Cvičení 1

Příklad 1. (1.1)

a) $\{\vec{u}\} = \{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)\}$ STŘEDOŠKOLSKY

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$$
$$\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T,$$
$$\vec{u}_3 = (0, 0, 1)^T$$

se šipkou psací, tučně tiskací

vektory ... SLOUPCE! (notace)

BÁZE 3D prostoru $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineárně nezávislé (neleží v 1 rovině)

Říkáme, že $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně závislé, pokud $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0)$ taková, že platí

$$\underbrace{a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2 + c \cdot \vec{u}_3}_{\text{LINEÁRNÍ KOMBINACE}} = \vec{0}$$

↳ LINEÁRNÍ KOMBINACE (násobení číslem + sčítání)

⇒ ŘEŠ SOUSTAVU (a, b, c neznámé)

$$a \cdot \vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = 0$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b + 0c &= 0 \quad (1)\\
-\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b + 0c &= 0 \quad (2)\\
0a + 0b + 1c &= 0 \quad (3)
\end{aligned}$$

– dodržuj "sloupcový" tvar → bude se hodit za chvíli

SČÍTACÍ METODA ... $(1) \to (1)$
$(2) \to (2) + (1)$
$(3) \to (3)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b + 0c &= 0\\
* \; 0a + \frac{2}{\sqrt{2}}b + 0c &= 0\\
0a + 0b + 1c &= 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
a + b &= 0 \Rightarrow \underline{a = 0}\\
\underline{b} &\underline{= 0}\\
\underline{c} &\underline{= 0}
\end{aligned}$$

– podmínka $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$ nesplněna ⇒ vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineárně nezávislé ⇒ mohou tvořit bázi 3-rozměrného prostoru

b) $\{\vec{v}\} = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ VYSOKOŠKOLSKY

⇒ ZNOVU ŘEŠ SOUSTAVU

(násobení číslem bez tečky, tečku si šetříme pro skalární součin)

$$a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_3 = \vec{o}$$

$$\begin{aligned} 1\boxed{a} + 1\boxed{b} + 1\boxed{c} &= 0 \\ 0\boxed{a} + 1\boxed{b} + 1\boxed{c} &= 0 \\ 1\boxed{a} + 0\boxed{b} + 1\boxed{c} &= 0 \end{aligned}$$

informace jen o označení neznámých → lze vynechat

veškerá informace ve tvaru
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

– matice soustavy rovnic

vektor $\vec{v}_1$ (sloupec!)

vektor pravé strany – v tomto případě $\vec{o}$ (může být i jiný pro jinou soustavu rovnic)

"NOVÁ" PROCEDURA: GAUSSOVA ELIMINACE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)\checkmark \\ (2)\checkmark \\ (3) \to (1)-(3) \end{array}$$

chci se dostat ke tvaru
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \end{array}\right)$$

– odsud už rovnou dostanu řešení $c \Rightarrow b \Rightarrow a$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)\checkmark \\ (2)\checkmark \\ (3) \to (2)-(3) \end{array}$$

sčítání/odčítání řádků – stejné jako když sčítáš rovnice

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$1 \cdot c = 0$ (3), $\underline{c = 0}$

$0a + b + c = 0$ (2), $\underline{b = 0}$

$a + b + c = 0$ (1), $\underline{a = 0}$

už znám výsledek, ale dokončím eliminaci)

⇒ OPĚT $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ lin. nezávislé ⇒ mohou tvořit bázi 3D

VYSOKOŠKOLSKY + CHYTŘE

c) $\{\vec{w}\} = \{(1,-1,2), (0,2,3), (2,0,7)\}$

• MATICE:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{cccc} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 & \vec{o} \end{array}$$

↳ Gaussova eliminace:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)\checkmark \\ (2) \to (1)+(2) \\ (3) \to (3)+2\cdot(2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1)\checkmark \\ (2)\checkmark \\ (3) \to -2\cdot(3)+7\cdot(2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 0c = 0$

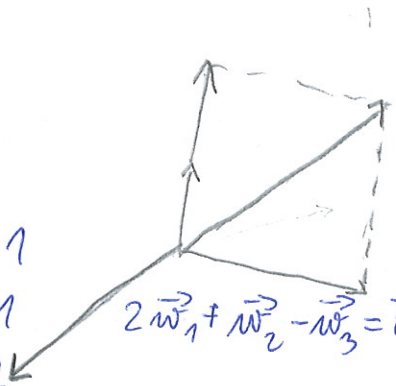
$\underline{c \in \mathbb{R}}$

$2b + 2c = 0$

$\underline{b = -c}$

$a + 2c = 0$

$\underline{a = -2c}$



např. $c = -1$
$b = 1$
$a = 2$

$2\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - \vec{w}_3 = \vec{o}$

↳ našli jsme taková čísla ($\neq 0$), že $a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3 = \vec{o}$
$\Rightarrow$ vektory $\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_3$ nejsou lineárně nezávislé a tedy nemohou tvořit bázi 3D prostoru

• VEKTOROVÝ SOUČIN $\quad \vec{a} \times \vec{b} = (a^2b^3 - b^2a^3, a^3b^1 - a^1b^3, a^1b^2 - a^2b^1)$

pomůcka: $x(1) \ldots 23 \quad 32$
$y(2) \ldots 31 \quad 13$
$z(3) \ldots 12 \quad 21$

produktem je vektor

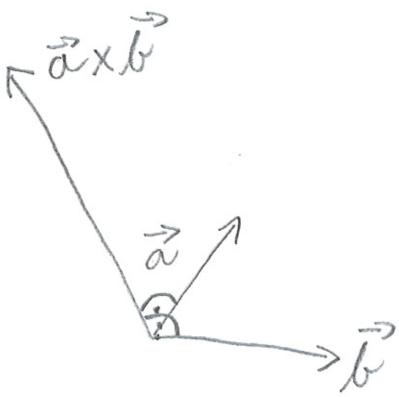
determinant (ti, kteří ho umí)

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \vec i \cdot (a^2 b^3 - a^3 b^2) + \vec j \cdot (a^3 b^1 - a^1 b^3) + \vec k \cdot (a^1 b^2 - a^2 b^1)$$

$$= (a^2 b^3 - a^3 b^2,\ a^3 b^1 - a^1 b^3,\ a^1 b^2 - a^2 b^1)$$

$\uparrow$

$\vec i = (1,0,0)$
$\vec j = (0,1,0)$
$\vec k = (0,0,1)$



$\vec c = \vec a \times \vec b$
$\vec a, \vec b \perp \vec c$

$\Rightarrow$ pokud $\vec w_1, \vec w_2, \vec w_3$ leží v 1 rovině (lineárně závislé), potom

$\vec W = \vec w_2 \times \vec w_3$, $\quad \vec W \perp \vec w_2, \vec w_3$
$\vec W \perp \vec w_1$ (ve stejné rovině jako $\vec w_2, \vec w_3$)

– použij rovinu tabule

KOLMOST $\to$ SKALÁRNÍ SOUČIN $\qquad \vec a \cdot \vec b = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$

$\uparrow$ produktem je skalár

$$\vec a \perp \vec b \iff \vec a \cdot \vec b = 0$$

DOHROMADY: $\vec w_1 \cdot (\vec w_2 \times \vec w_3) = \vec 0$ ... ekvivalentní zápis lineární závislosti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{2} \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \boxed{7} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \boxed{14} - 0 \\ 6 - 0 \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

objem rovnoběžnostěnu (= 0 ⇒ rovinný útvar)

kde se hodit

$$= (1 \ \ -1 \ \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 14 - 6 - 8 = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ STEJNÝ VÝSLEDEK, vektory $\vec w_1, \vec w_2, \vec w_3$ lineárně závislé

Příklad 2. (1.2)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \tilde{v}^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{v}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{v}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– lin. nezávislé vektory (ověřeno z minula)

složky nových bázových vektorů vzhledem k původní bázi (v kartézské bázi)

– rovnice

$$1\tilde{v}^1 + 1\tilde{v}^2 + 1\tilde{v}^3 = 2$$
$$0\tilde{v}^1 + 1\tilde{v}^2 + 1\tilde{v}^3 = 3$$
$$1\tilde{v}^1 + 0\tilde{v}^2 + 1\tilde{v}^3 = 5$$

→ MATICE, GAUSSOVA ELIMINACE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & +6 \end{array}\right)$$

nezapomeň na 4. sloupec!

$$\tilde{v}^3 = \cancel{2}\ 6$$
$$\tilde{v}^2 = \cancel{5}\ -3$$
$$\tilde{v}^1 = -1$$

$$\vec{\tilde{v}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

plná gaussova eliminace

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

přímo řešení

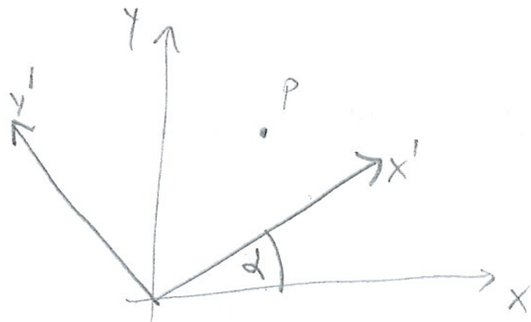
Příklad 3 (1.3) viz 1. přednáška

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

MATICOVÉ NÁSOBENÍ

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



• $V = A\cdot U$

$$v^i = \sum_{i=1}^{n} a^i_j u^j$$

index sloupce

index řádku

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 & \dots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 & \dots & a^n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_n & a^2_n & a^3_n & \dots & a^n_n \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

• obecně matice $m \times n$, U musí mít dimenzi n

v musí mít dimenzi m

• skalární součin $\vec{U}\cdot\vec{V} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$

proto do řádku

• soustava rovnic (viz Př. 2)

$$1\tilde{v}^1 + 1\tilde{v}^2 + 1\tilde{v}^3 = 2$$
$$0\tilde{v}^1 + 1\tilde{v}^2 + 1\tilde{v}^3 = 3$$
$$1\tilde{v}^1 + 0\tilde{v}^2 + 1\tilde{v}^3 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

– maticový zápis

1.3.2.
1.4.1.

ve 2D $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ve 3D $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

↳ otočení v rovině xy
z-ová souřadnice se nezmění

nuly ve 3. řádku a sloupci mimo diagonálu

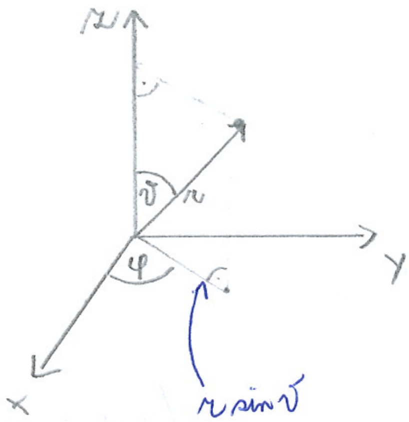
neovlivní, co se děje v rovině xy => sem vepíšu 2D matici

cvičení: otočení kolem osy x o úhel $-\alpha$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$* \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$

Příklad 4 (1.4)



$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
$z = r \cos\vartheta$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

$dx = \sin\vartheta\cos\varphi\, dr + r\cos\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi\, d\varphi$
$dy = \sin\vartheta\sin\varphi\, dr + r\cos\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta + r\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$
$dz = \cos\vartheta\, dr \quad - r\sin\vartheta\, d\vartheta \quad + 0\, d\varphi$

DERIVACE $\dfrac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi$ | $\dfrac{d\sin\varphi}{d\vartheta} = 0$ | $\dfrac{dr}{dr} = 1$ | $\dfrac{dx}{dr} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\cdot\dfrac{dr}{dr} + \dfrac{\partial x}{\partial\vartheta}\dfrac{d\vartheta}{dr} + \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\dfrac{d\varphi}{dr}$

$\dfrac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi$ | $\dfrac{d\cos\varphi}{d\vartheta} = 0$ | $\dfrac{dr}{d\varphi} = 0$

1.4.2.

$$dx^2+dy^2+dz^2 = dr^2\Big(\underbrace{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi}_{\sin^2\vartheta} + \cos^2\vartheta\Big) \to 1$$

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$

$$+\,d\vartheta^2\Big(\boxed{r^2}\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \boxed{r^2}\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\Big) \to 1$$

$$+\,d\varphi^2\left(r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi\right)$$

$$+\,2\,dr\,d\vartheta\left(r\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi + r\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi - r\sin\vartheta\cos\vartheta\right)$$

$$+\,2\,dr\,d\varphi\left(-r\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$+\,2\,d\vartheta\,d\varphi\left(-r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2$$

$$\Rightarrow dV = dr\cdot r\,d\vartheta\cdot r\sin\vartheta\,d\varphi$$

$$dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

pokud nekolmé

– zkus zintegrovat přes kouli o poloměru R

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^R r^2\,dr\int_{-\pi}^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Přes Jacobián: $\vec{dx} = \begin{pmatrix} dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} dr\\ d\vartheta\\ d\varphi\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0\end{pmatrix}$$

↳ známe

1.4.3.
1.5.1.

$$dV = \det A \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\det A = r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \cos^2\varphi + r^2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi + r^2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta \cos^2\varphi = r^2 \sin\vartheta \boxed{\cos^2\vartheta} + r^2 \sin\vartheta \boxed{\sin^2\vartheta}$$

$$\det A = r^2 \sin\vartheta \quad \Rightarrow dV = r^2 \sin\vartheta \, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

<u>Příklad 5</u> (1.5) VEKTOR – transformuje se jako souřadnice

$$x'^i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j x^j \qquad v'^i = \sum a_i^j v^j$$

$$\vec{X}' = A\vec{X} \qquad \vec{V}' = A\vec{V}$$

DERIVACE VEKTORU – musí se transformovat jako souřadnice (resp. jako vektor), aby byla vektorem

$$\frac{d\vec{V}'}{dp} \overset{?}{=} A \cdot \frac{d\vec{V}}{dp}$$

libovolný parametr

$$\frac{d}{dp}\vec{V}' = \frac{d}{dp}(A\vec{V}) = \frac{dA}{dp}V + A\frac{dV}{dp}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dA}{dp} = 0 \Rightarrow \text{derivace vektoru je vektor}$$

↳ např. otočení ⇒ ✓

ALE – otáčející se vztažná soustava ($\alpha = \omega \cdot t$)

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = A \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

$$\Uparrow$$

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{V}' = A \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} + \Omega \cdot \vec{V}$$

↳ matice (tenzor) úhlové rychlosti

$$\Omega = \frac{dA}{dt}A^T$$

Příklad 6 (1.6) $\vec{a} \times \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c})}_{\vec{d}} \stackrel{?}{=} \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(na tabuli)

$$x: \; a_2 d_3 - a_3 d_2 = a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)$$

HINT: 2332   1221   3113

$$= b_1 (a_2 c_2 + a_3 c_3) - c_1 (a_2 b_2 + a_3 b_3) + a_1 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_1$$

$$= b_1 (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_1 (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(další)

$$y: \; a_3 d_1 - a_1 d_3 = a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) = b_2 (a_1 c_1 + a_3 c_3) - c_2 (a_1 b_1 + a_3 c_3)$$

$$= b_2 (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_2 (\vec{a} \cdot \vec{c})$$

(stejný)

$$z: \; a_1 d_2 - a_2 d_1 = a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2) = b_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2) - c_2 (a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

$$= b_3 (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_3 (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

HRA S PÍSMENKY (ε-δ gymnastika)

$\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$
$\phantom{\delta_{ij}} = 0 \Leftrightarrow i \neq j$

Kroneckerovo delta

$\varepsilon_{ijk} = 1 \Leftrightarrow \{i,j,k\} = \{1,2,3\} \vee \{2,3,1\} \vee \{3,1,2\}$
$\phantom{\varepsilon_{ijk}} = -1 \Leftrightarrow \{i,j,k\} = \{1,3,2\} \vee \{2,1,3\} \vee \{3,2,1\}$
$\phantom{\varepsilon_{ijk}} = 0 \Leftrightarrow$ jinak

Levi-Civitův tensor

odsud vlastnosti determinantu i vektorového součinu

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \dots \quad c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j$

Einsteinovo sumační pravidlo

(index, který se mi vyskytuje 2x, přes ten sčítám; ← i, j
index, který se mi vyskytuje 1x, ten ponechám ← k

1.6.2.
1.7.1.

$c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \Rightarrow c_3 = \varepsilon_{ij3} a_i b_j = \varepsilon_{123} a_1 b_2 + \varepsilon_{213} a_2 b_1$

ostatní ε nulové!

$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$!

teď k $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ → platí ini identita $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

2.=2. 3.=3. 2.=3.

$i: \quad \varepsilon_{ijk} a_j d_k = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{=\varepsilon_{kij}} a_j \varepsilon_{kmn} b_m c_n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) a_j b_m c_n$

123 → 312 → 231 ... $\varepsilon = 1$
132 → 213 → 321 ... $\varepsilon = -1$

$= a_j b_i c_j - a_j b_j c_i = b_i \left(\sum_j a_j c_j\right) - c_i \left(\sum_j a_j b_j\right) = b_i(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_i(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ✓

$\sum_m \delta_{im} b_m = b_i$ bez sumy (m jsem vysčítal)

„přežijou" jen taková b_m, pro která $m = i$, proto

<u>Příklad 7</u> (1.7.1 i) parametrická rovnice kružnice (poloměr r)

↓

parametr t ... čas nebo třeba délka kruhu

- u tabule - nakreslí
vyznačení body do grafu

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
} polární souřadnice !

↳ vložme parametr t (čas) místo parametru φ (úhel)

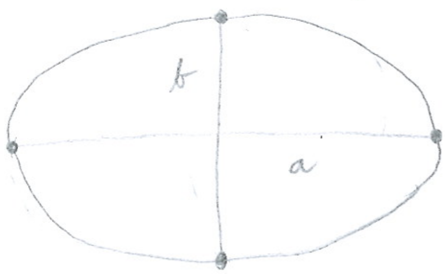
$$\varphi = \omega \cdot t$$

↑ úhlová rychlost

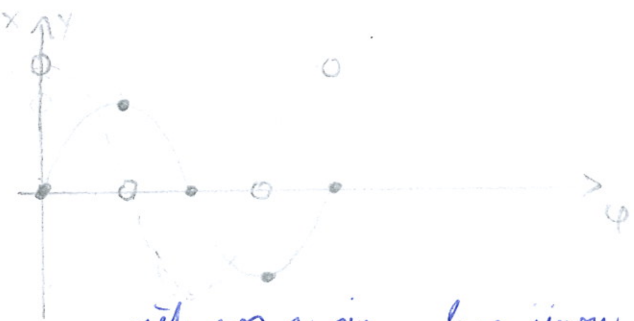
$$\Rightarrow \quad x = r\cos(\omega t)$$
$$y = r\sin(\omega t)$$

- rovnoměrný pohyb po kružnici

ii) parametrická rovnice elipsy



(u tabule)



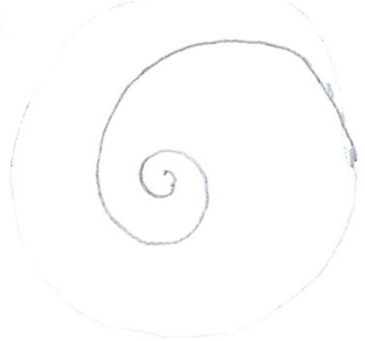
- opět cos a sin, ale s jinou amplitudou

$$x = a\cos\varphi = a\cos(\omega t)$$
$$y = b\sin\varphi = b\cos(\omega t)$$

$a = b = r \rightarrow$ kružnice

iii) parametrická rovnice pravotočivé šroubovice / spirála

SPIRÁLA



(u tabule)

- kruhový pohyb, ale se zmenšujícím se poloměrem

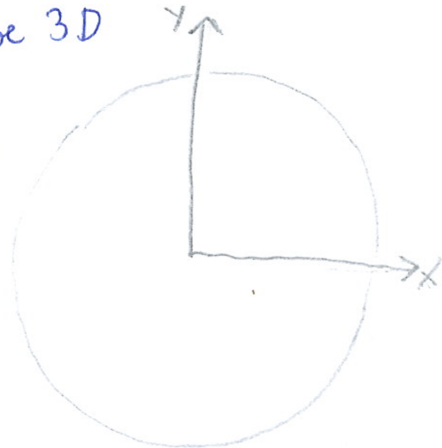
$$x = r\cos\varphi \qquad \varphi = \omega t \qquad x = \frac{\alpha}{t}\cos(\omega t)$$
$$y = r\sin\varphi \;\longrightarrow\; r = \alpha / t \;\Rightarrow\; y = \frac{\alpha}{t}\sin(\omega t)$$

↑ např.

ŠROUBOVICE – ve 3D

SHORA

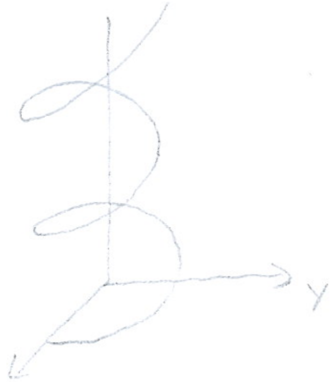
(u tabule s pomocí)



kružnice … $x = r\cos\omega t$

$y = r\sin\omega t$

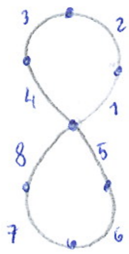
3D



– lineárně stoupající z $z = v_z \cdot t$

iv) parametrická rovnice "osmičky"

(u tabule s pomocí)



→ 8 částí

1.	x roste	y roste
2.	x klesá	y roste
3.	x klesá	y klesá
4.	x roste	y klesá
5.	x roste	y klesá
6.	x klesá	y klesá
7.	x klesá	y roste
8.	x roste	y roste
	2 cykly	1 cyklus

→ start ⇒ sin, sin

→ start ⇒ sin, cos

→ opačný průběh

⇒ x má 2x vyšší frekvenci stáčení než y

⇒ zkusme $x = a \cdot \sin(2\omega t)$

$y = 2a \cdot \sin(\omega t)$

2x taková amplituda z obrázku

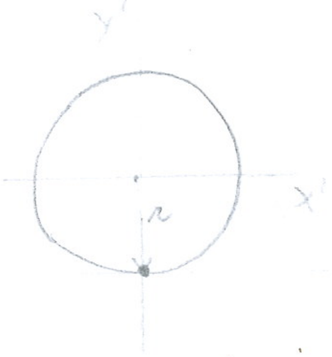
nebo x sinus, y kosinus

Octave → parosmicka.m

(1,2,2,1)

– nejsou parametry

Příklad 8 (1.8)



v soustavě K' - spojená s autem

(1. student)

↳ kamínek koná rovnoměrný pohyb po kružnici

$$x' = r\cos(\omega t) \qquad = r\cos(\omega t)$$
$$y' = r\sin(\omega t) \qquad = -r\sin(\omega t)$$

opačný směr otáčení

(2. student)

$$y = y'$$
$$x = x' + v\cdot t$$

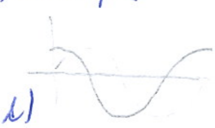
$$\Rightarrow x = r\cos(\omega t) + v\cdot t$$
$$y = -r\sin(\omega t)$$

úhlová rychlost $\left.\begin{matrix} s = v\cdot t = 2\pi r \\ \omega\cdot t = 2\pi \end{matrix}\right\} \omega = v/r \Rightarrow \begin{matrix} x = r\cos\frac{vt}{r} + vt \\ y = -r\sin\frac{vt}{r} \end{matrix}$

řešení doc. Čížka ... v čase $t=0$ kamínek v kontaktu s vozovkou v bodě [0,0]

(3. student)

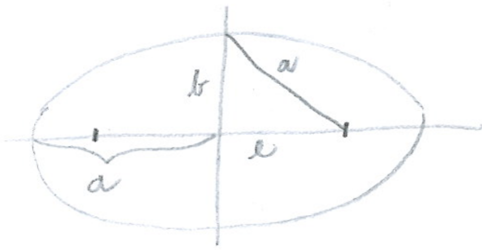
$$\Rightarrow x' = r\cos\left(-\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= r\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -r\sin(\omega t)$$



$$y' = r\sin\left(-\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -r\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -r\cos(\omega t)$$

$$x = x' + v\cdot t = v\cdot t - r\sin\frac{v\cdot t}{r}$$
$$y = y' + r = r - r\cos\frac{v\cdot t}{r}$$

Příklad 9 (19)



polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

1. elipsa se středem v počátku (k tabuli)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ← dosaď polární souřadnice

$$\frac{r^2}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{r^2}{b^2}\sin^2\varphi = 1$$

$$\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2}\right)\cos^2\varphi + \frac{r^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$-r^2\cos^2\varphi\ \frac{1}{b^2}\ \underbrace{\frac{a^2-b^2}{a^2}}_{=\varepsilon^2} + \frac{r^2}{b^2} - 1 = 0 \quad / \ \frac{b^2}{r^2}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon^2\cos^2\varphi + 1 - \frac{b^2}{r^2} = 0$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$$

2. elipsa se středem v (~~levém~~ pravém) ohnisku (k tabuli?)

$$0 = \frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \overset{\cdot a^2b^2}{\Longleftrightarrow} 0 = b^2x^2 + 2b^2ex + b^2e^2 + a^2y^2 - a^2b^2 \quad / \cdot(-1)$$

$$0 = -b^2r^2\cos^2\varphi + 2b^2er\cos\varphi - b^2e^2 - a^2r^2\sin^2\varphi + a^2b^2$$

$$0 = \cos^2\varphi\,(\underbrace{a^2r^2 - b^2r^2}_{e^2r^2}) + \cos\varphi\,(-2b^2er) + (\underbrace{a^2b^2 - b^2e^2}_{b^2(a^2-e^2)=b^4} - a^2r^2)$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2e^2r^2}\left[+2b^2er \pm \left(4b^4e^2r^2 - 4e^2r^2(b^4 - a^2r^2)\right)^{1/2}\right]$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{e^2r^2}\left[+b^2er \pm \left(\cancel{b^4e^2r^2} - \cancel{b^4e^2r^2} + a^2e^2r^4\right)^{1/2}\right]$$

$$\cos\varphi = \frac{\pm a e r^2 + b^2 e r}{e^2 r^2} = -\frac{a}{e} + \frac{b^2}{er} = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{b^2}{er}$$

$$r = \frac{b^2/e}{1/\varepsilon + \cos\varphi} \cdot \frac{\frac{e}{a}}{\frac{e}{a}}$$

$$r = \frac{b^2/a}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

Pozn.: Řešení Keplerovy úlohy

trajektorie $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ $\qquad p = \dfrac{l^2}{GMm^2}$

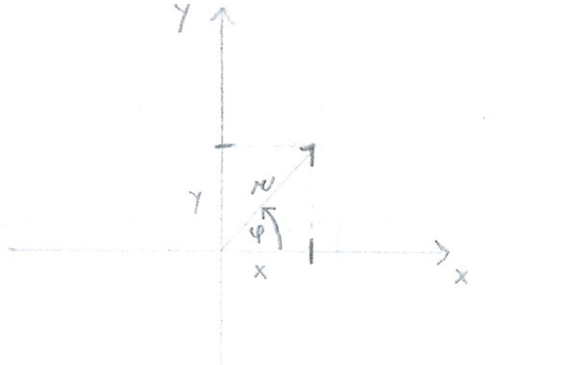
$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2 l^2 E}{G^2 M^2 m^3}$$

		kružnice
elipsa	$E < 0$	... $\varepsilon \in [0, 1)$
parabola	$E = 0$	... $\varepsilon = 1$
hyperbola	$E > 0$	... $\varepsilon \in (1, \infty)$

z 1. cvičení

Příklad 4(1) – více zeširoka
(1.4)

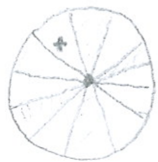
- 2D
  - kartézské souřadnice … (x, y)
  - polární souřadnice … (r, φ)



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos\varphi$$

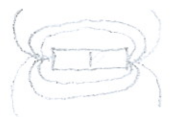
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

proč? Např. terč na šipky



↳ poloha šipky se určí snadněji pomocí r (vzdálenost od terče) a φ (výseč) než pomocí x, y

*dále např. eliptické souřadnice (magnetický dipól) aj.



$$x = a \cosh\mu \cos\nu$$
$$y = a \sinh\mu \sin\nu$$

* a … vzdálenost ohniska od středu
  A … velká poloosa
  B … malá poloosa

$$a^2 = A^2 - B^2 \rightarrow A = a \cdot \cosh\mu$$

škálování

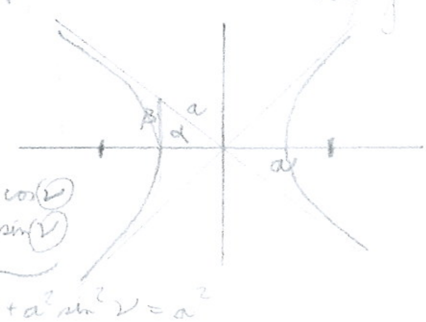
$$B = a \cdot \sinh\mu \qquad \cosh^2\mu - \sinh^2\mu = 1$$

$$\left(\frac{e^{\mu}+e^{-\mu}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}2e^0 - \left(-\frac{1}{4}2e^0\right) = 1$$

* $$\frac{x^2}{a^2\cosh^2\mu} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2\mu} = \cos^2\nu + \sin^2\nu = 1$$

** $$\frac{x^2}{a^2\cos^2\nu} - \frac{y^2}{a^2\sin^2\nu} = \cosh^2\mu - \sinh^2\mu = 1$$

** $x = A\cos\nu$, $y = B\sin\nu$ } parametrická rovnice elipsy



$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow \alpha = a\cos\nu$$
$$\beta = a\sin\nu$$
$$a^2\cos^2\nu + a^2\sin^2\nu = a^2$$

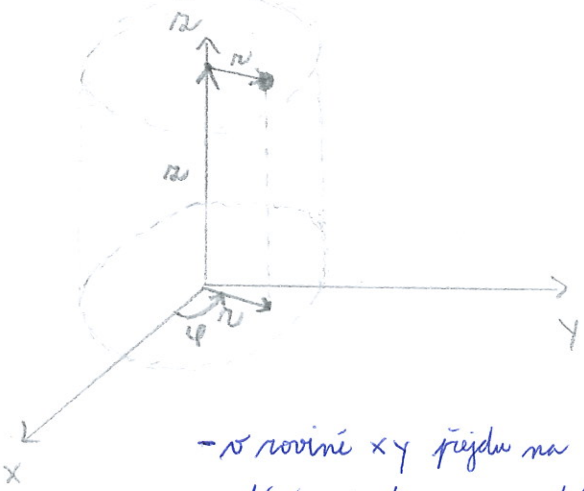
• 3D

• kartézské souřadnice ... (x, y, z)

• cylindrické (válcové) souřadnice ... (r, φ, z)

• sférické (kulové) souřadnice ... (r, ϑ, φ)

*pravotočivá báze (x, y, z)



- v rovině xy přejdu na polární souřadnice, z ponechám

Např. Stejný terč na šipky (r, φ), ale měřím i hloubku vrhu šipky (z)

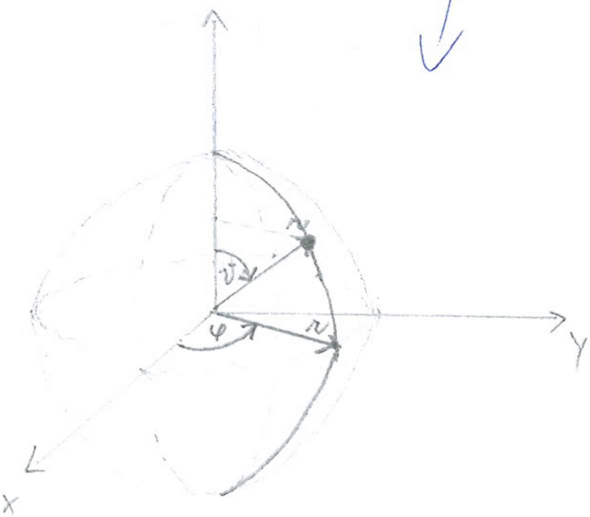
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$
$$z = z$$

} jako u polárních souřadnic

$r \leftrightarrow \rho$

dle Čížka

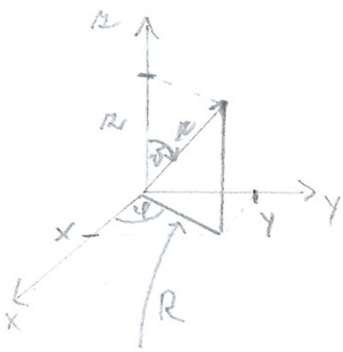


- zobrazení jako na glóbusu

poloměr sféry (Země) ... r

zeměpisná délka ... ϑ

zeměpisná šířka ... φ



jako sférické souřadnice

$$x = \underbrace{r\sin\vartheta}_{R}\cos\varphi = R\cos\varphi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi = R\sin\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

4.3.

• inverzní vztahy (k tabuli)

• $r^2 = x^2+y^2+z^2$ $\xrightarrow{\text{ověř}}$ $r^2 = r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta$

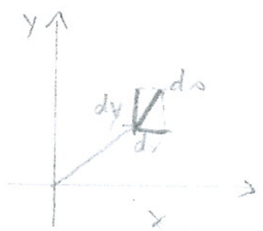
$$r^2 = r^2\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2\cos^2\vartheta$$
$$r^2 = r^2(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)$$
$$r^2 = r^2$$

• $\vartheta = \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\xrightarrow{\text{ověř}}$ $\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{R}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

• $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ $\xrightarrow{\text{ověř}}$ $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}$

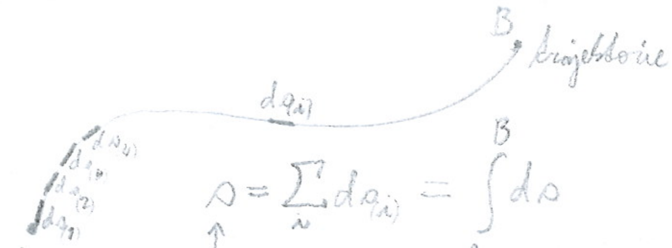
objemový element / ortogonální souřadnice

• 2D kartézské souřadnice



délkový element $ds = (dx^2+dy^2)^{1/2} = (ds_1^2+ds_2^2)^{1/2}$

$$ds_1 = dx$$
$$ds_2 = dy$$



$$s = \sum_i ds_{(i)} = \int_A^B ds$$

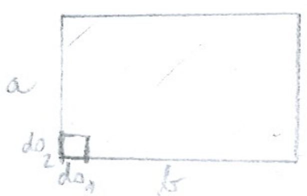
délka trajektorie (dráha)

pořadí elementu ne x, y složka

integrál

plošný element $dS = ds_1\, ds_2$

→ obsah kvádru $(a\times b)$ (kdo umí integrovat)



$$\int_0^a\int_0^b 1\, ds_1\, ds_2 = [s_1]_0^b\,[s_2]_0^a = ab \checkmark$$

suma všech dílečků

$$\sum_i ds_{1(i)}\, ds_{2(i)}$$

• 2D polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\frac{dx}{\cancel{dt}} = \frac{dr}{\cancel{dt}}\cos\varphi + r(-\sin\varphi)\frac{d\varphi}{\cancel{dt}}$$

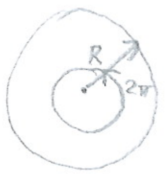
$$\Rightarrow dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$ds = (dx^2+dy^2)^{1/2} = \big((\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)dr^2 + (r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi)d\varphi^2 - 2r\sin\varphi\cos\varphi\, dr\, d\varphi + 2r\sin\varphi\cos\varphi\, dr\, d\varphi\big)^{1/2}$$
$$= (dr^2 + r^2 d\varphi^2)^{1/2} = (ds_1^2 + ds_2^2)^{1/2}$$

$$ds_1 = dr$$
$$ds_2 = r\, d\varphi$$

(kdo umí integrovat)

$\rightarrow$ obsah kružnice $K = \int_K ds_1 ds_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\varphi = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \pi R^2$ ✓



$$\frac{dr^2}{dr} = 2r$$
$$\Rightarrow \int r = \frac{r^2}{2}$$

• 3D kartézské souřadnice

$$ds_1 = dx$$
$$ds_2 = dy$$
$$ds_3 = dz$$

objemový element $dV = dx\,dy\,dz$

$dV = ds_1 ds_2 ds_3$

• cylindrické souřadnice (3D)
(někoho to bavilo)

$x = r\cos\varphi \rightarrow dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$

$y = r\sin\varphi \rightarrow dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$

$z = z \rightarrow dz = dz$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + d\varphi^2(r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi) + dz^2 + 2r\sin\varphi\cos\varphi\, dr\, d\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi\, dr\, d\varphi$$
$$= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$$

$$\left.\begin{aligned} ds_1 &= dr \\ ds_2 &= r\, d\varphi \\ ds_3 &= dz \end{aligned}\right\}$$ podobně jako u polárních souřadnic

$$dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

(na tabuli).

objem válce $V = \int_V do_1 do_2 do_3 = \int_0^{v}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\varphi\,dz = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_0^{v} = \pi R^2 \cdot v$ ✓

- sférické souřadnice
  (další k tabuli)

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi \rightarrow dx = \sin\vartheta\cos\varphi\,dr + r\cos\vartheta\cos\varphi\,d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi\,d\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi \rightarrow dy = \sin\vartheta\sin\varphi\,dr + r\cos\vartheta\sin\varphi\,d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi\,d\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta \rightarrow dz = \cos\vartheta\,dr + r(-\sin\vartheta)\,d\vartheta$$

$$\begin{aligned} do^2 = dx^2+dy^2+dz^2 &= dr^2(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta) \\ &+ d\vartheta^2(r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta) \\ &+ d\varphi^2(r^2\sin^2\vartheta\sin\varphi + r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi) \\ &+ dr\,d\vartheta(2r\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi + 2r\sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi - 2r\sin\vartheta) \\ &+ dr\,d\varphi(2r\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - 2r\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi) \\ &+ d\varphi\,d\vartheta(-2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + 2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi) \\ &= dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 = do_1^2 + do_2^2 + do_3^2 \end{aligned}$$

$$do_1 = dr$$
$$do_2 = r\,d\vartheta$$
$$do_3 = r\sin\vartheta\,d\varphi$$
$$dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

(na tabuli)

objem koule $V = \int_V do_1 do_2 do_3 = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{R} r^2 dr \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi}[-\cos\vartheta]_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$ ✓

- pro experty … přes Jacobián

$$\vec{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

KONTROLA $\quad dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$

$= \sin\vartheta \cos\varphi \, dr + r \cos\vartheta \cos\varphi \, d\vartheta - r \sin\vartheta \sin\varphi \, d\varphi$ $\quad \Rightarrow$ stejný výsledek (jiný zápis)

(z tabule)

$$A = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

tvrdím, že $dV = \underbrace{\det A}_{\text{jacobián}} \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

jacobián – "velikost matice A"

v kartézských souřadnicích $d\vec{x} = A \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1$ ✓

(kdo umí determinant)

$\det A = 0 + r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \cos^2\varphi + r^2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta \sin^2\varphi$
$\quad + r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \sin^2\varphi + r^2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta \cos^2\varphi = r^2 \sin\vartheta$

$\Rightarrow dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

Příklad 5(1) – více rozšířeně

(1.5)

- $\vec{v} = v_i \vec{e}_i = v_i' \vec{e}_i' = v_i' A_{ik} \vec{e}_k = v_k \vec{e}_k$

$v_i \vec{e}_i$ … původní báze K

$v_i' \vec{e}_i'$ … nová báze K'

$$\vec{e}_i' = A_{ik} \vec{e}_k$$
$$\vec{e}_k = A_{jk} \vec{e}_j'$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_k = \sum_i A_{ik} v_i'}$$

$$\| \vec{v} = A^T \vec{v}' \|$$

- $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv_k}{dt} \vec{e}_k = \dfrac{dv_i'}{dt} \vec{e}_i' + v_i' \dfrac{dA_{ik}}{dt} \vec{e}_k = \dfrac{dv_i'}{dt} A_{ik} \vec{e}_k + v_i' \dfrac{dA_{ik}}{dt} \vec{e}_k$

LS, PS v původní bázi => porovnáme složky

$$\boxed{\frac{dv_k}{dt} = \sum_i \left(A_{ik} \frac{dv_i'}{dt} + \frac{dA_{ik}}{dt} v_i' \right)}$$

$$\left\| \frac{d\vec{v}}{dt} = A^T \frac{d\vec{v}'}{dt} + \underbrace{\frac{dA^T}{dt} \vec{v}'}_{} \right\|$$

↳ člen navíc

$= 0$ => derivace je vektor

$$\frac{dv_k}{dt} \vec{e}_k = \frac{dv_i'}{dt} \vec{e}_i' + v_i' \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk} \vec{e}_j'$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} \dot{v}_1' \\ \dot{v}_2' \\ \dot{v}_3' \end{pmatrix}_{K'} + \begin{pmatrix} \sum_{j,k} v_j' \frac{dA_{jk}}{dt} A_{1k} \\ \sum_{j,k} v_j' \frac{dA_{jk}}{dt} A_{2k} \\ \sum_{j,k} v_j' \frac{dA_{jk}}{dt} A_{3k} \end{pmatrix}}$$

LS v původní bázi, PS v nové bázi => nemůžeme porovnat složky, ale musíme rozepsat složky do bazí

"vektorové chování"

↳ rozhodující je matice $\Omega = \dfrac{dA}{dt} A^T$

$$\begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \omega$$

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ +\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ $\boxed{\text{matice rotace kolem } z \text{ o úhel } \omega t}$

$$\Omega_{ij} = \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = E \Rightarrow 0 = \frac{d(AA^T)}{dt} = \frac{dA}{dt}A^T + A\frac{dA^T}{dt} = \Omega + \Omega^T$$

$\Rightarrow \Omega$ antisymetrická

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\Omega} = (0, 0, \omega)$$

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk}$$

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\Omega_k$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_K = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{K'} + \underbrace{v_i' \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk}\, \vec{e}_j'}_{= v_i' \Omega_{ij} \vec{e}_j' = v_i' \varepsilon_{ijk} \Omega_k \vec{e}_j'}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_K = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{K'} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{v}'\right)_{K'}}$$

Závěr: • $\frac{dA}{dt} \neq 0 \Rightarrow$ OK ... derivace (podle času) vektoru je vektor

- úplně "košér" jsou transformace s konstantními členy (prvky) matice $\Rightarrow$ můžu derivovat podle jakéhokoli parametru
- Galileiho transformace

↳ pomocí matice lze zapsat jen ve 4-vektorovém formalismu

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- stejně tak Lorentzova transformace

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

obě: $\frac{dA}{dt} = 0$ (inerciální soustavy, "nekošér (parametr v)" transformace)