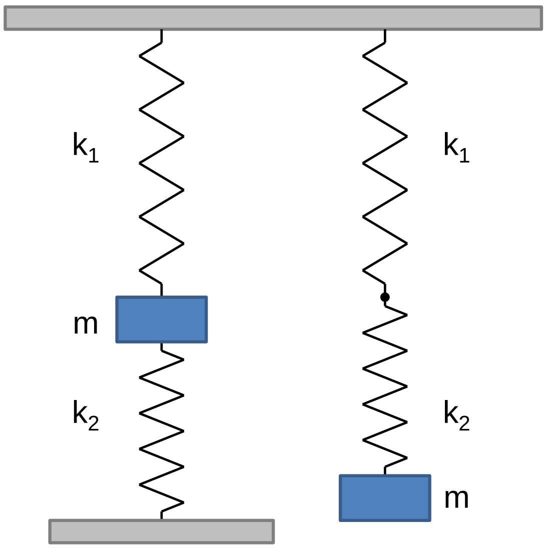
Cvičení 6

1. Zavěšená pružina má v nenapjatém stavu délku d. Upevníme-li na její konec závaží o hmotnosti m, prodlouží se na délku $d + a$. Na závaží, které je v klidu, dopadne z výšky a druhé závaží o téže hmotnosti a spojí se s ním.
(a) Najděte periodu T a amplitudu A kmitů takové soustavy.
(b) Najděte časový průběh polohy $x(t)$ obou závaží při tomto pohybu.
(c) Vypočítejte potenciální, kinetickou a celkovou energii oscilátoru.

[*řešení:*
(a) perioda: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, amplituda: $A = a\sqrt{2}$
(b) rovnice pohybu: $x(t) = -a\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$
(c) potenciální energie: $E_p = mga\sin^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$,
kinetická energie: $E_k = mga\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{2a}}\,t - \frac{\pi}{4}\right)$, celková energie: $E = mga$]

2. Jaká bude perioda kmitů T závaží o hmotnosti m zavěšeného na pružinách s tuhostmi k_1 a k_2 podle obrázku?



[*řešení:* uspořádání vlevo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, uspořádání vpravo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{k_1k_2}}$]

3. Na svislé pružině o zanedbatelné hmotnosti je zavěšena destička o hmotnosti $m = 20$ g a na ní leží závaží o hmotnosti $m_1 = 5$ g. Rozkmitáme-li pružinu, zjistíme, že perioda kmitů je $T_1 = \pi/3$ s. Poté závaží m_1 nahradíme jiným o hmotnosti $m_2 = 25$ g. Jaká je vzdálenost ΔL, o kterou se posune destička vůči předchozí poloze (tj. poloze se závažím m_1)?

[*řešení:* $\Delta L = \frac{T_1^2}{4\pi^2}\frac{m_2-m_1}{m+m_1}g = 21.8$ cm]

4. Na pružinu o zanedbatelné hmotnosti a tuhosti k zavěsíme závaží o hmotnosti m a rozkmitáme jej. Určete periodu T, fázový posuv φ a amplitudu kmitů A, víte-li, že v čase $t = 0$ má závaží kinetickou energii E_{k0} rovnu trojnásobku potenciální energie pružnosti E_{p0}.

[*řešení:* perioda $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, fázový posuv $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$, amplituda $A = \sqrt{\frac{8E_{k0}}{3k}}$]

5. Na závěsu délky l visí závaží o hmotnosti m. Hmotnost závěsu můžeme vzhledem ke hmotnosti závaží zanedbat. Vychýlíme závěs o malý úhel α_0 od svislého směru a pustíme. Napište rovnici pohybu, který bude závaží vykonávat.

[*řešení:* V aproximaci malých úhlů platí $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$ a závaží koná pohyb $x(t) = l\alpha_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t)$ (matematické kyvadlo).]

6. Představte si, že jsme vyvrtali do Země tunel vedoucí od jednoho pólu k druhému. Na jednom pólu jsme do něj upustili těleso. Za jakou dobu t propadne na druhou stranu zeměkoule?

[*řešení:* $t = \pi\sqrt{R_Z/g} = 42$ min]

7. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole homogenního disku o poloměru R a hmotnosti M v ose tohoto disku kolmé na rovinu disku.

[*řešení:* intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = \frac{2\kappa M}{R^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right)$,
potenciál: $\varphi = -\frac{2\kappa M}{R}\left(\sqrt{\frac{z^2}{R^2} + 1} - \frac{z}{R}\right)$.]

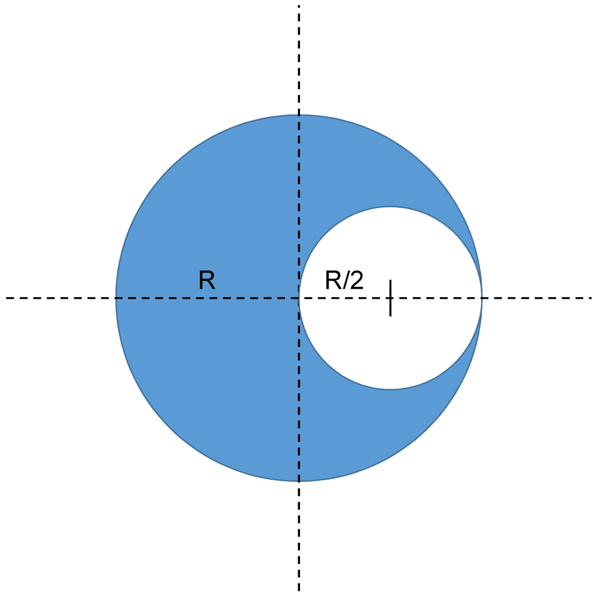
8. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole nekonečné homogenní roviny s kruhovou dírou o poloměru R v přímce kolmé na tuto rovinu a procházející středem kruhového otvoru.

[*řešení:* intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = -2\pi\sigma\kappa\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$,
potenciál: $\varphi = 2\pi\sigma\kappa\sqrt{z^2 + R^2}$, kde σ je plošná hustota roviny.]

9. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole v ose homogenní koule o poloměru R a hmotnosti M.

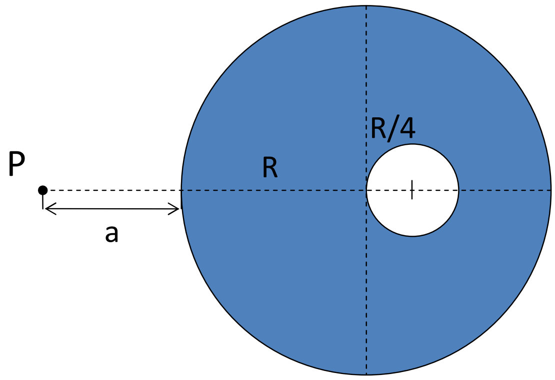
[*řešení:*
uvnitř koule ($r < R$): $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa M \vec{r}}{R^3}$, $\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{2R^3}(3R^2 - r^2)$;
vně koule ($z \geq R$): $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa M \vec{r}}{r^3}$, $\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{r}$.]

10. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole ve středu kulové díry v homogenní kouli o poloměru R, viz obrázek.



[*řešení:* intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = -\frac{\kappa M}{2R^2}$,
potenciál: $\varphi = -\frac{\kappa M}{R}$, kde M je hmotnost celé plné koule.]

11. Uvnitř koule o poloměru R a hustotě ϱ je kulová dutina o poloměru $R/4$ ve vzdálenosti $R/4$ od středu koule (viz obrázek který je řezem v rovině procházející středy obou koulí). Jaká je velikost gravitačního zrychlení v bodě P (vzdálenost a od povrchu koule), když pro stejnou kouli, ale bez dutiny je v bodě P velikost gravitačního zrychlení g?



[*řešení:* $a_g(P) = K(P) = g\left[1 - \left(\frac{a+R}{8a+10R}\right)^2\right]$]

Základní vztahy a údaje

Harmonické kmity

pohybová rovnice	$\ddot{x} = -\omega^2 x$
obecné řešení	$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$
	$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$
síla pružiny	$F = -kx$
úhlová frekvence kmitů	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
perioda kmitů	$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
potenciální energie pružnosti	$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$
kinetická energie oscilátoru	$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$
celková energie oscilátoru	$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

Gravitační pole hmotného bodu

intenzita gravitačního pole	$\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{r^3}\vec{r}$
	$\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}(\vec{r} - \vec{r}')$
potenciál gravitačního pole	$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{r}$
	$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$
vztah intenzity a potenciálu	$\vec{K}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$
	$K_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$
	$K_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$
	$K_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

Gravitační pole tělesa

intenzita gravitačního pole	$\vec{K}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}\vec{K}$
	$\vec{K}(\vec{r}) = \int_V -\kappa\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}\varrho\,\mathrm{d}V'$
potenciál gravitačního pole	$\varphi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}\varphi$
	$\varphi(\vec{r}) = \int_V -\kappa\frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}\varrho\,\mathrm{d}V'$