Cvičení 10

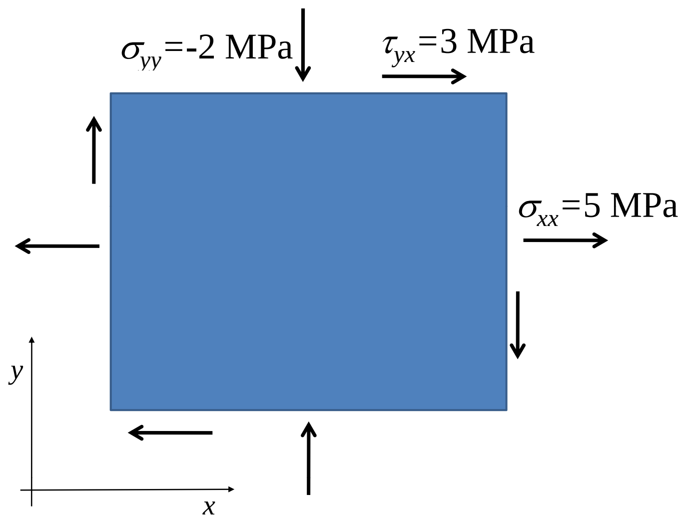
1. Na těleso působí napětí v rovině xy a jeho napěťový stav je popsán tenzorem napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

(a) Najděte vyjádření tenzoru napětí v soustavě souřadnic pootočené v rovině xy o úhel ϑ.
(b) O jaký úhel ϑ musíme v rovině xy otočit souřadnicové osy abychom dostali normály k hlavním rovinám?

[*řešení:*
(a) $$\begin{aligned} \sigma_{xx}{}' &= \sigma_{xx}\cos^2\vartheta + \sigma_{yy}\sin^2\vartheta + 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ \sigma_{yy}{}' &= \sigma_{xx}\sin^2\vartheta + \sigma_{yy}\cos^2\vartheta - 2\tau_{xy}\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ \tau_{xy}{}' &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\sin\vartheta\cos\vartheta + \tau_{xy}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta), \end{aligned}$$
(b) $\vartheta = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$]

2. Na těleso působí v rovině xy napětí podle obrázku. Najděte hlavní roviny a maximální a minimální hodnotu napětí.



[*řešení:* Normály k hlavním rovinám jsou navzájem kolmé vektory pootočené v rovině xy vzhledem k osám x a y o úhel $\vartheta = 20.3°$, tj. vektory $v_1 = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) = (0.94, 0.35)$ a $v_2 = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta) = (-0.35, 0.94)$.
Maximální hodnota napětí je $\sigma_1 = 6.1$ MPa, minimální hodnota napětí je $\sigma_2 = -3.1$ MPa.]

3. Izotropní materiál s Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν je ve stavu napjatosti popsaným tenzorem napětí

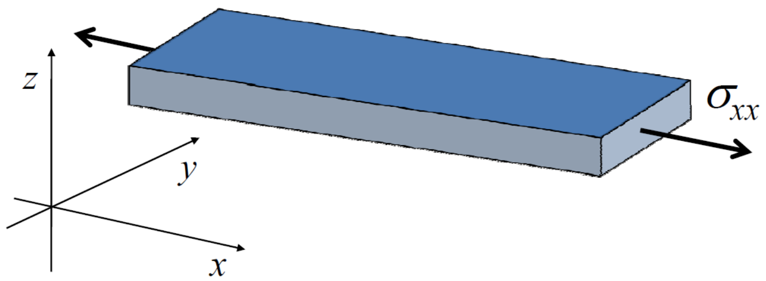
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte tenzor malých deformací.

[*řešení:*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right], \\
\varepsilon_{yy} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right], \\
\varepsilon_{zz} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right], \\
\varepsilon_{xy} &= \tfrac{1+\nu}{E}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_{xz} &= \tfrac{1+\nu}{E}\tau_{xz}, \\
\varepsilon_{yz} &= \tfrac{1+\nu}{E}\tau_{yz}].
\end{aligned}$$

4. Na izotropní materiál s Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν působí tahové napětí podle obrázku. Jakým napětím σ_{yy} musíme působit aby deformace ve směru osy x byla nulová? Jaká bude v takovém případě deformace ve směru osy y a z?

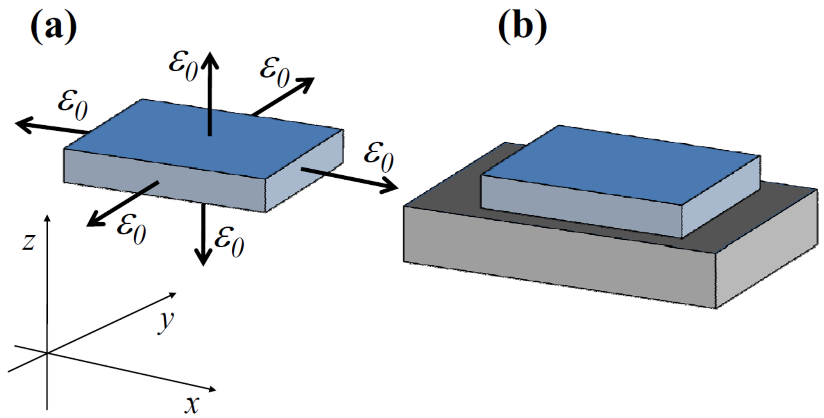


[*řešení:* $\sigma_{yy} = \frac{1}{\nu}\sigma_{xx}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\frac{1-\nu^2}{\nu}\sigma_{xx}$, $\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{xx}$]

5. Ukažte, že modul pružnosti ve smyku je $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

[*řešení:* Z Hookova zákona plyne $\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}$. Složka tenzoru malých deformací ε_{xy} je definována jako polovina úhlu γ daného deformací smykem. Dohromady lze tedy zapsat $\tau = G\gamma$, kde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.]

6. Izotropní materiál je charakterizován Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν. Když vložíme tento materiál do atmosféry vodíku o určitém tlaku, tak se jisté množství vodíku absorbuje a materiál izotropně expanduje, jak je znázorněno na obrázku (a). Z tohoto materiálu napaříme tenkou vrstvu na substrát, který neabsorbuje vodík, viz obrázek (b). Substrát zabraňuje expanzi materiálu v rovině xy. Co se stane, když nyní vložíme tenkou vrstvu se substrátem do atmosféry vodíku?



[*řešení:* V rovině xy vzniknou kompresní napětí σ_{xx} a σ_{yy}, která kompenzují expanzi vrstvy a tenká vrstva bude expandovat jen kolmo na rovinu substrátu. Velikost deformace bude $\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon_0$,
kompresní napětí: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{\varepsilon_0 E}{1-\nu}$.]

7. Do U-trubice nalijeme vodu ($\varrho_{\mathrm{H_2O}} = 1$ g cm^{-3}) a rtuť ($\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13.5$ g cm^{-3}) tak, že sloupec vody je vysoký $h_{\mathrm{H_2O}} = 10$ cm. Jaký bude rozdíl Δh výšky hladin v obou ramenech U-trubice?

[*řešení:* $\Delta h = h_{\mathrm{H_2O}} \frac{\varrho_{\mathrm{Hg}} - \varrho_{\mathrm{H_2O}}}{\varrho_{\mathrm{Hg}}} = 9.3$ cm]

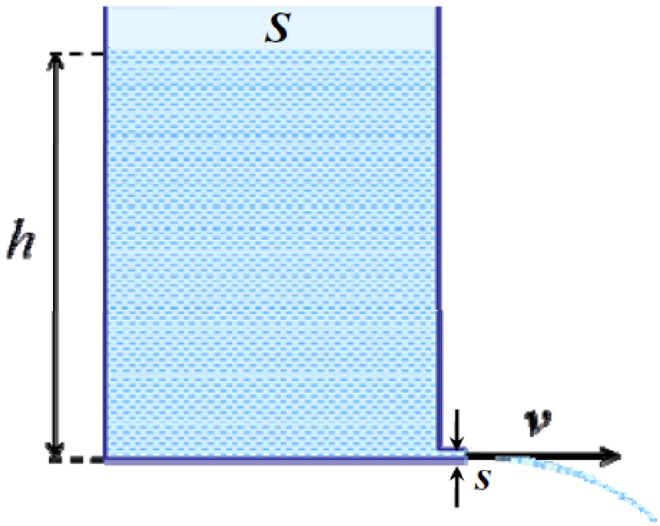
8. Čerpadlo načerpá za 1 minutu 300 litrů vody ($Q = 300$ l/min). Přívodní potrubí má kruhový průřez s průměrem $d_1 = 80$ mm, výtokovým potrubím, které má také kruhový průřez, proudí voda rychlostí $v_2 = 8$ m s^{-1}. Určete rychlost vody v_1 v přívodním potrubí a průměr d_2 výtokového potrubí.

[*řešení:* $v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = 0.995$ m s^{-1}, $d_2 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_2}} = 28.2$ mm]

9. Předmět o hustotě ϱ_p je vyvážen na rovnoramenných vahách mosazným závažím o hmotnosti m_z. Stanovte skutečnou hmotnost předmětu m_p. Hustota mosazi je ϱ_z a hustota vzduchu v okamžiku vážení je ϱ_v.

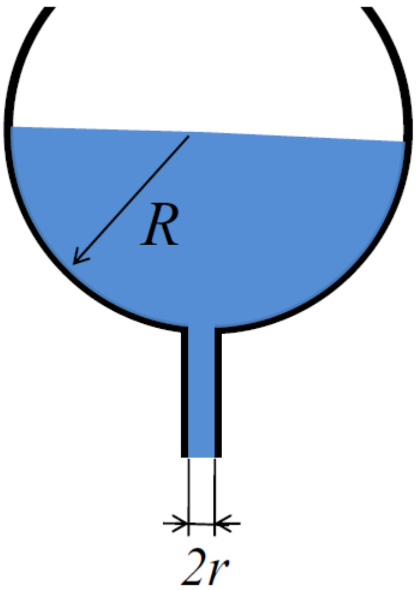
[*řešení:* $m = m_z \frac{1-\varrho_v/\varrho_z}{1-\varrho_v/\varrho_p}$]

10. V sudu o vodorovném průřezu S je ideální kapalina hustoty ϱ. Kapalina vytéká malým otvorem o průřezu s v hloubce h.
(a) Jakou rychlostí v kapalina z nádoby vytéká?
(b) Jak dlouho to bude trvat něž kapalina ze sudu vyteče?



[*řešení:* (a) $v = \sqrt{2hg\frac{1}{1-\frac{s^2}{S^2}}}$, (b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)}$]

11. Stanovte dobu výtoku ideální kapaliny z kulové nádoby o poloměru R, která je naplněna do poloviny (tj. výška hladiny na počátku je R). Voda vytéká tenkou trubkou o poloměru $r \ll R$



[*řešení:* $t = \frac{14}{15}\sqrt{\frac{R^5}{2g\,r^4}}$]

Základní vztahy a údaje

Transformační matice pro otočení v rovině o úhel ϑ:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Kontinuum

transformace tenzoru 2. řádu	$\mathrm{T}' = \mathrm{A}\mathrm{T}\mathrm{A}^T$
Hookův zákon pro izotropní prostředí	$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma - \nu \mathrm{Tr}(\sigma)\mathrm{E}\right]$
	ε je tenzor malých deformací
	σ je tenzor napětí
	E je Youngův modul pružnosti
	ν je Poissonův poměr
rovnice kontinuity	$S_1 v_1 = S_2 v_2$
Bernoulliova rovnice	$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p + \varrho g h = \text{konst.}$
Stokesova odporová síla	$F_S = 6\pi\eta R v$
Hagen-Poiseuillův zákon	$Q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{\Delta l}R^4$