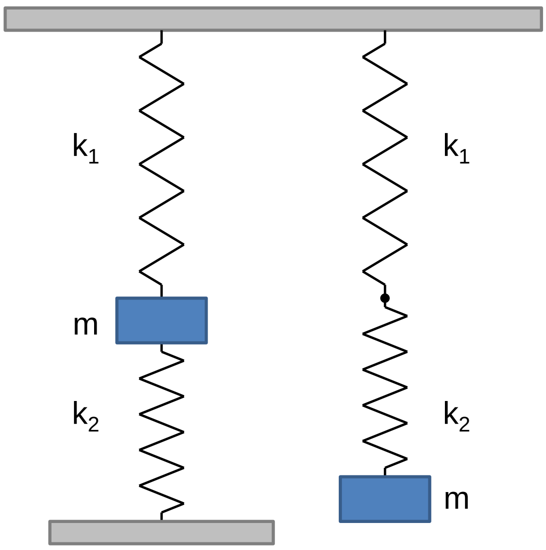
# Cvičení 6

1. Zavěšená pružina má v nenapjatém stavu délku $d$. Upevníme-li na její konec závaží o hmotnosti $m$, prodlouží se na délku $d + a$. Na závaží, které je v klidu, dopadne z výšky $a$ druhé závaží o téže hmotnosti a spojí se s ním.
(a) Najděte periodu $T$ a amplitudu $A$ kmitů takové soustavy.
(b) Najděte časový průběh polohy $x(t)$ obou závaží při tomto pohybu.
(c) Vypočítejte potenciální, kinetickou a celkovou energii oscilátoru.

[*řešení:*
(a) perioda: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, amplituda: $A = a\sqrt{2}$
(b) rovnice pohybu: $x(t) = -a\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$
(c) potenciální energie: $E_p = mga\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$,
kinetická energie: $E_k = mga\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$, celková energie: $E = mga$]

2. Jaká bude perioda kmitů $T$ závaží o hmotnosti $m$ zavěšeného na pružinách s tuhostmi $k_1$ a $k_2$ podle obrázku?




[*řešení:* uspořádání vlevo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, uspořádání vpravo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{k_1k_2}}$]

3. Na svislé pružině o zanedbatelné hmotnosti je zavěšena destička o hmotnosti $m = 20$ g a na ní leží závaží o hmotnosti $m_1 = 5$ g. Rozkmitáme-li pružinu, zjistíme, že perioda kmitů je $T_1 = \pi/3$ s. Poté závaží $m_1$ nahradíme jiným o hmotnosti $m_2 = 25$ g. Jaká je vzdálenost $\Delta L$, o kterou se posune destička vůči předchozí poloze (tj. poloze se závažím $m_1$)?

[*řešení:* $\Delta L = \frac{T_1^2}{4\pi^2}\frac{m_2-m_1}{m+m_1}g = 21.8$ cm]

4. Na pružinu o zanedbatelné hmotnosti a tuhosti $k$ zavěsíme závaží o hmotnosti $m$ a rozkmitáme jej. Určete periodu $T$, fázový posuv $\varphi$ a amplitudu kmitů $A$, víte-li, že v čase $t = 0$ má závaží kinetickou energii $E_{k0}$ rovnu trojnásobku potenciální energie pružnosti $E_{p0}$.

[*řešení:* perioda $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, fázový posuv $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$, amplituda $A = \sqrt{\frac{8E_{k0}}{3k}}$]

5. Představte si, že jsme vyvrtali do Země tunel vedoucí od jednoho pólu k druhému. Na jednom pólu jsme do něj upustili těleso. Za jakou dobu $t$ propadne na druhou stranu zeměkoule?

[*řešení:* $t = \pi\sqrt{R_Z/g} = 42$ min]

6. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole homogenního disku o poloměru $R$ a hmotnosti $M$ v ose tohoto disku kolmé na rovinu disku.

[*řešení:* intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = \frac{2GM}{R^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{z}{|z|}\right)$,
potenciál: $\varphi = -\frac{2GM}{R}\left(\sqrt{\frac{z^2}{R^2}+1} - \frac{|z|}{R}\right)$.]

7. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole nekonečné homogenní roviny s kruhovou dírou o poloměru $R$ v přímce kolmé na tuto rovinu a procházející středem kruhového otvoru.

[*řešení:* intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = -2\pi\mu G\frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}$,
potenciál: $\varphi = 2\pi\mu G\left(\sqrt{z^2+R^2} - R\right)$, kde $\mu$ je plošná hustota roviny. Nulová hladina potenciálu byla zvolena v $z = 0$ ]

8. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole v ose tenké duté homogenní koule o poloměru $R$, tloušťce $t$ a hmotnosti $M$. Předpokládejte, že $t \ll R$.

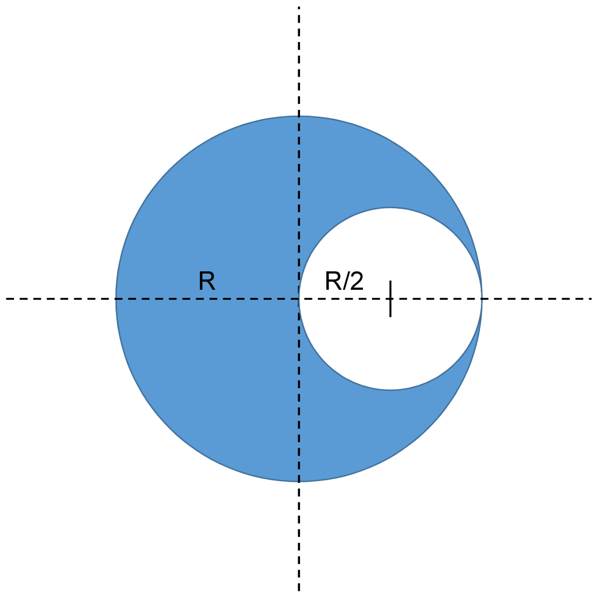
[*řešení:*
uvnitř koule ($r < R$): $\vec{K}(\vec{r}) = (0, 0, 0)$, $\varphi(\vec{r}) = -\frac{GM}{R}$;
vně koule ($z \geq R$): $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}$, $\varphi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}$.]

9. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole v ose homogenní koule o poloměru $R$ a hmotnosti $M$.

[*řešení:*
uvnitř koule ($r < R$): $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{GM\vec{r}}{R^3}$, $\varphi(\vec{r}) = -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2)$;

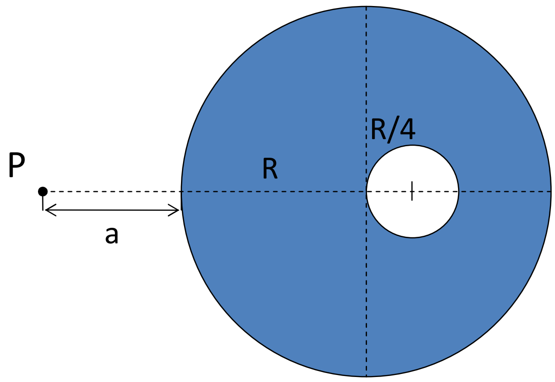
vně koule ($z \geq R$): $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}$, $\varphi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}$.]

10. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole ve středu kulové díry v homogenní kouli o poloměru $R$, viz obrázek.




[*řešení:* intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = -\frac{GM}{2R^2}$,
potenciál: $\varphi = -\frac{GM}{R}$, kde $M$ je hmotnost celé plné koule.]

11. Uvnitř koule o poloměru $R$ a hustotě $\varrho$ je kulová dutina o poloměru $R/4$ ve vzdálenosti $R/4$ od středu koule (viz obrázek který je řezem v rovině procházející středy obou koulí). Jaká je velikost gravitačního zrychlení v bodě P (vzdálenost $a$ od povrchu koule), když pro stejnou kouli, ale bez dutiny je v bodě P velikost gravitačního zrychlení $g$?




[*řešení:* $a_g(P) = K(P) = g\left[1 - \left(\frac{a+R}{8a+10R}\right)^2\right]$]

# Základní vztahy a údaje

Harmonické kmity

| | |
|---|---|
| pohybová rovnice | $\ddot{x} = -\omega^2 x$ |
| obecné řešení | $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ |
| | $v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$ |
| síla pružiny | $F = -kx$ |
| úhlová frekvence kmitů | $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ |
| perioda kmitů | $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ |
| potenciální energie pružnosti | $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ |
| kinetická energie oscilátoru | $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ |
| celková energie oscilátoru | $E = E_p + E_k = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ |

Gravitační pole hmotného bodu

| | |
|---|---|
| intenzita gravitačního pole | $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r}$ |
| | $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{Gm}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}(\vec{r} - \vec{r}')$ |
| potenciál gravitačního pole | $\varphi(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r}$ |
| | $\varphi(\vec{r}) = -\frac{Gm}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$ |
| vztah intenzity a potenciálu | $\vec{K}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$ |
| | $K_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ |
| | $K_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ |
| | $K_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ |

Gravitační pole tělesa

| | |
|---|---|
| intenzita gravitačního pole | $\vec{K}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}\vec{K}$ |
| | $\vec{K}(\vec{r}) = \int_V -G\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}\varrho\,\mathrm{d}V'$ |
| potenciál gravitačního pole | $\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}\varphi$ |
| | $\varphi(\vec{r}) = \int_V -G\frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}\varrho\,\mathrm{d}V'$ |