Příklad 11.1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \qquad \sigma' = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma' = A \sigma A^T \quad , \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

matice otočení o úhel ϑ

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \sigma_{xx}\cos\vartheta + \tau_{xy}\sin\vartheta & -\sigma_{xx}\sin\vartheta + \tau_{xy}\cos\vartheta \\ \hline \tau_{xy}\cos\vartheta + \sigma_{yy}\sin\vartheta & -\tau_{xy}\sin\vartheta + \sigma_{yy}\cos\vartheta \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma'_{xx} = \sigma_{xx}\cos^2\vartheta + 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta + \sigma_{yy}\sin^2\vartheta$$

$$\sigma'_{yy} = \sigma_{xx}\sin^2\vartheta - 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta + \sigma_{yy}\cos^2\vartheta$$

$$\tau'_{xy} = -\sigma_{xx}\sin\vartheta\cos\vartheta + \tau_{xy}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + \sigma_{yy}\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\tau'_{xy} = 0 = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\sin\vartheta\cos\vartheta + \tau_{xy}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

diagonální matice vůči hlavním osám

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\vartheta = \tau_{xy}\cos 2\vartheta$$

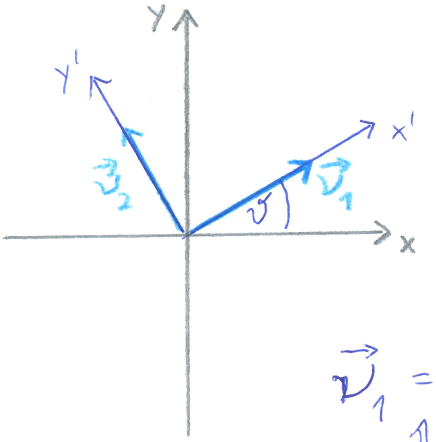
$$\underline{\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}}$$

Příklad 11.2.

$$\sigma_{xx} = 5\,MPa$$
$$\sigma_{yy} = -2\,MPa$$
$$\tau_{xy} = 3\,MPa$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = 20{,}3^\circ$$



$$\vec{\nu}_1 = (\cos\vartheta,\ \sin\vartheta) = (0{,}94;\ 0{,}35)$$

jednotkový vektor

$$\vec{\nu}_2 = (-\sin\vartheta,\ \cos\vartheta) = (0{,}35;\ 0{,}94)$$

jednotkový vektor kolmý k $\vec{\nu}_1$

$\vec{\nu}_1$ a $\vec{\nu}_2$ jsou normálové vektory k hlavním rovinám

$$\Rightarrow \sigma' = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma'_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$\tau'_{xy} = 0$

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}\cos^2\vartheta + 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta + \sigma_{yy}\sin^2\vartheta = \underline{6{,}11\,MPa}$$
$$\sigma_2 = \sigma_{xx}\sin^2\vartheta - 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta + \sigma_{yy}\cos^2\vartheta = \underline{-3{,}11\,MPa}$$

Příklad 11.3.

Hookův zákon pro izotropní prostředí

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma - \nu \, Tr(\sigma)\, \mathbb{E}\right]$$

E ... Youngův modul pružnosti

ν ... Poissonovo číslo (poměr)

$Tr(\sigma)$ ... stopa matice σ

$= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$

$\mathbb{E}$ ... jednotková matice

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right] = \underline{\frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right)}$$

podobně
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right)$$

$$\underline{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{E}(1+\nu)\tau_{xy}}$$

podobně
$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{E}(1+\nu)\tau_{xz}$$
$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{E}(1+\nu)\tau_{yz}$$

Příklad 11.4.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(\underbrace{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}_{})\right) = 0 \iff \underline{\sigma_{yy} = \frac{1}{\nu}\sigma_{xx}}$$

$\sigma_{zz} = 0$

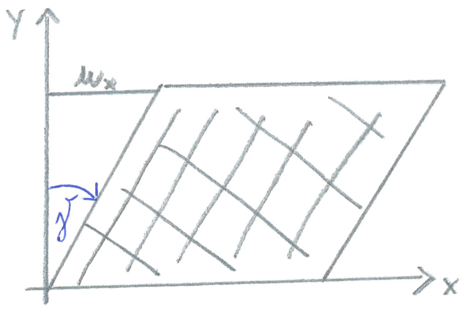
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\frac{1}{\nu}\sigma_{xx} - \nu\sigma_{xx}\right) = \underline{\frac{1}{E}\,\frac{1-\nu^2}{\nu}\,\sigma_{xx}}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(-\nu\frac{1}{\nu}\sigma_{xx} - \nu\sigma_{xx}\right) = \underline{-\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{xx}}$$

Příklad 11.5.

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma - \nu \, Tr(\sigma)\, \mathbb{E}\right]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}$$



$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial y}}_{tg\,\gamma} + \underbrace{\frac{\partial u_y}{\partial x}}_{=0}\Big) = \frac{1}{2}\, tg\, \gamma \doteq \frac{1}{2}\gamma$$

modul pružnosti ve smyku: $\tau = G\gamma$

smyk

smykové napětí

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{1}{2}\gamma$$

$$\Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Příklad 11.6.

a) tzv. bulk

"objemový" materiál

↳ ideálně nekonečný ve všech směrech

=> nehraje roli, co se děje na povrchu

$$\varepsilon^{bulk} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{bulk} - \nu(\sigma_{yy}^{bulk} + \sigma_{zz}^{bulk}) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^{bulk} - \nu(\sigma_{xx}^{bulk} + \sigma_{zz}^{bulk}) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^{bulk} - \nu(\sigma_{xx}^{bulk} + \sigma_{yy}^{bulk}) \end{pmatrix}$$

σ^{bulk} diagonální matice (z obrázku)

$$\varepsilon_{xx}^{bulk} = \varepsilon_{yy}^{bulk} = \varepsilon_{zz}^{bulk} = \underline{\varepsilon_0 = \frac{1}{E}(1-2\nu)\,\sigma^{bulk}}$$

$\sigma_{xx}^{bulk} = \sigma_{yy}^{bulk} = \sigma_{zz}^{bulk}$ (z obrázku)

$$\sigma^{bulk} = \begin{pmatrix} \sigma^{bulk} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{bulk} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{bulk} \end{pmatrix}$$

b) tzv. film

tenká vrstva

↳ povrch hraje roli, v tomto případě fixace substrátem

$$\sigma^{film} = \sigma^{bulk} + \sigma^{substr.}, \quad \text{kde} \quad \sigma^{substr.} = \begin{pmatrix} -\sigma^{sub.} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^{sub.} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

substrát v rovině xy působí napětím v opačném směru než σ^{bulk}

+ žádný smyk => diagonální tvar

+ ve směru osy z expanzi nebrání

$$\Rightarrow \varepsilon_{xx}^{film} = \varepsilon_{yy}^{film} = 0 = \frac{1}{E}\left((1+\nu)(\sigma^{bulk} - \sigma^{sub}) - \nu(3\sigma^{bulk} - 2\sigma^{sub})\right)$$

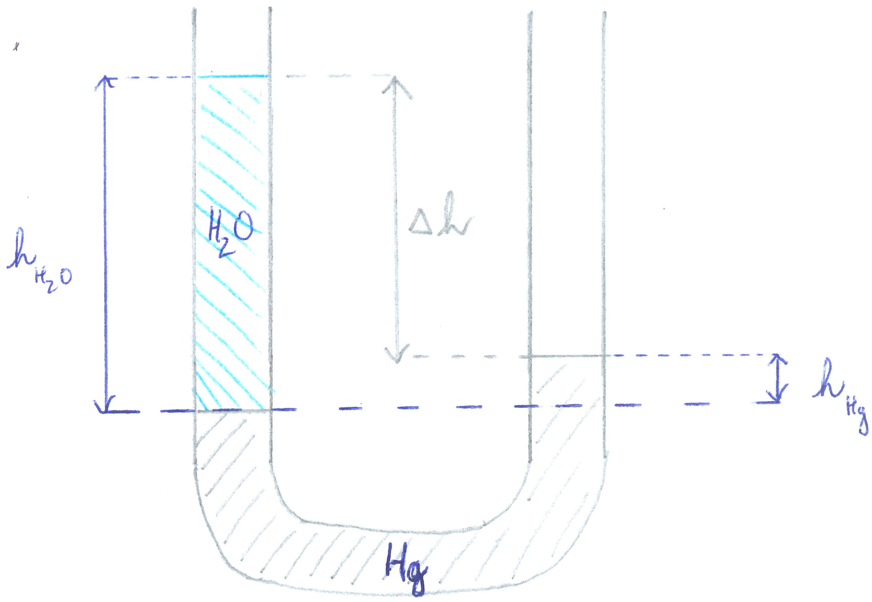
$$0 = \underset{\frac{1}{E}(1-2\nu)\sigma^{bulk}}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon_0}} + \frac{\sigma^{sub.}}{E}(\nu - 1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma^{substr.} = \frac{\varepsilon_0 E}{1-\nu}}$$

11.6.2.

$$\varepsilon_{zz}^{film} = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\,\sigma^{bulk} - \nu\left(3\sigma^{bulk} - 2\sigma^{substr.}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{E}\, 2\nu \underbrace{\sigma^{substr.}}_{=\frac{\varepsilon_0 E}{1-\nu}} + \underbrace{\varepsilon_0}_{=\frac{1}{E}(1-2\nu)\sigma^{bulk}} = \varepsilon_0\left(\frac{2\nu}{1-\nu} + 1\right) = \underline{\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\varepsilon_0}$$

Příklad 11.7.



$$p_{H_2O} = p_{Hg}$$

$$\rho_{H_2O}\, g\, h_{H_2O} = \rho_{Hg}\, g\, h_{Hg} \Rightarrow h_{Hg} = h_{H_2O} \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}}$$

$$\Delta h = h_{H_2O} - h_{Hg} = h_{H_2O} - h_{H_2O} \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}}$$

$$\Delta h = \frac{\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}} h_{H_2O} = 9{,}3 \text{ cm}$$

$\rho_{Hg} = 13{,}5 \text{ g cm}^{-3}$

$\rho_{H_2O} = 1 \text{ g cm}^{-3}$

$h_{H_2O} = 10 \text{ cm}$

Příklad 11.8.

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d_1^2} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = 0{,}995\ m\,s^{-1}$$

$Q = 300\ l/min = 0{,}005\ m^3/s$

$d_1 = 80\ mm = 0{,}08\ m$

$$S_2 = \frac{Q}{v_2}$$

$$\frac{1}{4}\pi d_2^2 = \frac{Q}{v_2}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_2}} = 28{,}2\ mm$$

$v_2 = 8\ m\,s^{-1}$

Příklad 11. 9.

rovnováha sil :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$$

(závaží) (předmět)

$$\vec{F}_{G1} + \vec{F}_{vz1} = \vec{F}_{G2} + \vec{F}_{vz2}$$

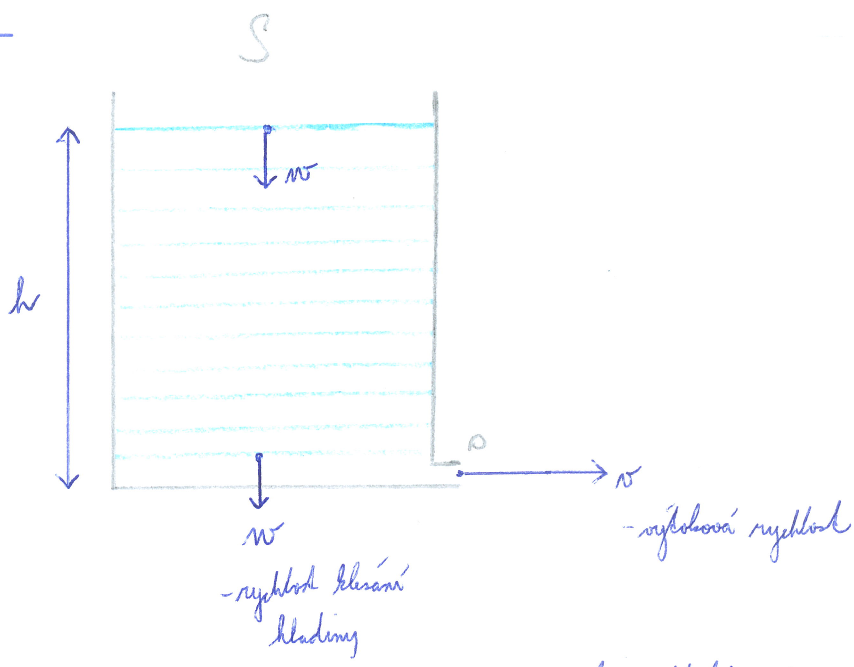
$$\downarrow$$

$$m_z g - \rho_v \underbrace{V_z}_{= \frac{m_z}{\rho_z}} g = m_p g - \rho_v \underbrace{V}_{= \frac{m_p}{\rho_p}} g$$

$$m_z \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_z}\right) = m_p \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_p}\right)$$

$$m_p = m_z \frac{1 - \rho_v/\rho_z}{1 - \rho_v/\rho_p}$$

Příklad 11.10.



* obě rychlosti uvažujeme ve stejné výšce
... stejný tlak / potenciál

- rovnice kontinuity $\quad S w = s v \quad \Rightarrow w = \frac{s}{S} v$

- Bernoulliova rovnice $\quad \frac{1}{2}\rho w^2 + \rho g h + p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 + p_a$

atm. tlak

na částici vně nepůsobí hydrostatický tlak

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{s}{S}\right)^2 v^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v^2\left(1-\left(\frac{s}{S}\right)^2\right) = 2hg$$

$$v = \sqrt{2hg} \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{s}{S}\right)^2}$$

• čas

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{-S \cdot w}_{\text{objem klesá}} = -s \cdot v$$

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{S}_{\text{konst.}} \cdot h) = -s \cdot \sqrt{2hg} \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{s}{S}\right)^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{h} \; \underbrace{\frac{s/S \cdot \sqrt{2g}}{\sqrt{1-(s/S)^2}}}_{\text{ozn. } A \text{ ... konst.}}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -h^{1/2} \cdot A$$

SEPARACE PROMĚNNÝCH: $\underbrace{-h^{-1/2}\,dh}_{\text{závisí JEN na } h} = \underbrace{A\,dt}_{\text{závisí JEN na } t}$

integrál

výška na konci

konečný čas

$$\int_{h_0}^{0} -h^{-1/2}\,dh = A \int_0^T dt$$

výška na počátku

počáteční čas

$$\int_0^{h_0} h^{-\frac{1}{2}}\,dh = A\int_0^T dt$$

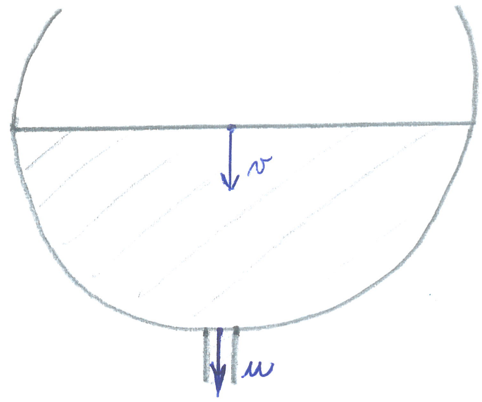
$$\left[\frac{h^{1/2}}{1/2}\right]_0^{h_0} = A\left[t\right]_0^T$$

$$2\sqrt{h_0} = A\cdot T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\sqrt{h_0}}{A} = \frac{2\sqrt{h_0}}{\sqrt{2g}}\,\frac{S}{s}\sqrt{1-\left(s/S\right)^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\sqrt{\left(S/s\right)^2-1}$$

Příklad 11.11.



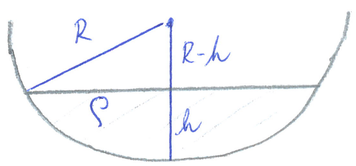
u... rychlost výtoku

v... rychlost poklesu kapaliny

z minulého příkladu ... $u = \sqrt{2gh} \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{s}{S}\right)^2} \underset{s \ll S}{\doteq} \sqrt{2gh}$

$$\frac{dV}{dt} = -us = -\sqrt{2gh}\,\pi r^2$$

objem kulové úseče: $V = \frac{\pi}{6} h \left(3\rho^2 + h^2\right) = \frac{\pi}{6} h\left(3(2hR - h^2) + h^2\right)$



$$\rho^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2hR - h^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{6}\left(6h^2R - 2h^3\right)\right) = \frac{\pi}{6}\left(12hR - 6h^2\right)\frac{dh}{dt}$$

DOHROMADY: $\frac{dh}{dt}\left(2hR - h^2\right) = -\sqrt{2gh}\, r^2$

$$\int_R^0 \left(2h^{1/2}R - h^{3/2}\right) dh = \int_0^T -\sqrt{2g}\, r^2\, dt$$

11.11.2.

$$\left[2 \cdot \frac{2}{3} h^{3/2} R - \frac{2}{5} h^{5/2} \right]_R^0 = -\sqrt{2g}\, r^2\, T$$

$$R^{5/2} \left(\frac{20-6}{15} \right) = -\sqrt{2g}\, r^2\, T \quad \Rightarrow \quad \underline{T = \frac{14}{15} \frac{R^{5/2}}{r^2 \sqrt{2g}}}$$

Příklad 11.12.

$$m\ddot{x} = m\dot{v} = \underbrace{-6\pi\eta R v}_{\text{Stokesova síla}} + \underbrace{mg}_{\text{tíhová síla}} - \underbrace{\rho_v V g}_{\text{vztlaková síla}}$$

$$\frac{6\pi\eta R}{m} = \frac{6\pi\eta R}{\frac{4}{3}\pi R^3\rho} = \underline{\frac{9\eta}{2R^2\rho} \overset{\text{ozn.}}{=} A}$$

$$\frac{1}{m}(mg - \rho_v V g) = \underline{g\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho}\right) \overset{\text{ozn.}}{=} B}$$

$$\dot{v} = -Av + B$$

nasadíme řešení („Ansatz")

$$v = \underbrace{Ce^{-At}}_{\text{homogenní řešení}} + D$$

partikulární řešení $(D = B/A)$

$$\dot{v} + Av = B$$

$$v(t=0) = C + D = 0$$

nulová počáteční rychlost

$$C = -D = -\frac{B}{A} \Rightarrow \underline{v(t) = \frac{B}{A}\left(1 - e^{-At}\right)}$$

dráha: $x = \int v \, dt$

$$x(t) = \int \frac{B}{A}\left(1 - e^{-At}\right) dt = \frac{B}{A} t + \frac{B}{A^2} e^{-At} + \text{konst.}$$

$$x(t=0) = 0 = \frac{B}{A^2} + \text{konst.} \quad \Rightarrow \text{konst.} = -\frac{B}{A^2}$$

nulová počáteční poloha

$$x(t) = \frac{B}{A}\left(t - \frac{1}{A}\left(1 - e^{-At}\right)\right)$$

$$v(t) = \frac{B}{A}\left(1 - e^{-At}\right)$$

$\eta(20°C) \doteq 10^{-3}\ Pa \cdot s$

$A = 1{,}67\ s^{-1}$

$B = 6{,}18\ m s^{-2}$

$$t \to +\infty \quad \Rightarrow \quad v_\infty \to \frac{B}{A} = 3{,}7\ m/s$$

a) $\bar{v} = 0{,}95\, v_\infty = v_\infty\left(1 - e^{-A\bar{t}}\right)$

$$e^{-A\bar{t}} = \frac{1}{20}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{A} \ln 20 \doteq 3\tau = \underline{1{,}8\ s}$$

$1/A = \tau = 0{,}6\ s$

$$\bar{x} = x(\bar{t}) = v_\infty\left(\bar{t} - \frac{1}{B} 0{,}95\, v_\infty\right) \doteq \underline{4{,}56\ m}$$

b) $\bar{t} = 3\tau$ → stejná čísla

relaxační doba pro exponenciálu