Příklad 4.1.

• maximální výška $\quad y_{max} = s_1 + s_2$

$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$ ... zrychlený pohyb (raketový pohon)

$s_2 = v_1 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$ ... zpomalený pohyb (po vypnutí motoru)

$a = 2g$
$t_1 = 50\,s$

$\Rightarrow s_1 = g t_1^2 \qquad v_1 = a t_1 = 2 g t_1$

$v_2 = 0 = v_1 - g t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_1}{g} = 2 t_1$

$\Rightarrow s_2 = 4 g t_1^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 g t_1^2 = 2 g t_1^2$

$\Rightarrow y_{max} = 3 g t_1^2 = 73{,}6\ km$

• celková doba letu (+ volný pád)

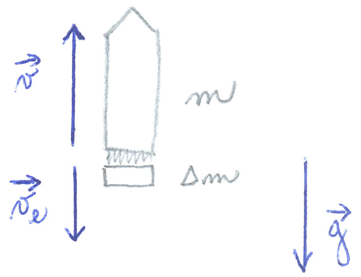
$t = t_1 + t_2 + t_3$

$t_1 = 50\,s$, $t_2 = 2 t_1$

$y_{max} = \frac{1}{2} g t_3^2 \Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2 y_{max}}{g}} = \sqrt{6}\, t_1$

$t = (3 + \sqrt{6})\, t_1 = 272{,}5\,s$

Ciolkovského rovnice



rychlost výtoku plynů

$$gT + \Delta V = v_e \ln \frac{m_0}{m_1}$$

m_0 → hmotnost rakety na startu

m_1 → hmotnost rakety na konci (bez paliva)

ΔV – změna rychlosti, získaná pohonem rakety během doby T

$T = t_1$

$\Delta V = v_1 = 2g t_1$ $\Rightarrow$ $\eta = \frac{m_0 - m_1}{m_0} = 1 - \frac{m_1}{m_0}$

η – hmotnost paliva / hmotnost rakety

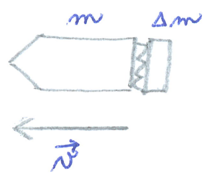
$v_e = 5000\ m/s$

$$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{3g t_1}{v_e}\right) = 25{,}5\,\%$$

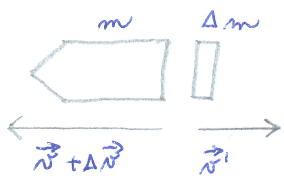
$$\ln \frac{m_1}{m_0} = -\frac{3g t_1}{v_e}$$

Ciolkovského rovnice

t:



$t+\Delta t$:



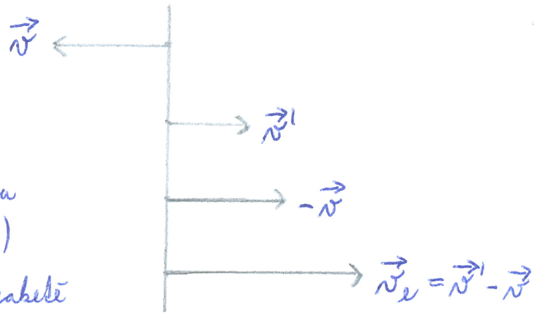
změna hybnosti: $\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)$

$$\Delta\vec{p} = m\cdot(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + \Delta m\cdot\vec{v}' - (m+\Delta m)\cdot\vec{v}$$

$$\Delta\vec{p} = m\cdot\Delta\vec{v} + \Delta m\,\underbrace{(\vec{v}'-\vec{v})}_{\vec{v}_e}$$

... rychlost výtoku spalin (paliva)

... konst. vůči raketě



$$\Delta\vec{p} = m\cdot\Delta\vec{v} + \Delta m\cdot\vec{v}_e$$

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\,\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\,\vec{v}_e$$

$\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}+\Delta\vec{v}-\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m+\Delta m-m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m(t)-m(t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{dm}{dt} \quad (!)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\,\vec{v}_e$$

a) bez gravitace

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$0 = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt}$$

$$\vec{v}_e \frac{1}{m} dm = d\vec{v}$$

konečná hmotnost

konečná rychlost

$$\int_{m_0}^{m_1} \vec{v}_e \frac{1}{m} dm = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d\vec{v}$$

počáteční rychlost

počáteční hmotnost

$$\vec{v}_e \ln \frac{m_1}{m_0} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \Delta\vec{v}$$

vektorově: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_e \ln \frac{m_1}{m_0}$

skalárně: $\Delta v = v_e \ln \frac{m_0}{m_1}$ – Ciolkovského rovnice (bez gravitace)

b) s gravitací

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m\vec{g}$$

$$m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e \frac{dm}{dt}$$

$$\vec{v}_e \frac{1}{m} dm = d\vec{v} - \vec{g}\,dt$$

$$\int_{m_0}^{m_1} \vec{v}_e \frac{1}{m} dm = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d\vec{v} - \int_0^{\tau} \vec{g}\,dt$$

→ doba letu

$$\vec{v}_e \ln \frac{m_1}{m_0} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 - \vec{g}\tau = \Delta\vec{v} - \vec{g}\tau$$

vektorově: $\Delta\vec{v} - \vec{g}\cdot\tau = \vec{v}_e \ln \frac{m_1}{m_0}$

skalárně: $\Delta v + g\cdot\tau = v_e \ln \frac{m_0}{m_1}$ – Ciolkovského rovnice (s gravitací)

Příklad 4.2

- $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$\vec{F}_1 = -\frac{h}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ ... přitažlivá síla (do počátku)

$\vec{F}_2 = \frac{k}{r^6}\frac{\vec{r}}{r}$ ... odpudivá síla (od počátku)

$\vec{F}_3 = -l v \frac{\vec{v}}{v}$ ... tlumicí síla (proti pohybu)

- rovnovážná poloha

$$\left.\begin{array}{l} r = r_0 \\ v = 0 \\ F = 0 \end{array}\right\} \quad F_1 - F_2 = 0$$

$$\frac{h}{r_0^2} - \frac{k}{r_0^6} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \sqrt[4]{k/h} = 1{,}78\,m$$

- pro numerické řešení:

počáteční podmínky $x_0 = 1\,m$
$v_0 = 0\,m/s$

poloha $x(t+dt) = x(t) + v_x(t)\,dt$
$r = x(t+dt)$

rychlost $v_x(t+dt) = v_x(t) + \frac{1}{m}\left(-\frac{h}{r^2} + \frac{k}{r^6}\right)\mathrm{sgn}(r)\,dt$
$+ \frac{1}{m}\left(-l\,v_x(t)\right)dt$

znaménko r

Příklad 4.3.

• gravitační zrychlení
(Newtonův gravitační zákon)

$$a_g = \frac{F_g}{m}$$

$$F_g = \varkappa \frac{m M_Z}{r^2} = \varkappa \frac{m M_Z}{(h+R)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{a_g = \frac{\varkappa M_Z}{(h+R)^2}} \doteq \underline{8{,}7 \ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

vzdálenost ISS od středu Země

• dostředivé zrychlení
(kruhový pohyb)

$$a_d = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$v = r \cdot \omega$ $\quad$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_d = a_g \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{\varkappa M_Z}{r^2}$$

stav bez tíže

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa M_Z} \quad ⊛$$

$$\underline{T = 2\pi \sqrt{\frac{(h+R)^3}{\varkappa M_Z}}} \doteq \underline{5557{,}5 \ \mathrm{s}}$$

$$T \doteq 1{,}5 \ \mathrm{h}$$

$$f \doteq 15{,}5 \text{ oběhů / den}$$

⊛ $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\varkappa M_Z} = \text{konst.}$ (3. Keplerův zákon)

Příklad 4.4.

gravitační zrychlení $F_g = mg = \varkappa \frac{mM}{R^2}$

Země $g_Z = \varkappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$

Měsíc $g_M = \varkappa \frac{M_M}{R_M^2}$

$$\Rightarrow g_M = g_Z \frac{M_M}{M_Z} \frac{R_Z^2}{R_M^2}$$

$$g_M = 1{,}63\ m s^{-2}$$

$\uparrow$

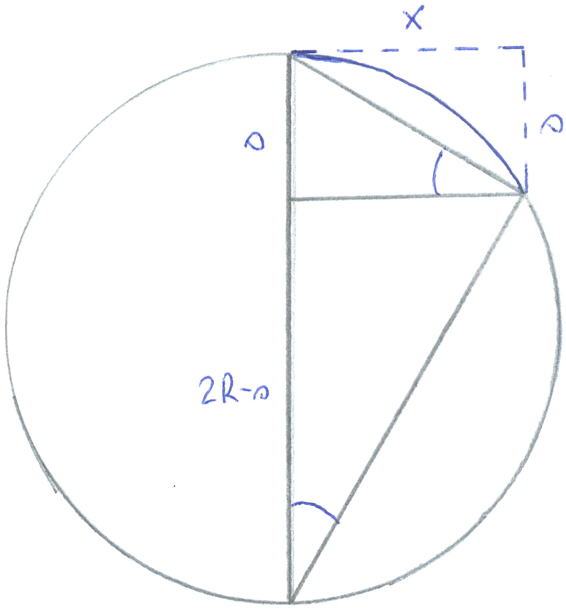
$g_Z = 9{,}81\ m s^{-2}$

$M_Z / M_M = 81{,}3$

$R_Z = 6\,378\ km$

$R_M = 1738\ km$

Příklad 4.5.



$$\frac{x}{2R-s} = \frac{s}{x}$$

$$x^2 = \underbrace{(2R-s)}_{\doteq 2R} \cdot s = 2Rs$$

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{(volný pád)}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2Rs} = \sqrt{Rg}\, t = v \cdot t$$

$$v = x/t = \sqrt{Rg}$$

$$v_M^I = \sqrt{R_M g_M} = 1{,}68 \text{ km/s}$$

$\uparrow$

$R_M = 1738$ km

$g_M = 1{,}63$ m s^{-2}

$$v_M^I = \sqrt{R_M g_M} = \sqrt{R_Z g_Z \cdot \frac{R_M g_M}{R_Z g_Z}} = v_Z^I \sqrt{\frac{M_M}{M_Z} \frac{R_Z}{R_M}} = 1{,}68 \text{ km/s}$$

$\downarrow$

$$g_M = g_Z \frac{M_M}{M_Z} \frac{R_Z^2}{R_M^2}$$

$M_Z/M_M = 81{,}3$

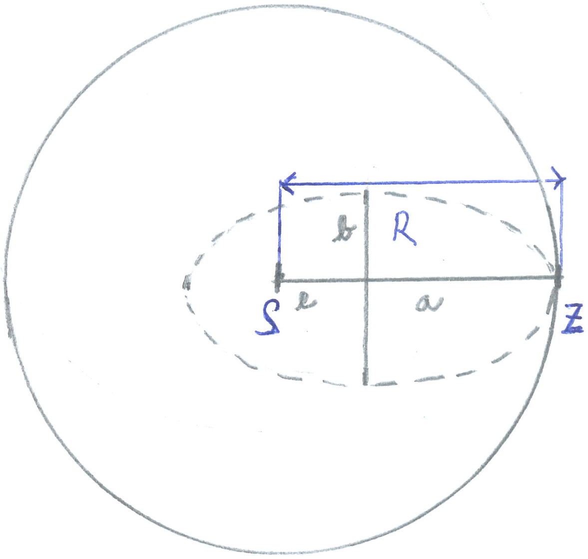
$R_Z = 6378$ km

$R_M = 1738$ km

$v_Z^I = 7{,}91$ km/s

Příklad 4.6.

třetí Keplerův zákon $$\frac{T^2}{R^3} = konst.$$ $$\left(\frac{t^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\varkappa M}\right)$$



stará orbita $R = 1\,AU$

$T = 1$ rok $= 365{,}25$ dne

nová orbita (velmi úzká elipsa) $b = 0 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2} = a$

$R = a + e = 2a \Rightarrow a = 1/2\,AU$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{t^2}{a^3} \Rightarrow t = T\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2}$$

$$\tau = 1/2\, t = \frac{1}{2} T \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} T = \frac{\sqrt{2}}{8} T = 64{,}5 \text{ dne}$$

↑

pád = 1 půloběh

Příklad 4. 7.

maximální vzdálenost

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

$$r_{max} = 2a - r_{min}$$

$$\downarrow$$

3. Kepplerův zákon

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{\tau^2}{a^3} \quad \Rightarrow a = R\left(\frac{\tau}{T}\right)^{2/3}$$

Země — Halleyova kometa

$$r_{max} = 2R\left(\frac{\tau}{T}\right)^{2/3} - r_{min} = 35{,}2\ AU$$

$R = 1\,AU$

$\tau = (1986 - 1456)/7 = 75{,}7$ let

$T = 1$ rok

$r_{min} = 0{,}6\ AU$

numerická excentricita

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{(r_{max} - r_{min})/2}{(r_{max} + r_{min})/2} = 0{,}966$$

$r_{max} = 35{,}2\ AU$

$r_{min} = 0{,}6\ AU$

orbitální rychlosti

2. Kepplerův zákon

$$\frac{1}{2} r v_\varphi = \text{konst.}$$

$$r v_\varphi = \text{konst.}$$

$$r_{min} v_{max} = r_{max} v_{min}$$

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{r_{min}}{r_{max}} = 58{,}7$$