

Cvičení 10

1. Na těleso působí napětí v rovině xy a jeho napěťový stav je popsán tenzorem napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

(a) Najděte vyjádření tenzoru napětí v soustavě souřadnic pootočené v rovině xy o úhel ϑ .

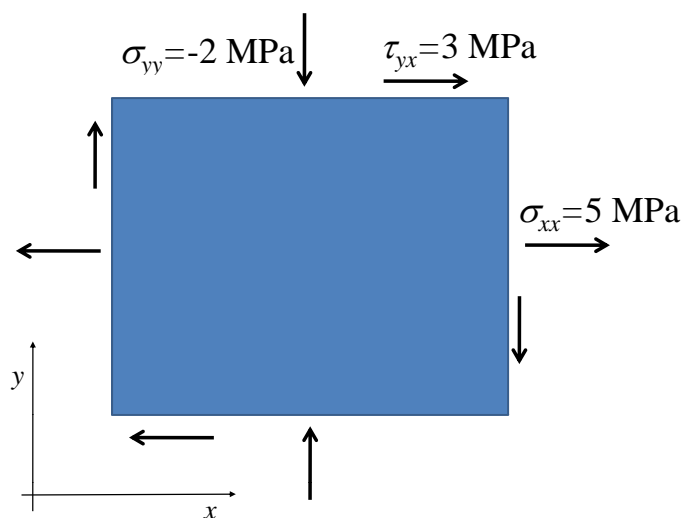
(b) O jaký úhel ϑ musíme v rovině xy otočit souřadnicové osy abychom dostali normály k hlavním rovinám?

[řešení:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sigma_{xx}' &= \sigma_{xx} \cos^2 \vartheta + \sigma_{yy} \sin^2 \vartheta + 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \sigma_{yy}' &= \sigma_{xx} \sin^2 \vartheta + \sigma_{yy} \cos^2 \vartheta - 2\tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \tau_{xy}' &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \vartheta \cos \vartheta + \tau_{xy}(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta), \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \vartheta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}]$$

2. Na těleso působí v rovině xy napětí podle obrázku. Najděte hlavní roviny a maximální a minimální hodnotu napětí.



[řešení: Normály k hlavním rovinám jsou navzájem kolmé vektory pootočené v rovině xy vzhledem k osám x a y o úhel $\vartheta = 20.3^\circ$, tj. vektory $v_1 = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) = (0.94, 0.35)$ a $v_2 = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta) = (0.35, 0.94)$.

Maximální hodnota napětí je $\sigma_1 = 6.1$ MPa, minimální hodnota napětí je $\sigma_2 = -3.1$ MPa.]

3. Izotropní materiál s Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν je ve stavu napjatosti popsáným tenzorem napětí

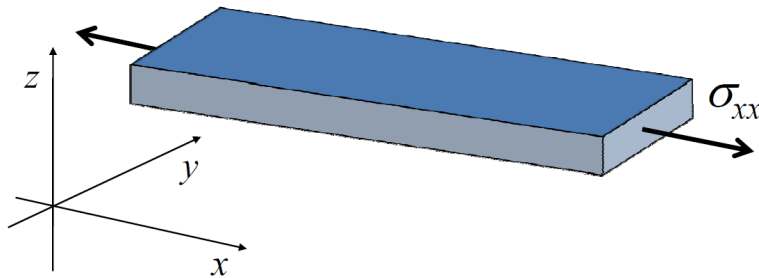
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte tenzor malých deformací.

[řešení:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}. \end{aligned}$$

4. Na izotropní materiál s Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν působí tahové napětí podle obrázku. Jakým napětím σ_{yy} musíme působit aby deformace ve směru osy x byla nulová? Jaká bude v takovém případě deformace ve směru osy y a z ?

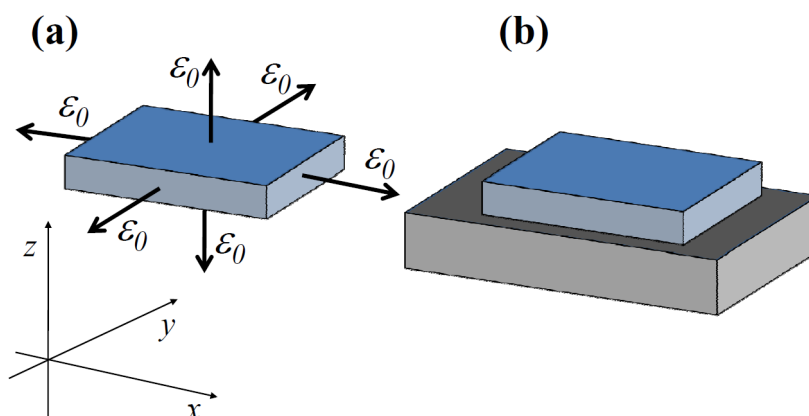


[řešení: $\sigma_{yy} = \frac{1}{\nu}\sigma_{xx}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\frac{1-\nu^2}{\nu}\sigma_{xx}$, $\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{xx}$]

5. Ukažte, že modul pružnosti ve smyku je $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

[řešení: Z Hookova zákona plyne $\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}$. Složka tenzoru malých deformací ε_{xy} je definována jako polovina úhlu γ daného deformací smykem. Dohromady lze tedy zapsat $\tau = G\gamma$, kde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.]

6. Izotropní materiál je charakterizován Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým poměrem ν . Když vložíme tento materiál do atmosféry vodíku o určitém tlaku, tak se jistě množství vodíku absorbuje a materiál izotropně expanduje, jak je znázorněno na obrázku (a). Z tohoto materiálu napaříme tenkou vrstvu na substrát, který neabsorbuje vodík, viz obrázek (b). Substrát zabraňuje expanzi materiálu v rovině xy . Co se stane, když nyní vložíme tenkou vrstvu se substrátem do atmosféry vodíku?



[řešení: V rovině xy vzniknou kompresní napětí σ_{xx} a σ_{yy} , která kompenzují expanzi vrstvy a tenká vrstva bude expandovat jen kolmo na rovinu substrátu. Velikost deformace bude $\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon_0$, kompresní napětí: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\frac{\varepsilon_0 E}{1-\nu}$.]

7. Do U-trubice nalijeme vodu ($\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g cm}^{-3}$) a rtuť ($\rho_{\text{Hg}} = 13.5 \text{ g cm}^{-3}$) tak, že sloupec vody je vysoký $h_{\text{H}_2\text{O}} = 10 \text{ cm}$. Jaký bude rozdíl Δh výšky hladin v obou ramenech U-trubice?

[řešení: $\Delta h = h_{\text{H}_2\text{O}} \frac{\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Hg}}} = 9.3 \text{ cm}$]

8. Čerpadlo načerpá za 1 minutu 300 litrů vody ($Q = 300 \text{ l/min}$). Přívodní potrubí má průměr $d_1 = 80 \text{ mm}$, výtakovým potrubím proudí voda rychlostí $v_2 = 8 \text{ m s}^{-1}$. Určete rychlost vody v_1 v přívodním potrubí a průměr d_2 výtakového potrubí.

[řešení: $v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = 0.995 \text{ m s}^{-1}$, $d_2 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_2}} = 28.2 \text{ mm}$]

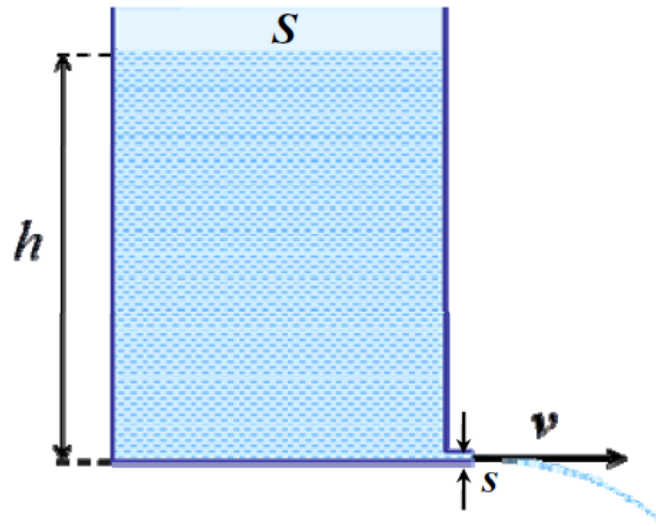
9. Předmět o hustotě ρ_p je vyvážen na rovnoramenných vahách mosazným závažím o hmotnosti m_z . Stanovte skutečnou hmotnost předmětu m_p . Hustota mosazi je ρ_z a hustota vzduchu v okamžiku vážení je ρ_v .

[řešení: $m = m_z \frac{1 - \rho_v / \rho_z}{1 - \rho_v / \rho_p}$]

10. V sudu o vodorovném průřezu S je ideální kapalina hustoty ρ . Kapalina vytéká malým otvorem o průřezu s v hloubce h .

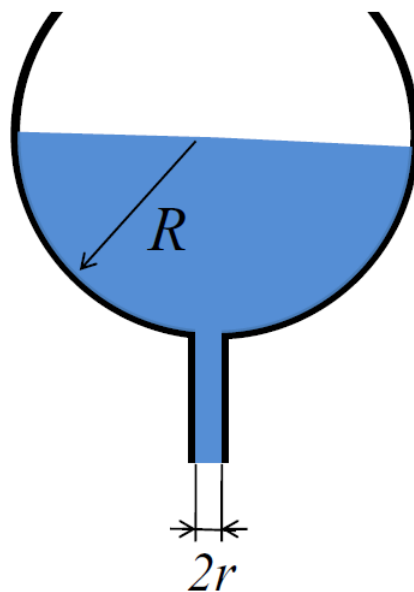
(a) Jakou rychlostí v kapalina z nádoby vytéká?

(b) Jak dlouho to bude trvat než kapalina ze sudu vyteče?



[řešení: (a) $v = \sqrt{2hg \frac{1}{1-\frac{s^2}{S^2}}}$, (b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g} \left(\frac{S^2}{s^2} - 1 \right)}$]

11. Stanovte dobu výtoku ideální kapaliny z kulové nádoby o poloměru R , která je naplněna do poloviny (tj. výška hladiny na počátku je R). Voda vytéká tenkou trubkou o poloměru $r \ll R$



[řešení: $t = \frac{14}{15} \sqrt{\frac{R^5}{2g r^4}}$]

12. V jezeře s vodou položíme na hladinu vody hliníkovou kuličku o poloměru $r = 1$ mm a pustíme ji. Najděte časovou závislost dráhy, kterou kulička urazí, a časovou závislost rychlosti kuličky. Od jaké hloubky lze rychlost kuličky pokládat za konstantní? Hustota hliníku je $\rho = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$.

[řešení:

Označíme $A = \frac{9\eta}{2r^2\rho}$ a $B = \frac{\rho - \rho_v}{\rho}g$, kde ρ_v je hustota vody a η je dynamická viskozita vody.

Časová závislost dráhy: $x(t) = \frac{B}{A} \left[t - \frac{1}{A}(1 - e^{-At}) \right]$,

časová závislost rychlosti: $v = \frac{B}{A} (1 - e^{-At})$.

Za 1.8 s lze rychlost kuličky pokládat zhruba za konstantní (kulička dosáhne 95 % rychlosti pro nekonečné časy). Za tu dobu se kulička hloubky 4.56 m.]

Základní vztahy a údaje

Transformační matice pro otočení v rovině o úhel ϑ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Kontinuum

transformace tenzoru 2. řádu

$$T' = ATA^T$$

Hookův zákon pro izotropní prostředí

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma - \nu \text{Tr}(\sigma)\mathbf{E}]$$

ε je tenzor malých deformací

σ je tenzor napětí

E je Youngův modul pružnosti

ν je Poissonův poměr

rovnice kontinuity

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Bernoulliova rovnice

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho gh = \text{konst.}$$

Stokesova odporová síla

$$F_S = 6\pi\eta Rv$$

Hagen-Poiseuillův zákon

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l} R^4$$