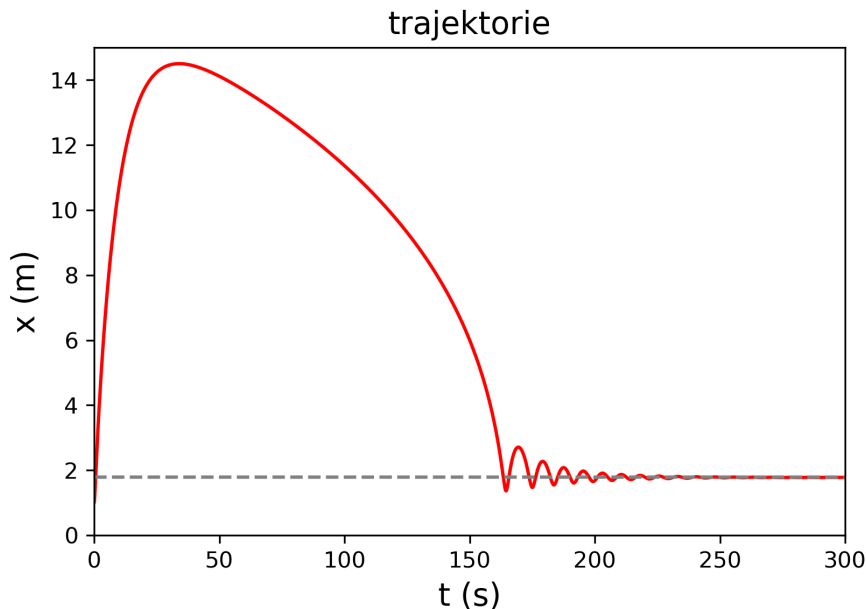


Cvičení 4

1. Jednostupňová raketa vypuštěná vertikálně vzhůru se po dobu $t_1 = 50$ s pohybuje se zrychlením $2g$. Určete maximální výšku y_{max} , kterou raketa dosáhne. Vypočítejte celkovou dobu letu t od vypuštění do návratu na zem. Jakou část hmotnosti rakety η tvoří palivo, pokud rychlost výtoku spalovaných plynů vůči raketě je $v_e = 5000$ m s⁻¹? Odpor vzduchu a změnu gravitačního zrychlení s výškou zanedbejte.

[řešení: Raketa dosáhne výšky $y_{max} = 3gt_1^2 = 73.6$ km a dopadne zpátky na zem za $t = (3 + \sqrt{6})t_1 = 272.5$ s. Palivo tvoří $\eta = 1 - \exp\left(-\frac{3gt_1}{v_e}\right) = 25.5$ % hmotnosti rakety.]

2. Na hmotný bod o hmotnosti $m = 1$ kg působí síla, která ho přitahuje do počátku soustavy souřadnic, a současně síla, která ho odpuzuje. Přitažlivá síla F_+ závisí na vzdálenosti od počátku r jako $F_+(r) = h/r^2$, odpuzivá síla F_- klesá se vzdáleností r jako $F_-(r) = k/r^6$. Při pohybu je hmotný bod zpomalován tlumící silou F_0 úměrnou rychlosti v jako $F_0(v) = lv$. Najděte rovnovážnou polohu r_0 hmotného bodu, tj. vzdálenost od středu ve které je výslednice sil působících na hmotný bod nulová, pokud je $h = 1$ N m², $k = 10$ N m⁶ a $l = 0.1$ N s m⁻¹. Nakreslete trajektorii hmotného bodu, který se v čase $t = 0$ nachází v klidu ve vzdálenosti $r = 1$ m od počátku.



[řešení: Rovnovážná poloha je ve vzdálenosti $r_0 = \sqrt[4]{\frac{k}{h}} = 1.78$ m od počátku.]

3. Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) obíhá kolem Země po přibližně kruhové dráze ve výšce $h = 408$ km nad povrchem Země. Vypočítejte velikost gravitačního zrychlení a_g na stanici. Jaká je perioda oběhů stanice kolem Země?

[řešení: Gravitační zrychlení je $a_g = G \frac{M_Z}{(R_Z+h)^2} \doteq 8.7 \text{ m s}^{-2}$, perioda oběhů je $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_Z+h)^3}{GM_Z}} \doteq 1.5 \text{ h.}$]

4. Poloměr Země je $R_Z = 6371$ km, Měsíce $R_M = 1737$ km a jejich hmotnosti jsou v poměru $M_Z/M_M = 81.3$. Určete velikost gravitačního zrychlení g_M na povrchu Měsíce, když na Zemi je $g_Z = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

[řešení: $g_M = g_Z \frac{M_M}{M_Z} \frac{R_Z^2}{R_M^2} = 1.62 \text{ m s}^{-2}$]

5. Jaká je první kosmická rychlost na Zemi a na Měsíci?

[řešení: Na Zemi $v_{I,Z} = \sqrt{g_Z R_Z} = 7.9 \text{ km s}^{-1}$, na Měsíci $v_{I,M} = \sqrt{g_M R_M} = v_{I,Z} \sqrt{\frac{M_M}{M_Z} \frac{R_Z}{R_M}} = 1.68 \text{ km s}^{-1}$.]

6. Kdyby se Země najednou zastavila na své dráze, za jakou dobu τ by dopadla do Slunce?

[řešení: $\tau = \frac{\sqrt{2}}{8} T = 64.5$ dne. $T = 1$ rok je oběžná doba Země kolem Slunce.]

7. Halleyova kometa přiletěla k Zemi naposledy v roce 1986. Bylo to po sedmé od roku 1456. Když Halleyova kometa procházela periheliem 19.4. 1910 byla naměřena její vzdálenost od Slunce $r_{min} = 0.60$ AU. Jak daleko je Halleyova kometa od Slunce v afeliu? Jaká je numerická excentricita ε její dráhy? Jaký je poměr její největší a nejmenší orbitální rychlosti?

[řešení: Vzdálenost od Slunce v afeliu je $r_{max} = 2R \left(\frac{\tau}{T}\right)^{\frac{2}{3}} - r_{min} = 35.2$ AU, numerická excentricita dráhy je $\varepsilon = 1 - \frac{r_{min}}{R} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0.966$, poměr maximální a minimální orbitální rychlosti je $\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{2R}{r_{min}} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 58.7$.
 $\tau = \frac{1986-1456}{7} = 75.7$ let je průměrná oběžná doba Halleyovy komety kolem Slunce. $R = 1$ AU je střední vzdálenost Země od Slunce, $T = 1$ rok je oběžná doba Země kolem Slunce.]

Základní vztahy a údaje

vlastnosti elipsy

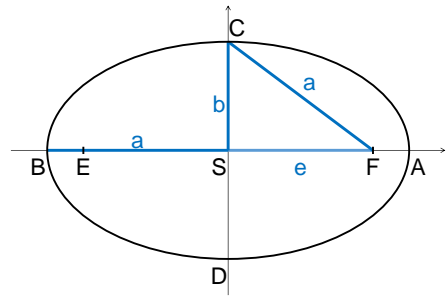
hlavní poloosa $a = |AS| = |BS|$

vedlejší poloosa $b = |CS| = |DS|$

excentricita $e = |ES| = |FS|$

$$e^2 = a^2 - b^2$$

numerická excentricita $\varepsilon = \frac{e}{a}$



eliptická trajektorie

perihelium $r_{min} = |AF| = a(1 - \varepsilon)$

afelium $r_{max} = |BF| = a(1 + \varepsilon)$

hlavní poloosa $a = (r_{min} + r_{max})/2$

excentricita $e = (r_{max} - r_{min})/2$

fyzikální zákony a rovnice

Newtonův gravitační zákon

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Druhý Keplerův zákon

$$\frac{1}{2} r v_\varphi = \text{konst.}$$

Třetí Keplerův zákon

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Ciolkovského rovnice (bez gravitace)

$$\Delta V = v_e \ln \left(\frac{m_i}{m_f}\right)$$

Ciolkovského rovnice (s gravitací)

$$\Delta V + gT = v_e \ln \left(\frac{m_i}{m_f}\right)$$

fyzikální konstanty

gravitační konstanta G

$$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

střední vzdálenost Země od Slunce (1 AU)

$$149.6 \times 10^6 \text{ km}$$

numerická excentricita oběžné dráhy Země

$$0.0167$$

poloměr Země

$$6371 \text{ km}$$

poloměr Měsíce

$$1737 \text{ km}$$

hmotnost Země

$$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

hmotnost Měsíce

$$7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$$