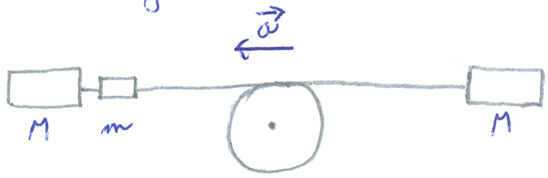
Příklad 3.1.

• zrychlený pohyb celé soustavy o hmotnosti $2M+m$, zrychlení a

1D:



2. Newtonův zákon: $(2M+m)a = Mg + mg - Mg$ + nic víc

– hmotnost kladky, tření vlákna apod.

$$\Rightarrow a = g\,\frac{m}{2M+m}$$

neznám

• rovnoměrně zrychlený pohyb na dráze h

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = a t \quad \Rightarrow t = \frac{v}{a} \qquad \Rightarrow h = \frac{v^2}{2a}$$

$$a = \frac{v^2}{2h}$$

• výpočet g

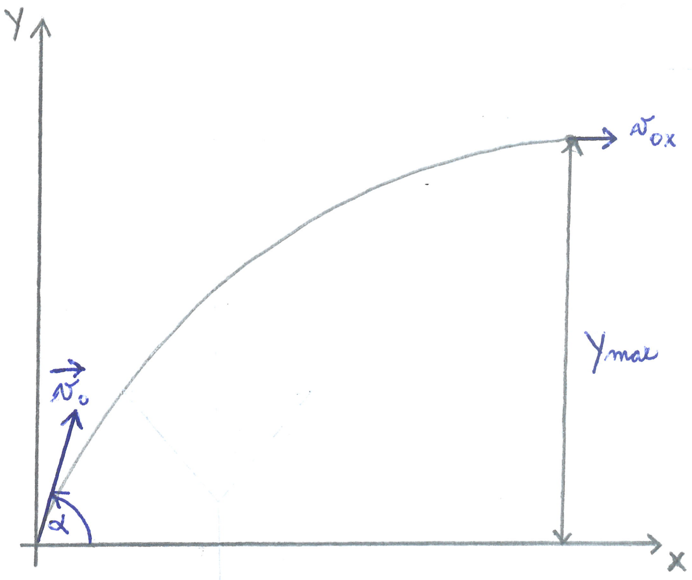
$$g = \frac{2M+m}{m}\,a = \frac{2M+m}{m}\,\frac{v^2}{2h}$$

Příklad 3.2.

$y_{max} = 9{,}6\ m$

$\alpha = 70°$

$g = 9{,}81\ m\,s^{-2}$



pohybové rovnice:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_{0x}t + x_0$$

$$m\ddot{y} = -mg \quad \Rightarrow \ddot{y} = -g \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

počáteční podmínky:

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$v_{x0} = v_0 \cos\alpha$

$v_{y0} = v_0 \sin\alpha$

maximální výška:

$$y = y_{max} \Leftrightarrow v_y(\tilde{t}) = 0$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$0 = v_y(\tilde{t}) = -g\tilde{t} + v_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow \tilde{t} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y_{max} = y(\tilde{t}) = -\frac{1}{2}g\tilde{t}^2 + v_0 \sin\alpha\, \tilde{t} = -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad \Rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{2g\,y_{max}}}{\sin\alpha} = 14{,}6\ m\,s^{-1}$$

3.2.2.

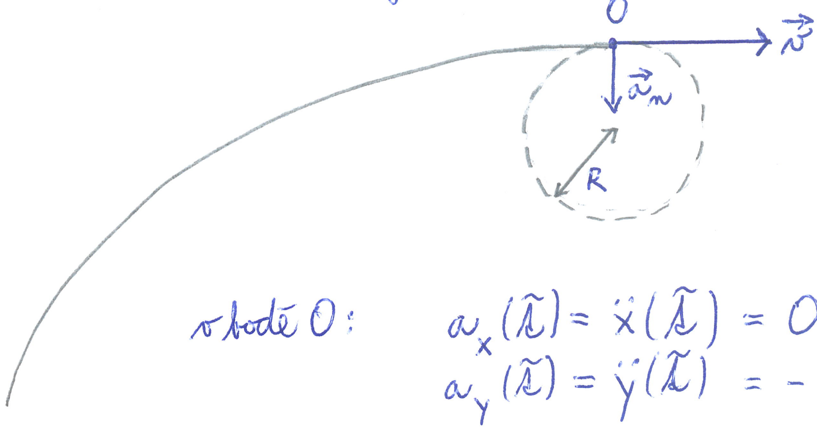
poloměr křivosti:
(poloměr oskulační kružnice)

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

v → velikost rychlosti

R → poloměr křivosti

a_n → normálové zrychlení



→ přednaska 3 / str. 15/23

v bodě O:
$$a_x(\tilde{t}) = \ddot{x}(\tilde{t}) = 0$$
$$a_y(\tilde{t}) = \ddot{y}(\tilde{t}) = -g$$

$$v_x(\tilde{t}) = \dot{x}(\tilde{t}) = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y(\tilde{t}) = \dot{y}(\tilde{t}) = -g\tilde{t} + v_0 \sin\alpha = 0$$

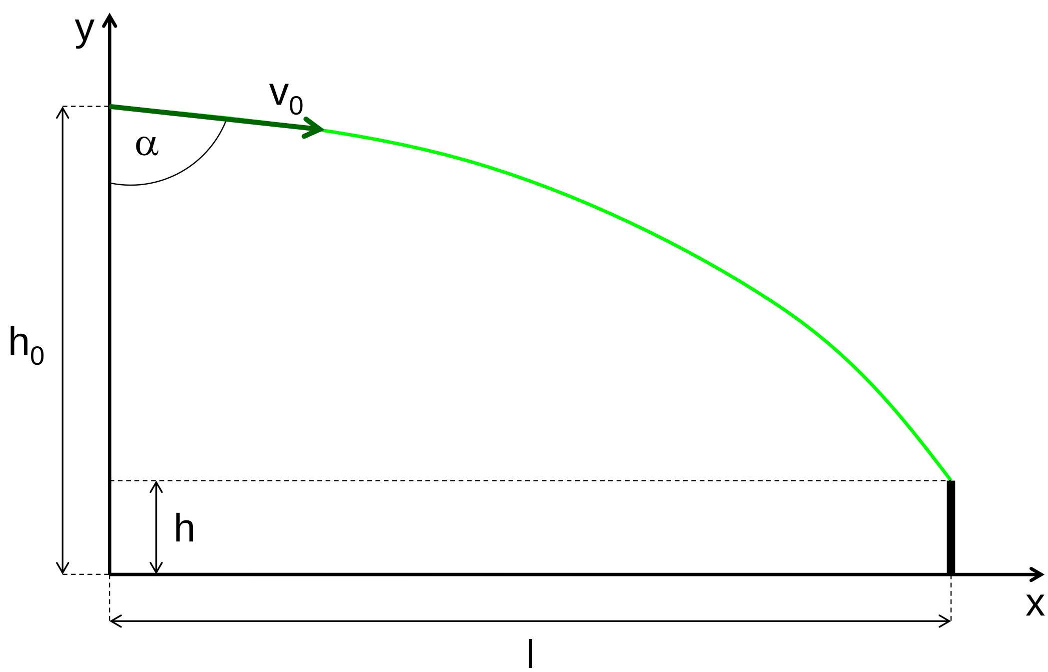
$$\Rightarrow a_n = g$$
$$v = v_0 \cos\alpha$$

dohromady:
$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{2y_{max}}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 2{,}5\,m$$

$$v_0^2 = \frac{2y_{max}}{\sin^2\alpha}$$

Příklad 3.3

Zadání: Při tenisovém podání je míček odpálen ze vzdálenosti 12 m od sítě z výšky 2.9 m šikmo dolů pod úhlem 82° vůči vertikále. Jaká musí být počáteční rychlost v_0 míčku, aby přeletěl těsně přes síť výšky 0.9 m?



Řešení: Obecný šikmý vrh je popsán rovnicemi:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t + x_0, \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0. \end{aligned}$$

Počáteční polohy x_0 a y_0 a počáteční rychlosti v_{x0} a v_{y0} určíme ze zadání.

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= h_0 \\ v_{x0} &= v_0 \sin\alpha \\ v_{y0} &= -v_0 \cos\alpha \end{aligned}$$

Dohromady je tedy pohyb míčku v rovině xy popsán těmito rovnicemi:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \sin\alpha t, \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \cos\alpha t + h_0. \end{aligned}$$

Podmínku, že míček přeletí těsně nad sítí, můžeme zformulovat tak, že v momentě, kdy $x = l$ platí zároveň $y = h$.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_0 t \sin\alpha = l \\
y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t \cos\alpha + h_0 = h
\end{aligned}
$$

Z první rovnice si můžeme vyjádřit dobu t, po kterou míček letí k síti:

$$
t = \frac{l}{v_0 \sin\alpha}
$$

a dosadit ji do druhé rovnice:

$$
\begin{aligned}
h_0 - h &= \frac{1}{2} g \left(\frac{l}{v_0 \sin\alpha} \right)^2 + v_0 \cos\alpha \frac{l}{v_0 \sin\alpha} \\
h_0 - h - l\mathrm{cotg}\alpha &= \frac{g l^2}{2 v_0^2 \sin^2\alpha} \\
v_0 &= \sqrt{\frac{g l^2}{2 \sin^2\alpha \left(h_0 - h - l\mathrm{cotg}\alpha \right)}}.
\end{aligned}
$$

Číselně vychází počáteční rychlost míčku 47.9 m s^{-1} neboli 172.6 km h^{-1}.

Příklad 3.4.

$$x(t) = \frac{u}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)$$

$$\Rightarrow v_x(t) = \underset{=\frac{dx(t)}{dt}}{\dot{x}(t)} = -\frac{u}{\delta}(-\delta)\, e^{-\delta t} = u\, e^{-\delta t}$$

$$a_x(t) = \underset{=\frac{d^2x(t)}{dt^2}}{\ddot{x}(t)} = \underset{=\frac{dv_x(t)}{dt}}{\dot{v}_x(t)} = -\delta u\, e^{-\delta t} = -\delta v_x$$

$$\Rightarrow F_x = m a_x = -m\delta v_x$$

$$y(t) = \left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2}\right)\left(1 - e^{-\delta t}\right) - \frac{g}{\delta} t$$

$$\Rightarrow v_y(t) = \dot{y}(t) = -\left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2}\right)(-\delta)\, e^{-\delta t} - \frac{g}{\delta} = \left(w + \frac{g}{\delta}\right) e^{-\delta t} - \frac{g}{\delta}$$

$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = \dot{v}_y(t) = -\delta\left(w + \frac{g}{\delta}\right) e^{-\delta t} = -\delta v_y - g$$

$$= \underbrace{-\delta\left(w + \frac{g}{\delta}\right) e^{-\delta t} + g}_{-\delta v_y} - g$$

$$\Rightarrow F_y = m a_y = -m\delta v_y - mg$$

dohromady: $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_H$

$\vec{F}_G = m\vec{g} = (0, -mg)$ ... tíhová síla

$\vec{F}_H = -m\delta\vec{v} = (-m\delta v_x, -m\delta v_y)$ ... síla odporu vzduchu

Trajektorie $x(t), y(t)$ popisuje šikmý vrh v tíhovém poli se započtením odporu vzduchu.

Příklad 3.5.

a) bez odporu vzduchu
(vzhledem k pozorovateli stojícímu mimo chodník)

$$x = v_0 t \cos\alpha - u t$$

→ rychlost chodníku

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

maximální výška:

$$y = y_{max} \iff v_y(\tilde{t}) = 0$$

$$v_y(\tilde{t}) = \dot{y}(\tilde{t}) = v_0 \sin\alpha - g\tilde{t}$$

$$\Rightarrow \tilde{t} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y_{max} = y(\tilde{t}) = v_0 \tilde{t} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \tilde{t}^2$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 0{,}6\,m$$

$v_0 = 10\,m\,s^{-1}$

$\alpha = 20°$

$g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

maximální délka:

$$x = x_{max} \iff y(T) = 0$$

$$y(T) = v_0 T \sin\alpha - \frac{1}{2} g T^2$$

$$\Rightarrow T_1 = 0$$ ... míč před výkopem ($x = 0$)

$$T_2 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$ ... míč po dopadu (x_{max})

$$x_{max} = x(T) = v_0 T \cos\alpha - u T$$

$$x_{max} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} - \frac{2 u v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha - \frac{2 v_0 u}{g} \sin\alpha = 3{,}1\,m$$

pro numerické řešení:

počáteční podmínky:

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$v_{x0} = v_0 \cos\alpha - u$

$v_{y0} = v_0 \sin\alpha$

rychlosti:

$v_x(t+dt) = v_x(t)$

$v_y(t+dt) = v_y(t) - g \cdot dt$

$\to \dfrac{v_y(t+dt) - v_y(t)}{dt} = -g$

$\dot{v}_y = -g$

polohy:

$x(t+dt) = x(t) + v_x(t) \cdot dt$

$y(t+dt) = y(t) + v_y(t) \cdot dt$

$\to \dfrac{y(t+dt) - y(t)}{dt} = v_y$

$\dot{y} = v_y$

b) s odporem vzduchu

$\to$ pro numerické řešení

počáteční podmínky:

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$v_{x0} = v_0 \cos\alpha$

$v_{y0} = v_0 \sin\alpha$

rychlost větru

pohybové rovnice:

$m\ddot{x} = -k(v_x + w)$

$m\ddot{y} = -mg - kv_y$

$\Rightarrow$ rychlosti:

$v_x(t+dt) = v_x(t) - \dfrac{k}{m}(v_x(t) + w) \cdot dt$

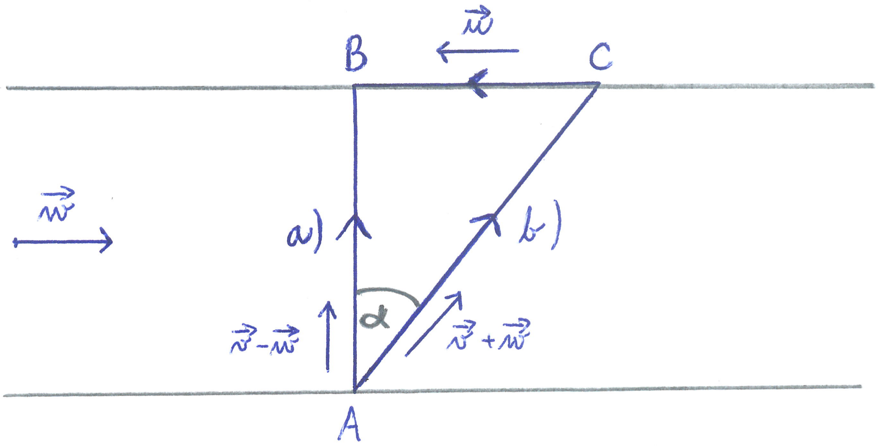
$v_y(t+dt) = v_y(t) - g \cdot dt - \dfrac{k}{m} v_y(t) \cdot dt$

polohy:

$x(t+dt) = x(t) + v_x(t) \cdot dt$

$y(t+dt) = y(t) + v_y(t) \cdot dt$

Příklad 3.6.



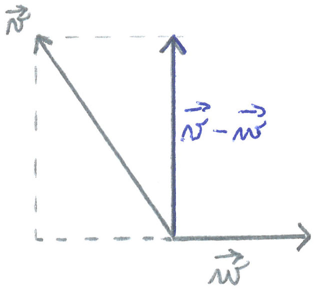
$v = 2{,}5\ \mathrm{km/h}$

$u = 4\ \mathrm{km/h}$

$w = 2\ \mathrm{km/h}$

a)

AB

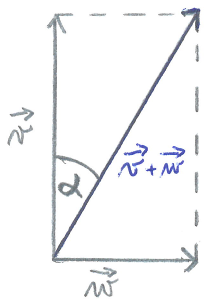


$$|\vec{v}-\vec{w}| = \sqrt{v^2-w^2}$$

$$t_{AB} = \frac{|AB|}{\sqrt{v^2-w^2}}$$

b)

AC + CB



$$|\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{v^2+w^2}$$

$$t_{AC} = \frac{|AC|}{\sqrt{v^2+w^2}} = \frac{|AB|}{v}$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{v^2+w^2}}{v}$$

$$t_{CB} = \frac{|BC|}{u} = |AB|\frac{w}{uv}$$

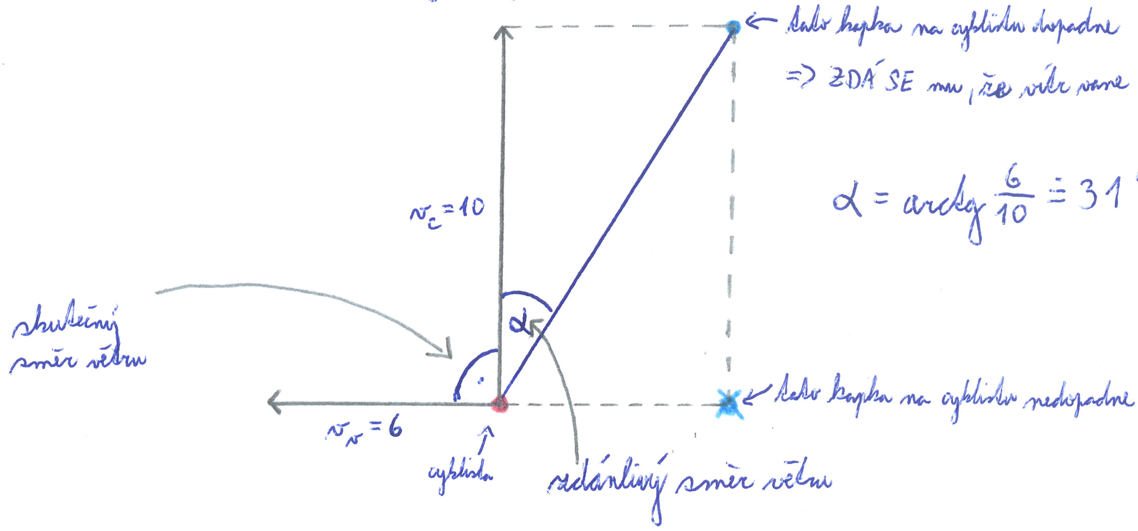
$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{w}{v}$$

dohromady: $$\frac{T_a}{T_b} = \frac{t_{AB}}{t_{AC}+t_{CB}} = \frac{\frac{|AB|}{\sqrt{v^2-w^2}}}{\frac{|AB|}{v} + |AB|\frac{w}{uv}} = \frac{v}{\sqrt{v^2-w^2}\left(1+\frac{w}{u}\right)} = 1{,}11$$

$\Rightarrow$ způsob b) je rychlejší

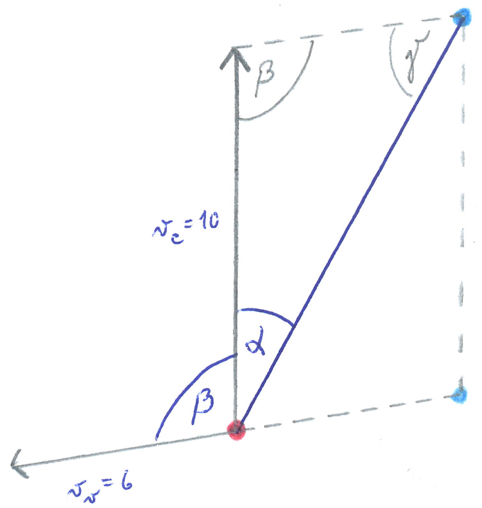
Příklad 3.7.

i) skutečný směr větru kolmý k cyklistovi (+prší !)



$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{6}{10} \doteq 31^\circ$$

a) zdánlivý směr $\alpha = 15^\circ$, skutečný směr $\beta = ?$

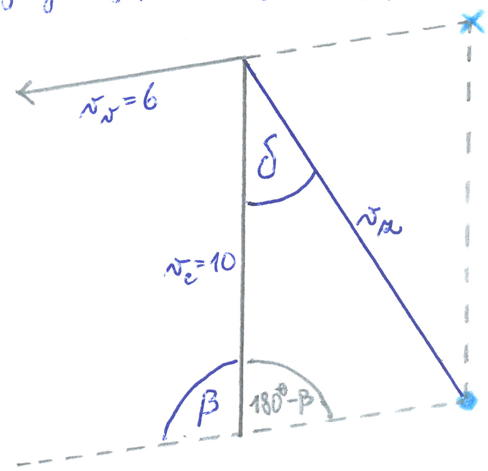


sinová věta: $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{v_c}{v_v}$

$\sin\gamma = \sin\alpha\,\dfrac{v_c}{v_v} \Rightarrow \gamma = 25{,}6^\circ$

skutečný směr: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 139{,}4^\circ$

b) opačný směr jízdy cyklisty, skutečný směr β, zdánlivý směr $\delta = ?$



sinová věta: $\dfrac{\sin\delta}{\underbrace{\sin(180^\circ-\beta)}_{=\sin\beta}} = \dfrac{v_v}{v_z}$

kosinová věta: $v_z^2 = v_c^2 + v_v^2 - 2v_c v_v \underbrace{\cos(180^\circ-\beta)}_{=-\cos\beta}$

$$v_z = \sqrt{v_c^2 + v_v^2 + 2v_c v_v \cos\beta}$$

$$v_z = 6{,}695\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

zdánlivý směr: $\sin\delta = \sin\beta\,\dfrac{v_v}{v_z}$

$$\delta = 35{,}6^\circ$$