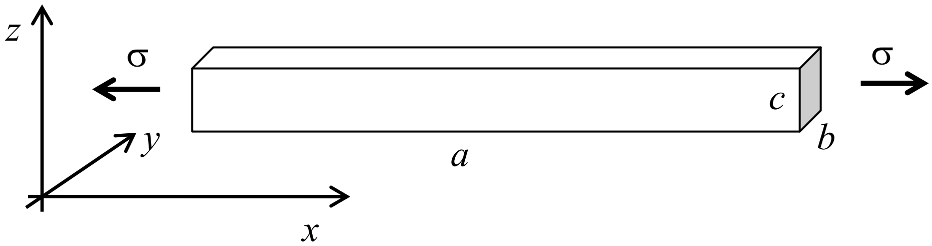
Test 2a

1. Homogenní ocelová tyč o původních rozměrech a, b, c je natahovaná tahovým napětím σ = 1 GPa podle obrázku. Jak se změní hustota tyče? Youngův modul pružnosti oceli je E = 200 GPa, Poissonův poměr je ν = 0.3.



Řešení

Hustota ocelové tyče před deformací je

$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{abc}$,

kde M je hmotnosti tyče a $V = abc$ je objem tyče před deformací. Působící napětí σ vede k deformaci tyče. Její hmotnost zůstane stejná, ale objem se změní na $V' = a'b'c'$, kde a', b' a c' jsou nové rozměry tyče po deformaci a spočítáme je z původních rozměrů jako

$a' = a(1 + \varepsilon_{xx})$,

$b' = a\left(1 + \varepsilon_{yy}\right)$,

$c' = a(1 + \varepsilon_{zz})$,

kde ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} jsou složky tenzoru malých deformací (souřadnicové osy jsou orientované podle obrázku). K výpočtu tenzoru deformací použijeme zobecněný Hookův zákon pro homogenní materiál

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Protože v našem konkrétním případě je tenzor napětí

$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

jsou složky tenzoru deformace

$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$,

$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E}$,

$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E}$,

$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$

Rozměry tyče se tedy díky deformaci změní na

$a' = a\left(1 + \frac{\sigma_{xx}}{E}\right)$,

$b' = b\left(1 - \frac{\nu\sigma_{xx}}{E}\right)$,

$c' = c\left(1 - \frac{\nu\sigma_{xx}}{E}\right)$,

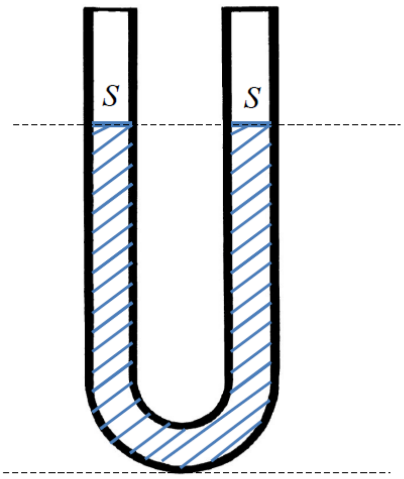
a hustota tyče po deformaci bude

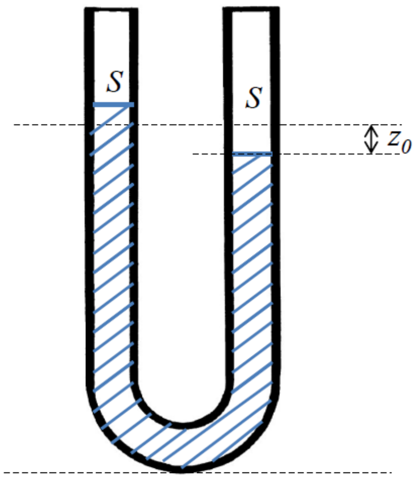
$\varrho' = \frac{M}{V'} = \frac{M}{a'b'c'} = \frac{M}{abc}\frac{1}{\left(1+\frac{\sigma_{xx}}{E}\right)\left(1-\frac{\nu\sigma_{xx}}{E}\right)^2} = \frac{\varrho}{\left(1+\frac{\sigma_{xx}}{E}\right)\left(1-\frac{\nu\sigma_{xx}}{E}\right)^2}$.

Po dosazení E = 200 GPa, ν = 0.3 a σ_{xx}= 1 GPa dostáváme $\varrho' = 0.998\varrho$

Hustota tyče tedy poklesne o 0.2%.

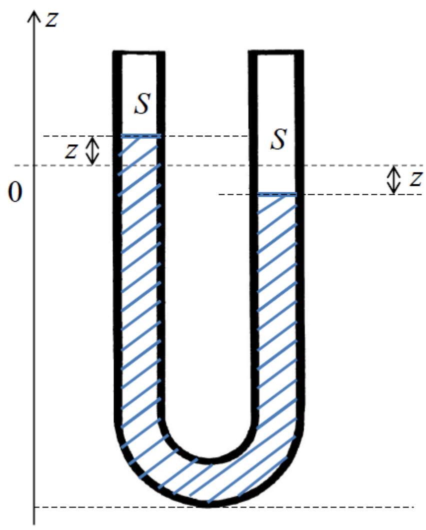
2. Do U-trubice jejíž obě trubice mají průřez S nalijeme kapalinu o hustotě ρ a objemu V (viz. obrázek vlevo). Nyní foukneme do pravé trubice, tak,že hladina kapaliny poklesne o z_0 (viz. obrázek vpravo). Potom necháme kapalinu svému osudu. Vypočítejte, jak se bude kapalina v U-trubici pohybovat. Kapalinu můžeme považovat za ideální kapalinu.





Řešení

Předpokládejme, že máme U-trubici, ve které je hladina v pravé trubici níže než v levé, kvůli tomu, že ji někdo vychýlil. Když je hladina kapaliny v levé trubici vyšší o z (vzhledem k původně vyrovnané hladině), tak v pravé trubici musí být o z nižší. Rozdíl tlaku působícího každou část kapaliny je tedy $\Delta p = 2\rho g z$.



Na kapalinu v U-trubici tedy působí síla $F = -2\rho g S z$.
Znaménko mínus je tam proto, že v pravé trubici, kde je $z > 0$, působí tato síla směrem dolů, tj. proti kladnému směru osy z, v levé trubici kde je $z < 0$, působí směrem nahoru, tj. v kladném směru osy z.
Tato síla F způsobuje zrychlení kapaliny v U-trubici. Použijeme tedy 2. Newtonův zákon

$$-2\rho g S z = \rho V \ddot{z}$$

kde ρV je celková hmotnost kapaliny v U-trubici.
Jednoduchou úpravou získáváme diferenciální rovnici pro lineární harmonický oscilátor

$$\ddot{z} = -\frac{2gS}{V}z$$

Kapalina v U-trubici tedy bude kmitat s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{2gS}{V}}$ a z-tová souřadnice hladiny v pravé trubici se bude měnit s časem jako funkce $z(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{gS}{V}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{gS}{V}}t\right)$, kde konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek $z(t=0) = -z_0$ a $\dot{z}(t=0) = 0$.

Z první počáteční podmínky dostáváme

$-z_0 = C_2$,

Z druhé počáteční podmínky dostáváme

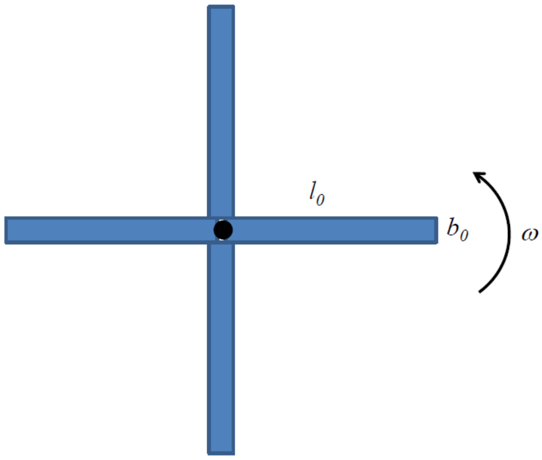
$0 = \sqrt{\frac{gS}{V}}C_1$,

Tedy $C_1 = 0$ a $C_2 = -z_0$ a z-tová souřadnice hladiny v pravé trubici se mění s časem jako funkce

$$z(t) = -z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2gS}{V}}t\right)$$

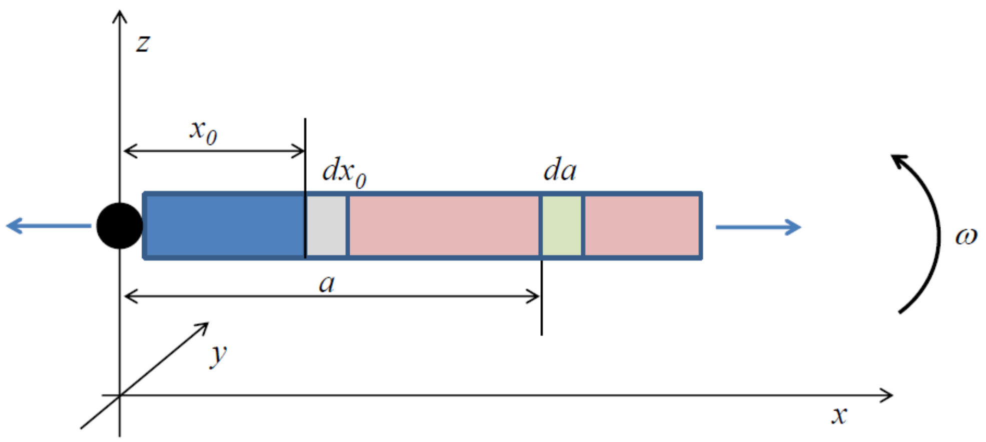
Perioda kmitů sloupce kapaliny v U-trubici je $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{V}{2gS}}$ a závisí tedy pouze na tíhovém zrychlení g a na celkové „délce“ sloupce kapaliny v U-trubici $\frac{V}{S}$.

3. Vrtule se má čtyři stejná ramena, každé z nich je hranol o délce l_0, šířce b_0 a tloušťce t_0 vyrobený z homogenního materiálu o hustotě ρ_0, Youngově modulu pružnosti E a s Poissonovým poměrem ν Vypočítejte o kolik se ramena prodlouží, když se vrtule otáčí úhlovou rychlostí ω.



Řešení

Prodloužení všech ramen bude stejné, takže stačí uvažovat jedno z nich (viz. obrázek)



Pokud spojíme naši vztažnou soustavu s otáčející se vrtulí, tak na jednotlivé části ramene vrtule působí odstředivá síla F_o, která způsobuje jeho natahování v našem případě ve směru osy x. Síla působící na rameno vrtule směrem doleva je reakční síla, kterou na rameno působí úchyt ve středu vrtule. Rameno vrtule je tedy podrobeno jedno-osé napjatosti popsané tenzorem napětí $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Velikost odstředivé síly ale závisí na vzdálenosti od osy otáčení a je proto různá v různých místech ramene vrtule. Vezměme si tedy malý kousek ramene vrtule, který se nachází ve vzdálenosti x_0 od osy otáčení a má délku $\mathrm{d}x_0$ (viz. obrázek – element je vybarven šedě). Tento kousek bude natahován odstředivou silou působící na tu část ramene vrtule, která je dále od osy otáčení, tj. napravo od našeho kousku (na obrázku je tato část ramene označená červenou výplní). Protože velikost odstředivé síly roste se vzdáleností od osy otáčení, musíme rozdělit část ramene vrtule napravo od našeho kousku na malé kousky a spočítat příspěvek každého z nich k napětí σ_{xx}. Na obrázku je vyznačen zeleně jeden takový kousek ve vzdálenosti a ($a > x_0$) od osy otáčení. Odstředivá síla působící na tento kousek je

$$dF_o = dm\, a\, \omega^2.$$

Hmotnost toho kousku dm můžeme vyjádřit jako $dm = \rho_0\, S_0\, \mathrm{d}a$. V tomto výrazu je $S_0 = b_0\, t_0$ průřez ramene vrtule. Odstředivou sílu působící na tento kousek ramene tedy můžeme vyjádřit jako

$$dF_o = \rho_0\, S_0\, \omega^2 a\, \mathrm{d}a,$$

a příspěvek této síly k tahovému napětí σ_{xx} působícímu na náš element dx_0 je

$$d\sigma_{xx} = \frac{dF_o}{S_0} = \rho_0\ \omega^2 a\, \mathrm{d}a.$$

Celkové napětí σ_{xx} působícímu na náš element dx_0 získáme integrací, přes část ramene vrtule napravo od našeho elementu dx_0

$$\sigma_{xx} = \int d\sigma_{xx} = \int_{x_0}^{l_0} \rho_0 \omega^2 a\, \mathrm{d}a = \rho_0 \omega^2 \left[\frac{a^2}{2}\right]_{x_0}^{l_0} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (l_0^2 - x_0^2).$$

Nyní můžeme použít Hookův zákon. Deformace našeho elementu dx_0 bude

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{1}{2E} \rho_0 \omega^2 (l_0^2 - x_0^2).$$

Deformace ε_{xx} je relativní změna délky našeho elementu ve směru osy x. Původní délka našeho elementu před deformací byla $\mathrm{d}x_0$ a po deformaci se vlivem napětí σ_{xx} změní na $\mathrm{d}x$. Relativní změna délky je tedy

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}x_0}.$$

Když spojíme předchozí dvě rovnice, dostaneme prodloužení našeho elementu, který je ve vzdálenosti x_0 od osy otáčení

$$\mathrm{d}x - \mathrm{d}x_0 = \frac{1}{2E} \rho_0 \omega^2 (l_0^2 - x_0^2) \mathrm{d}x_0.$$

Prodloužení je největší u osy otáčení, protože tam je příslušný element natahován celým ramenem vrtule, a s rostoucí vzdáleností od osy otáčení velikost prodloužení klesá. Celkové prodloužení ramene vrtule dostaneme sečtením prodloužení všech jejích elementů

$$\int \mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x_0 = \int_0^{l_0} \frac{1}{2E} \rho_0 \omega^2 (l_0^2 - x_0^2) \mathrm{d}x_0.$$

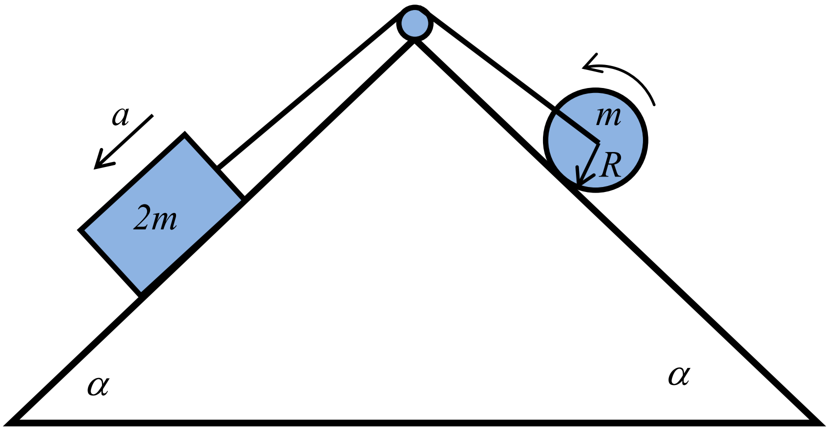
Integrací dostáváme celkové prodloužení ramene vrtule

$$l - l_0 = \left[\frac{1}{2E} \rho_0 \omega^2 \left(l_0^2 x_0 - \frac{x_0^3}{3} \right) \right]_0^{l_0} = \frac{1}{2E} \rho_0 \omega^2 \left(l_0^3 - \frac{l_0^3}{3} \right) = \frac{1}{3E} \rho_0 \omega^2 l_0^3.$$

Relativní prodloužení ramene vrtule bude

$$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{1}{3E} \rho_0 \omega^2 l_0^2.$$

4. Na jedné straně nakloněné roviny se nachází kvádr o hmotnosti $2m$, na druhé straně homogenní válec o poloměru R hmotnosti m. Obě tělesa jsou spojena lanem, jak je znázorněno na obrázku. Kvádr sjíždí po nakloněné rovině se zrychlením a, válec se valí bez prokluzování nahoru. Koeficient smykového tření mezi kvádrem a povrchem nakloněné roviny je μ. Vypočítejte zrychlení kvádru a.

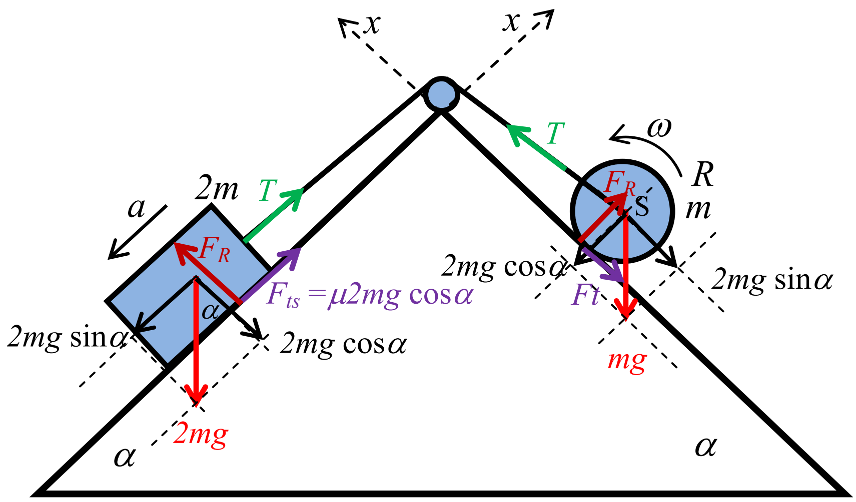


Řešení

Na následujícím obrázku jsou vyznačeny síly, které působí na kvádr a na válec.

Na kvádr působí tíhová síla o velikosti $2mg$, třecí síla F_{ts}, reakční síla podložky F_R a tahová síla lana T.

Na válec působí tíhová síla o velikosti mg, třecí síla F_t, reakční síla podložky F_R a tahová síla lana T.



Použijeme 1. impulsovou větu pro pohyb hmotného středu kvádru (osa x leží na nakloněné rovině a má kladnou orientaci podle obrázku)

$$-2ma = -2mg\sin\alpha + \mu 2mg\cos\alpha + T\,, \qquad (1)$$

kde jsme pro velikost třecí síly použili vztah $F_t = \mu F_n$, kde F_n je síla, kterou těleso tlačí kolmo na podložku. Protože kvádr sjíždí po nakloněné rovině dolů, má třecí síla F_t maximální možnou velikost a jsme schopni určit její směr.

Podobně 1. Impulsová věta pro hmotný střed válce je

$$ma = -mg\sin\alpha - F_t + T\,. \qquad (2)$$

Z rovnice (1) vyjádříme tahovou sílu T lana a dosadíme do rovnice (2)

$$ma = -mg\sin\alpha - F_t - 2ma + 2mg\sin\alpha - \mu 2mg\cos\alpha, \qquad (3)$$

Třecí síla F_t způsobuje roztáčení válce. Vyjádříme moment síly působící na válec vzhledem k jeho hmotnému středu $\tau_s = F_t R$ a použijeme 2. impulsovou větu

$\tau_s = F_t R = J_s \frac{d\omega}{dt}$,

kde je J_s je moment setrvačnosti válce vzhledem k ose procházející hmotným středem S a kolmé na podstavu. Protože se válec otáčí bez prokluzování je obvodová rychlost bodu na jeho povrchu $v = \frac{2\pi R}{T}$ kde T je doba, za kterou se válec otočí jednou dokola. Pro úhlovou rychlost otáčení válce platí tedy $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a mezi ω a v je vztah $\omega = \frac{v}{R}$ (platí to pouze pokud se válec valí bez prokluzování). Časová derivace úhlové rychlosti otáčení je $\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}a$. Po dosazení do 2. impulsové věty dostáváme $F_t R = \frac{J_s}{R} a$ a tedy třecí sílu můžeme vyjádřit jako

$$F_t = \frac{J_s}{R^2} a. \quad (4)$$

Dosadíme rovnici (4) do (3) a dostaneme

$$ma = -mg\ \sin\alpha - \frac{J_s}{R^2} a - 2ma + 2mg\ \sin\alpha - \mu 2mg\ \cos\alpha.$$

Z této rovnice vyjádříme zrychlení

$$a = \frac{mg\ \sin\alpha - \mu 2mg\ \cos\alpha}{m + 2m + \frac{J_s}{R^2}} = \frac{mg\ (\sin\alpha - 2\mu\ \cos\alpha)}{3m + \frac{J_s}{R^2}}. \quad (5)$$

Moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k ose otáčení procházející hmotným středem a kolmé k podstavě je $J_s = \frac{1}{2} mR^2$. Po dosazení do rovnice (5) dostáváme konečný výsledek pro velikost zrychlení

$$a = \frac{2}{7} g\ (\sin\alpha - 2\mu\ \cos\alpha).$$