

Cvičení 4

1. Jednostupňová raketa vypuštěná vertikálně vzhůru se po dobu $t_1 = 50$ s pohybuje se zrychlením $2g$. Určete maximální výšku, kterou raketa dosáhne. Vypočítejte celkovou dobu letu od vypuštění do návratu na zem. Jakou část hmotnosti rakety tvoří palivo, pokud rychlost výtoku spalovaných plynů vůči raketě je $v_r = 5000$ m/s? Odpor vzduchu a změnu gravitačního zrychlení s výškou zanedbejte.

[řešení: Raketa dosáhne výšky $h = 3gt_1^2 = 73.58$ km a dopadne zpátky na zem za dobu $t = (3 + \sqrt{6})t_1 = 272.5$ s. Palivo tvoří $1 - \exp\left(-\frac{3gt_1}{v_r}\right) = 25.5$ % hmotnosti rakety.]

2. Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) obíhá kolem Země po kruhové dráze ve výšce $h = 408$ km nad povrchem Země. Vypočítejte velikost gravitačního zrychlení a_g na stanici. Jak dlouho trvá stanici ISS jeden oblet Země?

[řešení: Gravitační zrychlení na stanici je $a_g = g\left(\frac{R_Z}{h+R_Z}\right)^2 = 8.66$ ms⁻², doba oběhu stanice je $T = 2\pi\sqrt{\frac{h+R_Z}{a_g}} = 1.54$ h.]

3. Poloměr Země je $R_Z = 6371$ km, Měsíce $R_M = 1738$ km a jejich hmotnosti jsou v poměru $M_Z/M_M = 81.3$. Určete velikost gravitačního zrychlení na povrchu Měsíce, když na Zemi je $g = 9.81$ m²s⁻²

[řešení: Gravitační zrychlení na Měsíci je $g_M = g\frac{M_M}{M_Z}\left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^2 = 1.62$ ms⁻².]

4. Jaká je první kosmická rychlost na Měsíci?

[řešení: $v_{I,M} = \sqrt{g_M R_M} = 1.68$ km/s.]

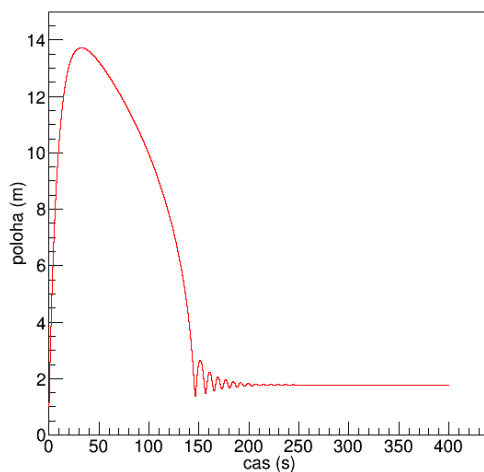
5. Kdyby se Země najednou zastavila na své dráze, za jakou dobu τ by dopadla do Slunce?

[řešení: $\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}$ roku = 64.5 dne]

6. Halleyova kometa přiletěla k Zemi naposledy v roce 1986. Bylo to po sedmé od roku 1456. Když Halleyova kometa procházela periheliem 19.4. 1910 byla naměřena její vzdálenost od Slunce 0.60 AU. Jak daleko je Halleyova kometa od Slunce v aféliu? Jaký je poměr její největší a nejmenší orbitální rychlosti? Jaká je numerická excentricita její dráhy

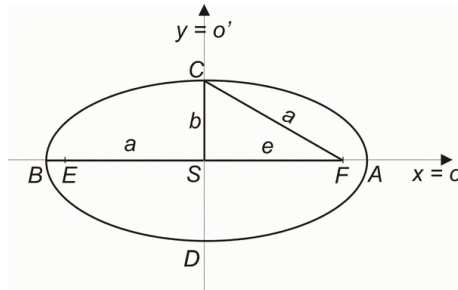
[řešení: Vzdálenost od Slunce v aféliu: 35.2 AU, numerická excentricita dráhy: 0.97, poměr maximální a minimální orbitální rychlosti: 58.7.]

7. Na hmotný bod o hmotnosti $m = 1$ kg působí síla, která ho přitahuje do počátku soustavy souřadnic, a současně síla, která ho odpuzuje. Přitažlivá síla F_+ závisí na vzdálenosti od počátku jako $F_+(r) = h/r^2$, odpuzivá síla F_- klesá se vzdáleností jako $F_-(r) = k/r^6$. Při pohybu je hmotný bod zpomalován tlumící silou F_o úměrnou rychlosti lv jako $F_o(v) = lv$. Najděte rovnovážnou polohu r_0 hmotného bodu (tj. vzdálenost od středu ve které je výslednice sil působících na hmotný bod nulová) pokud je $h = 1 \text{ Nm}^2$, $k = 10 \text{ Nm}^6$ a $l = 0.1 \text{ Ns/m}$. Nakreslete trajektorii hmotného bodu, který se v čase $t = 0$ nachází v klidu ve vzdálenosti $r = 1$ m od počátku.



[řešení: Rovnovážná poloha je ve vzdálenosti $r_0 = \sqrt[4]{\frac{k}{h}} = 1.78$ m od počátku.]

Základní vztahy a údaje



vlastnosti elipsy

hlavní poloosa: a

vedlejší poloosa: b

excentricita $e^2 = a^2 - b^2$

numerická excentricita $\varepsilon = \frac{e}{a}$

vzdálenost planety v perihéliu (nejmenší vzdálenost od ohniska): $r_{min} = a(1 - \varepsilon)$

vzdálenost planety v aféliu (největší vzdálenost od ohniska): $r_{max} = a(1 + \varepsilon)$

$a = (r_{min} + r_{max})/2$

$e = (r_{max} - r_{min})/2$

fyzikální zákony a rovnice

Newtonův gravitační zákon $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

Druhý Keplerův zákon $\frac{1}{2} r v_\varphi = \text{konst.}$

Třetí Keplerův zákon $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$

Ciolkovského rovnice (bez gravitace) $\Delta v = v_r \ln \left(\frac{m_i}{m_f}\right)$

Ciolkovského rovnice (s gravitací) $\Delta v + gT = v_r \ln \left(\frac{m_i}{m_f}\right)$

fyzikální konstanty

gravitační konstanta $G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

Střední vzdálenost Země od Slunce: $149.6 \times 10^6 \text{ km} = 1 \text{ AU}$

Numerická excentricita oběžné dráhy Země: $\varepsilon = 0.0167$

Tíhové zrychlení na povrchu Země (v Praze na 50.5° rovnoběžce): $g = 9.91373 \text{ ms}^{-2}$

Poloměr Země: 6371 km

Hmotnost Země: $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Poloměr Měsíce: 1737 km

Hmotnost Země: $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Hmotnost Měsíce: $7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$