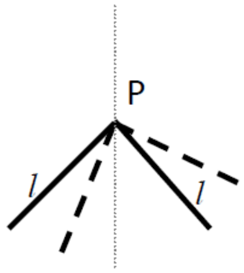
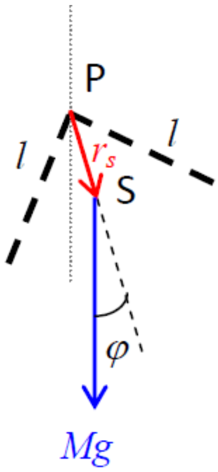
Test 2b

1. Homogenní drát je ohnutý do pravého úhlu jako písmeno L (viz obrázek). Obě části drátu mají stejnou délku l. Drát je pověšený v bodě P, okolo kterého se může otáčet bez tření. Mírně ho vychýlíme (viz čárkované čáry na obrázku) a pustíme. S jakou periodou se bude kývat?



Řešení

Na obrázku je drát vychýlený o úhel φ.



Moment síly působící na drát vyjádřený vzhledem k bodu P je

$\tau_P = Mgr_S \sin\varphi$.

Podle druhé impulsové věty je

$Mgr_S \sin\varphi = -J_P\ddot{\varphi}$,

kde J_P je moment setrvačnosti drátu vyjádřený vzhledem k bodu P, r_S je vzdálenost hmotného středu drátu od bodu uchycení P a $\ddot{\varphi}$ je úhlové zrychlení drátu.

Pokud se omezíme na malé výchylky drátu je $\sin\varphi \approx \varphi$ a dostáváme diferenciální rovnici

$\ddot{\varphi}, = -\frac{Mgr_S}{J_P}\varphi$,

která je rovnicí lineárního harmonického oscilátoru.

Drát tedy bude vykonávat harmonické kmity s úhlovou frekvencí

$\omega = \sqrt{\frac{Mgr_S}{J_P}}$.

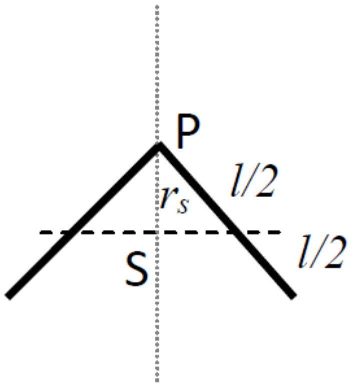
Perioda kmitů drátu je tedy

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_P}{Mgr_S}}$.

Abychom získali periodu kmitů musíme spočítat r_S a J_P.

Nejdříve spočítáme polohu hmotného středu drátu. Jak je vidět na následujícím obrázku drát můžeme rozdělit na dvě ramena, každé z nich má délku l a svírají spolu pravý úhel. Každé rameno má hmotný střed uprostřed. Hmotný střed celého drátu se tedy bude nacházet v bodě S ve středu spojnice středů obou ramen. S pomocí Pythagorovi věty dostáváme, že vzdálenost hmotného středu S od bodu P je

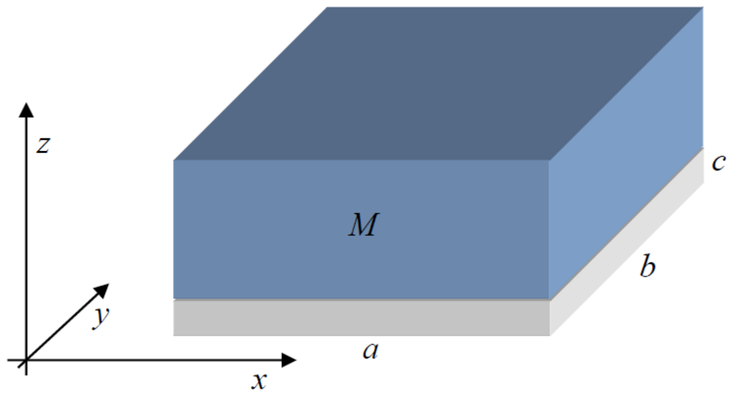
$r_S = \frac{l}{2\sqrt{2}}$.



Nyní spočítáme moment setrvačnosti J_P. Opět budeme uvažovat každé rameno drátu samostatně. Jedno rameno je tyčka o délce l a hmotnosti $M/2$. Moment setrvačnosti vzhledem k hmotnému středu této tyčky je $\frac{1}{12}\frac{M}{2}l^2 = \frac{1}{24}Ml^2$. Pro výpočet momentu setrvačnosti vzhledem k bodu P použijeme Steinerovu větu a dostaneme $\frac{1}{24}Ml^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}Ml^2$.
Celkový moment setrvačnosti drátu je dvojnásobný, protože drát má dvě ramena
$J_P = \frac{1}{3}Ml^2$.
Dosadíme J_P a r_S do výrazu pro periodu kmitů a dostáváme výsledek

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_P}{Mgr_S}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{l}{g}}$$

2. Na gumové podložce o rozměrech 1 m x 1 m a tloušťce 10 cm leží kvádr o hmotnosti M = 100 t. Kvádr má stejnou plochu podstavy jako byla původní plocha gumové desky (viz obrázek). Jak se změní rozměry gumové podložky deformací kvádrem, který na ní leží? Guma má Youngův modul pružnosti E = 0.05 GPa a Poissonův poměr ν = 0.5.



Řešení
Abychom vypočítali deformaci podložky použijeme zobecněný Hookův zákon pro homogenní izotropní materiál

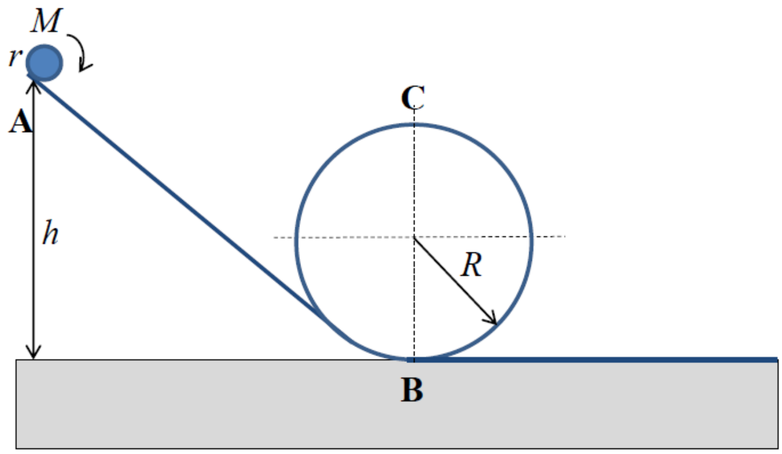
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

V našem konkrétním případě (při volbě systému souřadnic podle obrázku) je tenzor napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

kde $\sigma_{zz} = -\frac{Mg}{S}$,
a znaménko mínus odpovídá tomu, že je to kompresní napětí, S je plocha podstavy kvádru, v našem případě $S = 1\ \mathrm{m}^2$.
Ze zobecněného Hookova zákona vypočítáme deformace
$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu\sigma_{zz}}{E} = \frac{\nu Mg}{ES}$,
$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu\sigma_{zz}}{E} = \frac{\nu Mg}{ES}$,
$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = -\frac{Mg}{ES}$,
$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.
Rozměry gumové tyče se tedy díky deformaci kvádrem, který na ní leží, změní na
$a' = a(1+\varepsilon_{xx}) = a\left(1+\frac{\nu Mg}{ES}\right)$,
$b' = b(1+\varepsilon_{yy}) = b\left(1+\frac{\nu Mg}{ES}\right)$,
$c' = c(1+\varepsilon_{zz}) = c\left(1-\frac{Mg}{ES}\right)$,
Dosadíme hmotnost kvádru $M = 100$ t, Youngův modul pružnosti gumy $E = 0.05$ GPa a Poissonův poměr gumy $\nu = 0.5$ Jestliže nezatížená gumová podložka má rozměry $a = b = 1$ m a $c = 10$ cm, tak deformaci způsobenou kvádrem se její rozměry změní na $a' = b' = 1.0098$ m a $c' = 9.8$ cm. Vodorovné rozměry gumové podložky se tedy zvětší o 0.98%, zatímco její tloušťka se zmenší o 2%.

3. Z jaké nejmenší výšky h je nutné pustit kuličku o hmotnosti M a poloměru r aby projela celou kruhovou smyčku o poloměru R na obrázku (tj. aby se v každém bodě dotýkala dráhy). Kulička se po dráze valí bez prokluzování a valivé tření můžeme zanedbat



Řešení
Označme si bod, z kterého vypouštíme kuličku jako A, spodní bod kruhové smyčky jako B a horní bod kruhové smyčky jako C. Protože zanedbáváme valivé tření, zůstává celková mechanická energie konstantní během celého pohybu kuličky. Můžeme tedy napsat zákon zachování energie

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}J\omega_B^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}J\omega_C^2 + Mg2R.$$

V bodě A je kulička v klidu a proto má nulovou kinetickou energii a její potenciální energie je Mgh. V bodě B má kulička nulovou potenciální energii (volíme nulovou hladinu potenciální energie na spodku dráhy) a má kinetickou energii $\frac{1}{2}Mv_B^2$, kde v_B je rychlost hmotného středu kuličky v bodě B. Protože se kulička otáčí má také rotační kinetickou energii $\frac{1}{2}J\omega_B^2$, kde ω_B je úhlová rychlost otáčení kuličky. Protože se jedná o valení bez prokluzování je $\omega_B = \frac{v_B}{r}$.

Podobně v bodě C je $\frac{1}{2}Mv_C^2$ kinetická energie kuličky a v_C je rychlost hmotného středu kuličku v bodě C. Rotační kinetická energie kuličky v bodě C je $\frac{1}{2}J\omega_C^2$, kde $\omega_C = \frac{v_C}{r}$ je úhlová rychlost otáčení kuličky v bodě C. Potenciální energie kuličky v bodě C je $Mg2R$.
Aby kulička projela celou dráhu bez toho, že by předčasně spadla, musí být její rychlost v bodě C alespoň $v_C = \sqrt{Rg}$. Při takové rychlosti bude totiž gravitační zrychlení g přesně odpovídat normálové složce zrychlení hmotného středu kuličky $a_n = \frac{v_C^2}{R} = g$ a tíhová síla tedy zajistí, že hmotný střed kuličky se bude pohybovat v bodě C po křivce s poloměrem křivosti R. Minimální výška h, ze které musíme kuličku pustit, bude tedy taková, kdy rychlost hmotného středu kuličky v bodě C bude $v_C = \sqrt{Rg}$ a úhlová rychlost otáčení kuličky v bodě C bude $\omega_C = \frac{\sqrt{Rg}}{r}$. Když tuto podmínku dosadíme do zákona zachování energie, dostáváme

$$Mgh = \frac{1}{2}MRg + \frac{1}{2}J\frac{Rg}{r^2} + Mg2R.$$

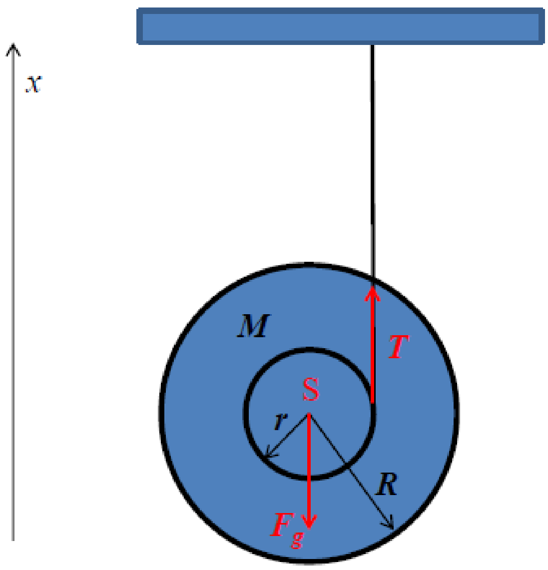
Moment setrvačnosti kuličky vzhledem k jejímu hmotnému středu je $J = \frac{2}{5}Mr^2$
Po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$Mgh = \frac{1}{2}MRg + \frac{1}{2}\frac{2}{5}Mr^2\frac{Rg}{r^2} + Mg2R.$$

Pokrátíme hmotnost kuličky M a tíhové zrychlení g a dostaneme pro hledanou výšku vztah

$$h = \frac{1}{2}R + \frac{1}{5}R + 2R = 2.7R.$$

4. Cívka je složena ze dvou stejných kotoučů o poloměru R a hmotnosti M nasazených na společné ose o poloměru r, jejíž hmotnost je zanedbatelná vůči hmotnosti kotoučů. Nit navinutá na ose cívky je připevněna ke stropu (viz obrázek). Z této polohy se cívka začne spouštět dolů. Vypočítejte zrychlení hmotného středu cívky.



Řešení
Jak je vidět na obrázku na cívku působí tíhová síla F_g a tahová síla niti *T*.
Vyjádříme moment síly působící na cívku vzhledem k bodu S: $\tau_S = rT$ (tíhová síla F_g k celkovému momentu síly nepřispívá, protože působí v bodě S).
Druhá impulsová věta pro pohyb cívky je $\tau_S = rT = J_S\varepsilon$,
kde J_S je moment setrvačnosti cívky (vyjádřený vzhledem k bodu S) a ε je úhlové zrychlení.
Pro pohyb hmotného středu cívky použijeme první impulsovou větu: $-2Ma = T - F_g = T - 2Mg$
(2M je tam proto, že cívka se skládá ze dvou disků, každý o hmotnosti M)

Úhlové zrychlení ε je spojeno se zrychlením hmotného středu a vztahem $\varepsilon = \frac{a}{r}$. Když to dosadíme do druhé impulsové věty dostaneme $rT = J_S \frac{a}{r}$ odtud můžeme vyjádřit tahovou sílu $T = J_S \frac{a}{r^2}$ a dosadit ji do první impulsové věty: $-2Ma = J_S \frac{a}{r^2} - 2Mg$

Z této rovnice vypočítáme zrychlení hmotného středu cívky $a = \frac{Mg}{\frac{J_S}{2r^2}+M}$.

Moment setrvačnosti cívky je $J_S = 2\frac{1}{2}MR^2 = MR^2$

(moment setrvačnosti homogenního disku vzhledem k hmotnému středu S je $\frac{1}{2}MR^2$ a cívka se skládá ze dvou takových válců)

Dosadíme J_S a získáme výsledný vztah pro zrychlení hmotného středu cívky $a = \frac{g}{\frac{R^2}{2r^2}+1}$.