P) &= g\left[1 - \left(\frac{a+R}{8a+10R}\right)^2\right]
\end{aligned}$$