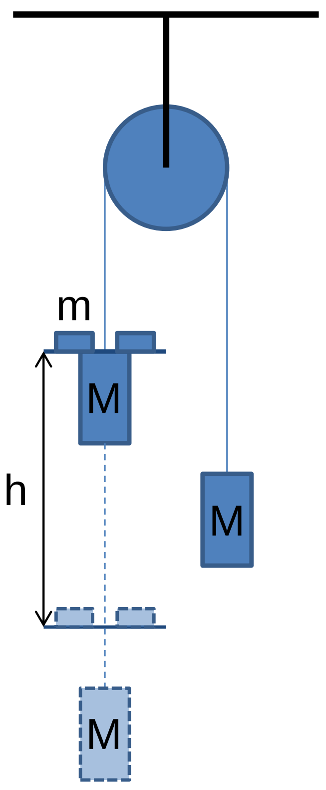
Cvičení 3

1. Na obrázku je Atwoodův padostroj, který se používá na měření gravitačního zrychlení. Budeme předpokládat, že hmotnosti vláken jsou zanedbatelně malé a že pohyb probíhá bez tření. Na obou stranách kladky jsou zavěšená závaží o stejné hmotnosti M a soustava je v rovnováze. Potom přidáme k jednomu závaží malé závažíčko o hmotnosti m a toto závaží začne klesat. Když projde vzdálenost h je závažíčko odchyceno speciální podložkou a padostroj pokračuje v pohybu konstantní rychlostí v. Určete gravitační zrychlení g jsou-li známy veličiny M, m, h a v.



[*řešení:* $g = \frac{2M+m}{m}\frac{v^2}{2h}$]

2. Míč byl vykopnut do výšky pod úhlem $\alpha = 70°$ k vodorovnému směru a trefuje se přímo do otevřeného okna ve výšce 9.6 m nad zemí. Míč vletí do okna vodorovně. Jakou rychlostí vyletěl míč od nohy? Čemu je roven poloměr křivosti trajektorie míče v okamžiku když vlétá do okna? Odpor vzduchu zanedbáme.

[*řešení:* Míč musí být vykopnut rychlostí $v_0 = \frac{\sqrt{2hg}}{\sin\alpha} = 14.6$ m/s, poloměr křivosti je $R = \frac{2h}{\mathrm{tg}^2\alpha} = 2.5$ m.]

3. Při tenisovém podání je míček odpálen ze vzdálenosti $l = 12$ m od sítě z výšky $h_0 = 2.9$ m šikmo dolů pod úhlem $\alpha = 82°$ vůči svislé ose. Jaká musí být počáteční rychlost v_0 míčku, aby přeletěl těsně přes síť, která má výšku $h = 0.9$ m?

[*řešení:* $v_0 = \sqrt{\frac{l^2 g}{2\sin^2\alpha(h_0 - h - l\mathrm{cotg}\alpha)}} = 47.9\ \mathrm{m\ s^{-1}}$]

4. Hmotný bod o hmotnosti m se pod vlivem působící síly $\vec{F}$ pohybuje po trajektorii $x(t) = \frac{u}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)$; $y(t) = \left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2}\right)\left(1 - e^{-\delta t}\right) - \frac{g}{\delta}t$, kde u, w a δ jsou konstanty nezávislé na čase, g je tíhové zrychlení. Určete působící sílu $\vec{F}$.

[*řešení:* Zavedeme konstantu $h = m\delta$, potom $F_x = -hv_x$; $F_y = -mg - hv_y$, na hmotný bod tedy působí tíhová síla $\vec{F_G}$ a odporová síla $\vec{F_v} = -h \cdot \vec{v}$, trajektorie odpovídá šikmému vrhu s odporem vzduchu.]

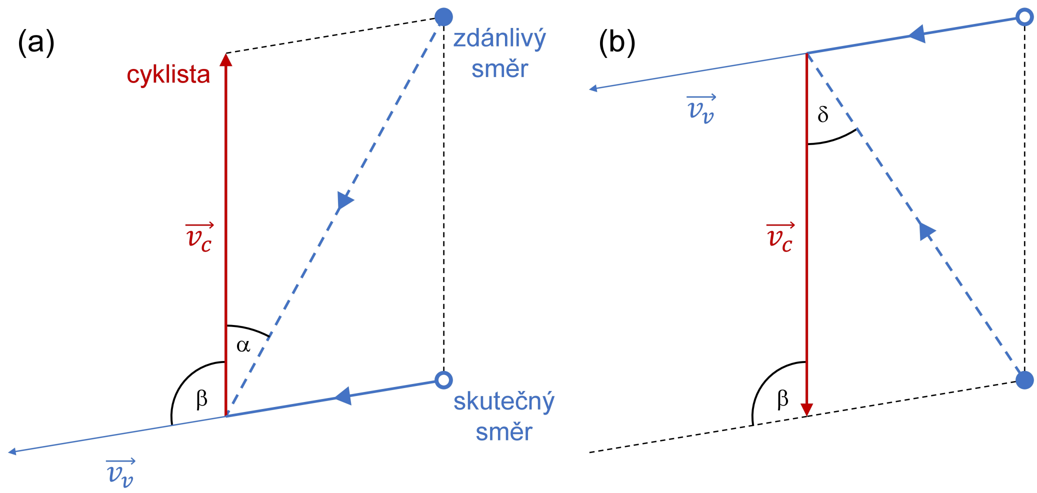
5. (a) Člověk stojící na pohyblivém chodníku jedoucím rychlostí $u = 5$ m/s vykopl fotbalový míč o hmotnosti $m = 450$ g rychlostí $v_0 = 10$ m/s proti směru pohybu chodníku šikmo vzhůru pod úhlem $\alpha = 20°$ k vodorovnému směru. Do jaké maximální výšky míč vystoupá a kde dopadne na zem? Odpor vzduchu zanedbejte.
(b) Člověk stojí na místě o vykopl stejný fotbalový míč opět rychlostí $v_0 = 10$ m/s šikmo vzhůru pod úhlem $\alpha = 20°$ k vodorovnému směru. Předpokládejte, že vzduch na míč působí odporovou silou o velikosti $0.1v$ a fouká protivítr o rychlosti $w = 5$ m/s. Vypočítejte opět do jaké maximální výšky míč vystoupá a kde dopadne na zem.

[*řešení:* (a) Míč vystoupá do výšky 0.60 m a dopadne ve vzdálenosti 3.1 m; (b) míč vystoupá do výšky 0.57 m a dopadne ve vzdálenosti 5.7 m.]

6. Člověk stojící na břehu řeky se chce přepravit na druhý břeh přímo do místa ležícího naproti přes řeku. Může to udělat dvojím způsobem:
(a) plavat po celou dobu pod určitým úhlem ke směru proudu, tak aby výsledná rychlost byla stále kolmá ke břehu
(b) plavat přímo k protějšímu břehu a vzdálenost, o kterou bude proudem odnesen, dojít pěšky po břehu.
Který způsob je rychlejší pokud tento člověk chodí rychlostí $u = 4$ km/h, plave rychlostí $v = 2.5$ km/h a řeka teče rychlostí $w = 2$ km/h.

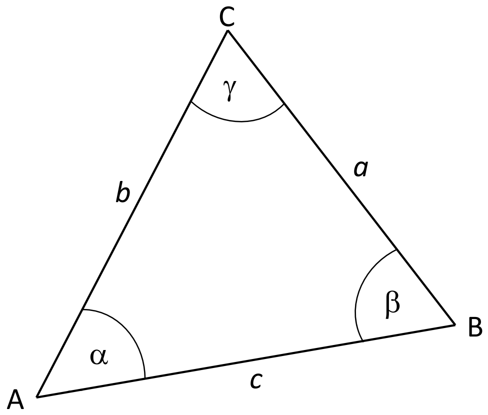
[*řešení:* $\frac{t_{(a)}}{t_{(b)}} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - w^2}}\left(1 + \frac{w}{u}\right)^{-1} \approx 1.1$
První způsob bude trvat 1.1-krát déle než druhý způsob.]

7. Cyklista jede rychlostí $v_c = 10$ km/h směrem na sever a zdá se mu, že vítr, který vane rychlostí $v_v = 6$ km/h, fouká na něj ze severovýchodu pod úhlem $\alpha = 15°$ ke směru jeho pohybu. (a) Jaký je skutečný směr větru β? (b) Jaký bude zdánlivý směr větru δ pro cyklistu, který pojede stejnou rychlostí ale opačným směrem?



[*řešení:*
(a) Skutečný směr větru svírá se směrem pohybu cyklisty úhel $\beta = 139.4°$.
(b) Cyklista jedoucí opačným směrem vnímá vítr pod úhlem $\delta = 35.6°$.]

Základní vztahy



Sinová věta

1.	$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}$
2.	$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{c}$
3.	$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{c}$

Kosinová věta

1.	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
2.	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
3.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

Kinematika

rychlost	$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	
zrychlení	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	
tečné zrychlení	$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
normálové zrychlení	$a_n = \frac{v^2}{R}$	R je poloměr křivosti
uražená dráha	$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t$	časový interval od t_1 do t_2

Dynamika

druhý Newtonův zákon	$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$
tíhová síla	$\vec{F} = m\vec{g}$
tíhové zrychlení na povrchu Země	$g = 9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$