Cvičení 1

1. Jsou dány trojice vektorů $\{\mathbf{u}\} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$, $\{\mathbf{v}\} = (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ a $\{\mathbf{w}\} = (1, -1, 2), (0, 2, 3), (2, 0, 7)$.
Která z těchto trojic může být bází trojrozměrného vektorového prostoru?

[*řešení:* $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ jsou lineárně nezávislé]

2. Vektor $\mathbf{v}$ má v kartézských souřadnicích vyjádření $(2, 3, 5)$. Jaké bude mít vyjádření v bázi $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$?

[*řešení:* $\mathbf{v}' = (-1, -3, 6)$ neboli $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3$]

3. Vektor $\mathbf{v}$ má v kartézské soustavě souřadnic vyjádření (x, y, z). Zapište tento vektor v kartézské souřadnicové soustavě, která je vůči původní pootočená okolo osy z o úhel α.

[*řešení:* $\mathbf{v}' = (x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)$]

4. Nalezněte vyjádření objemového elementu:
(a) ve sférických souřadnicích, (b) v cylindrických souřadnicích.

[*řešení:* (a) $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$, (b) $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$]

5. Dokažte, že derivace vektoru je vektor.

[*řešení:* Derivace vektoru se transformuje stejně jako souřadnice: $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}p} = A\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}p}$.]

6. Dokažte, že platí vztah $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

7. V kartézských souřadnicích napište parametrické vyjádření trajektorie hmotného bodu, který se pohybuje:
(a) po kružnici v rovině xy, (b) po elipse v rovině xy, (c) po pravotočivé šroubovici, (d) po smyčce ve tvaru osmičky v rovině xy.

[*řešení:*
(a) $x(t) = r\cos\omega t$; $y(t) = r\sin\omega t$; $z(t) = 0$, r je poloměr kružnice, ω je úhlová rychlost pohybu
(b) $x(t) = a\cos\omega t$; $y(t) = b\sin\omega t$; $z(t) = 0$, a, b jsou velká a malá poloosa elipsy, ω je úhlová rychlost pohybu
(c) $x(t) = r\cos\omega t$; $y(t) = r\sin\omega t$; $z(t) = v_z t$, r je poloměr šroubovice a v_z je rychlost stoupání
(d) $x(t) = a/2\sin 2\omega t$; $y(t) = a\sin\omega t$, a je průměr smyčky osmičky]

8. Napište parametrické vyjádření trajektorie kamínku, který se nachází v pneumatice o poloměru r auta jedoucího rovně s konstantní rychlostí v. Soustavu souřadnic zvolte tak, aby se v čase $t = 0$ kamínek nacházel v počátku soustavy souřadnic a auto se pohybuje ve směru osy x.

[*řešení:* $x(t) = vt - r\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$, $y(t) = r - r\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$. Křivka se nazývá cykloida.]

9. Nalezněte rovnici elipsy v polárních souřadnicích.

[*řešení:* pro počátek ve středu elipsy: $r^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$, pro počátek v (levém) ohnisku elipsy: $r = \frac{b^2}{a(1+\varepsilon\cos\varphi)}$. $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ se nazývá numerická excentricita elipsy.]

Základní vztahy

skalární součin: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

vektorový součin: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

velikost vektoru: $|\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

počítání s vektory:

$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, kde α je skalár.

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

polární souřadnice:

$$\begin{array}{ll} x = r \cos \varphi & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r \sin \varphi & \varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x} \end{array}$$

cylindrické souřadnice:

$$\begin{array}{ll} x = \varrho \cos \varphi & \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = \varrho \sin \varphi & \varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x} \\ z = z & z = z \end{array}$$

sférické souřadnice:

$$\begin{array}{ll} x = r \sin \theta \cos \varphi & r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y = r \sin \theta \sin \varphi & \theta = \mathrm{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ z = r \cos \theta & \varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x} \end{array}$$