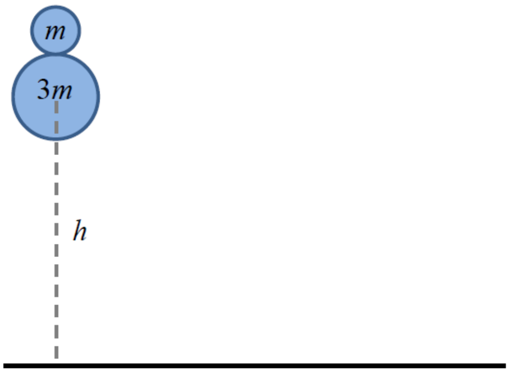
Test 2a

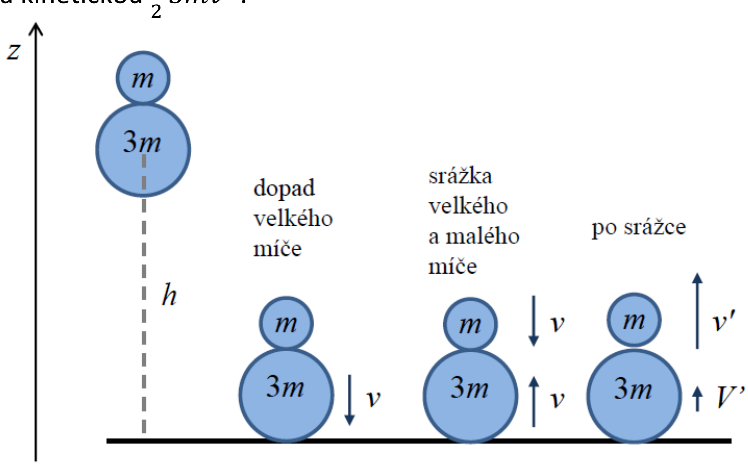
Úloha 1

Dva míče položíme na sebe a necháme je spadnout na zem z výšky h. Hmotnost většího, spodního míče je 3-krát větší než hmotnost menšího. Do jaké výšky vystoupí po odrazu od země menší a větší míč jestliže srážky můžeme považovat za dokonale pružné?



Řešení

Zvolme si kladný směr osy z nahoru podle obrázku. Na zem dopadne nejdříve spodní, větší míč a bude mít při dopadu rychlost o velikosti v. Ze zákona zachování energie lehce spočítáme, že velikost této rychlosti je $v = \sqrt{2gh}$, protože potenciální energie spodního míče $3mgh$ se změní po dopadu na kinetickou $\frac{1}{2}3mv^2$.



Protože se jedná o dokonale pružnou srážku, odrazí se spodní míč od země se stejnou rychlostí v, která bude mít jenom opačný směr. Je to proto, že kinetická energie míče po odrazu je stejná jako před odrazem. (pozn. Kinetickou energii, kterou po dopadu míče získala Země, můžeme s klidem zanedbat, protože $3\,m \ll M_Z$.)

Spodní míč tedy vyletí od země s rychlostí v a srazí se horním míčem, který letí proti němu rychlostí o stejné velikosti v, viz obrázek. Máme tedy míče o hmotnosti m a $3m$, které letí proti sobě, každý má rychlost o velikosti v a srazí se při dokonale pružné srážce. Když označíme z-tové složky rychlosti menšího a většího míče po srážce jako v' a V', tak můžeme napsat zákon zachování hybnosti (pro z-tové složky hybnosti) ve tvaru:

$-mv + 3mv = mv' + 3mV'$,

kde $v = \sqrt{2gh}$ je velikost rychlosti míčů před srážkou.

Protože je srážka dokonale pružná, můžeme dále napsat zákon energie ve tvaru:

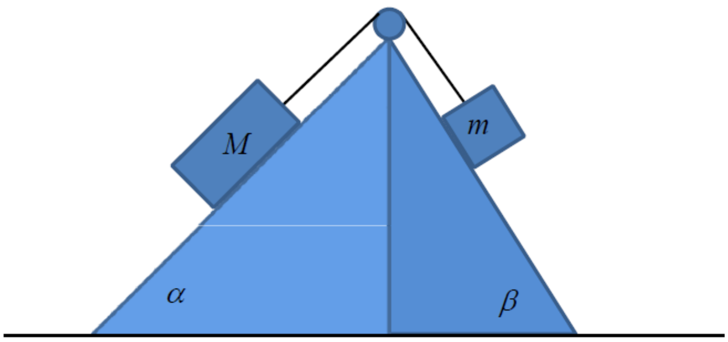
$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}3mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}3mV'^2$.

Po úpravě dostáváme soustavu dvou rovnic

$2v = v' + 3V'$

$4v^2 = {v'}^2 + 3V'^2$.
Vyjádříme si z první rovnice $V' = (2v - v')/3$ a dosadíme do druhé rovnice
$4v^2 = {v'}^2 + (2v - v')^2/3$
Po umocnění a úpravě máme kvadratickou rovnici pro neznámou v'
${v'}^2 - vv' - 2v^2 = 0$.
Kořeny této rovnice jsou $v' = -v$ a $v' = 2v$.
Je zřejmé, že první kořen odpovídá situaci před srážkou. Druhý kořen $v' = 2v$ je tedy rychlost menšího míče po srážce. Nyní již můžeme vypočítat do jaké výšky menší míč po srážce vyletí. Protože má po srážce kinetickou energii $\frac{1}{2}mv'^2 = 2mv^2$ vyletí do takové výšky h', kde se všechna jeho kinetická energie změní na potenciální, tj. $2mv^2 = mgh'$. Takže $h' = \frac{2v^2}{g}$ a když dosadíme za $v = \sqrt{2gh}$ dostaneme $h' = 4h$.
Větší míč má po srážce rychlost $V' = \frac{2v-v'}{3}$. Když tam dosadíme náš výsledek $v' = 2v$, dostaneme $V' = 0$. Takže větší míč má po srážce nulovou rychlost a zůstane ležet na zemi.
Menší míč tedy vystoupí do 4-krát větší výšky, než ze které jsme ho pustili, a velký zůstane ležet na zemi.

Úloha 2
Předmět o hmotnosti M je spojen lanem se závažím o hmotnosti m na šikmé ploše podle obrázku. Jaká musí být hmotnost m závaží aby předmět udrželo. Statický koeficient smykového tření mezi nakloněnou rovinou a předmětem je μ a stejný je také koeficient smykového tření mezi nakloněnou rovinou a závažím.



Řešení
Existuje rozmezí hmotností závaží, kdy bude předmět o hmotnosti M udržen na nakloněné rovině. Závaží ho udrží pokud jeho hmotnost m bude ležet v intervalu <$m_{\min}$,$m_{\max}$>. Spočítáme krajní body tohoto intervalu.
Nejmenší možná hodnota hmotnosti závaží $m_{\min}$ odpovídá situaci na obrázku vlevo. Pokud by bylo závaží m jenom nepatrně lehčí než $m_{\min}$ začne předmět M sjíždět směrem dolů. Třecí síla $F_{t,M}$ působící na předmět M má v tomto případě maximální možnou velikost $F_{t,M} = \mu Mg \cos\alpha$ a má směr podle obrázku, tj. míří nahoru. Třecí síla působící na závaží m má v tomto případě také největší možnou velikost $F_{t,m} = \mu mg \cos\beta$ a míří, jak je na obrázku naznačeno směrem dolů. Můžeme tedy napsat druhý Newtonův zákon pro předmět M a pro závaží m. Osu x jsme položili do nakloněné roviny s kladnou orientací podle obrázku

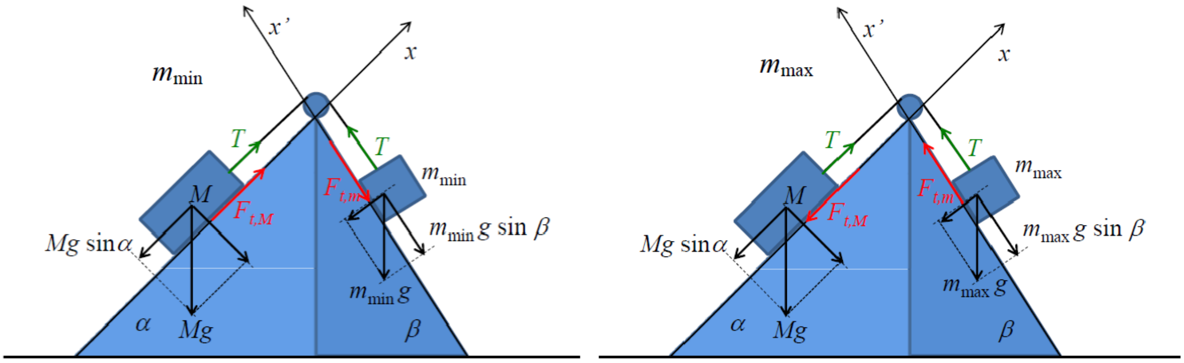
$$-Mg \ \sin\alpha + \mu Mg\cos\alpha + T = 0$$
$$-m_{\min}g \ \sin\beta - \mu m_{\min}g\cos\beta + T = 0$$

Vyjádříme z první rovnice mapěťovou sílu lana a dosadíme ji do druhé rovnice, dostaneme

$$-m_{\min}g \ \sin\beta - \mu m_{\min}g\cos\beta = -Mg \ \sin\alpha + \mu Mg\cos\alpha$$

a z toho vyjádříme hledanou hmotnost $m_{\min}$

$$m_{\min} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\beta + \mu\cos\beta} M$$



Největší možná hodnota hmotnosti závaží $m_{\max}$ odpovídá situaci na obrázku vpravo. Pokud by bylo závaží m jenom nepatrně těžší než $m_{\max}$ začne předmět M jet směrem nahoru. Třecí síla $F_{t,M}$ působící na předmět M má i v tomto případě maximální možnou velikost $F_{t,M} = \mu Mg\cos\alpha$ ale směr má opačný než v předchozím případě, tj. míří dolů. Podobně je to s třecí sílou působící na závaží m, ta má v tomto případě velikost $F_{t,m} = \mu mg\cos\beta$ a míří směrem nahoru. Můžeme tedy opět napsat druhý Newtonův zákon pro předmět M a pro závaží m.

$$-Mg\ \sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha + T = 0$$
$$-m_{\max}g\ \sin\beta + \mu m_{\max}g\cos\beta + T = 0$$

a stejným způsobem jako v přechozím případě vypočítáme hledanou hmotnost $m_{\max}$

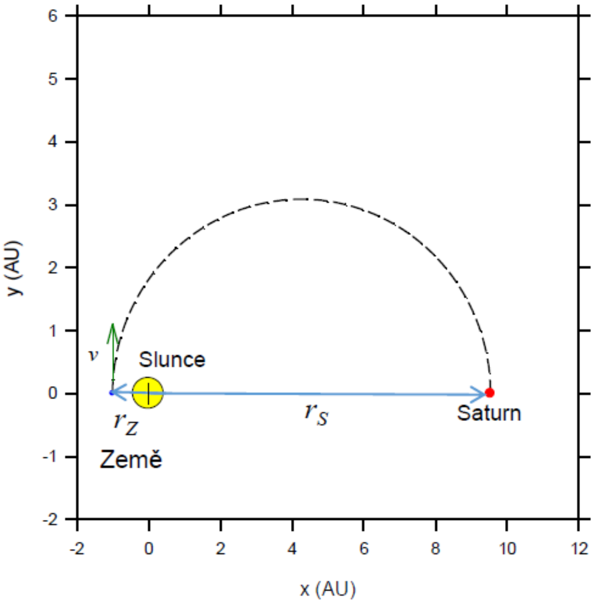
$$m_{\max} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\beta - \mu\cos\beta} M$$

Závaží tedy udrží předmět o hmotnosti M na nakloněné rovině pokud jeho hmotnost m bude splňovat podmínku

$$\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\beta + \mu\cos\beta} M \le m \le \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\beta - \mu\cos\beta} M$$

Úloha 3

Pro let na Saturn je možné využít gravitační působení Slunce. Raketa poletí tak aby urazila polovinu elipsy se Sluncem v jednom ohnisku. Jak dlouho bude let ze Země na Saturn trvat? Střední vzdálenost Země od Slunce je 1 AU = 149 597 870 700 m, pro Saturn je to 9.537 AU. Musíme samozřejmě vyletět v takový okamžik, aby až dorazíme na oběžnou dráhu Saturnu, tak v daném místě Saturn byl. Jaké rychlosti musí dosáhnout raketa po odstartování ze Země? Pomůcka (kromě Keplerových zákonů): obsah elipsy je πab.



Řešení

Pro výpočet doby, kterou bude let na Saturn trvat, použijeme 3. Keplerův zákon. Raketa vypuštěná podle obrázku je jen další předmět, který obíhá okolo Slunce a pro její oběžnou periodu (vyjádřenou v letech) musí tedy platit $T_r = a_r^{3/2}$, kde a_r je hlavní poloosa elipsy, po které raketa obíhá, vyjádřená v AU. Velikost hlavní poloosy rakety je $a_r = \frac{r_Z + r_S}{2}$, kde r_Z je vzdálenost rakety od Slunce v perihéliu, (což odpovídá vzdálenosti Země od Slunce) a r_S je její vzdálenost od Slunce v aféliu (což je vzdálenost Saturnu od Slunce). Po dosazení $r_Z = 1$ AU a $r_S = 9.537$ AU dostaneme $a_r = 5.269$ AU. Perioda oběhu rakety okolo Slunce potom vychází $T_r = a_r^{3/2} = 12.09$ let. Raketa na Saturn dorazí za polovinu periody, tj. za dobu $\frac{T_r}{2} = 6.05$ let.

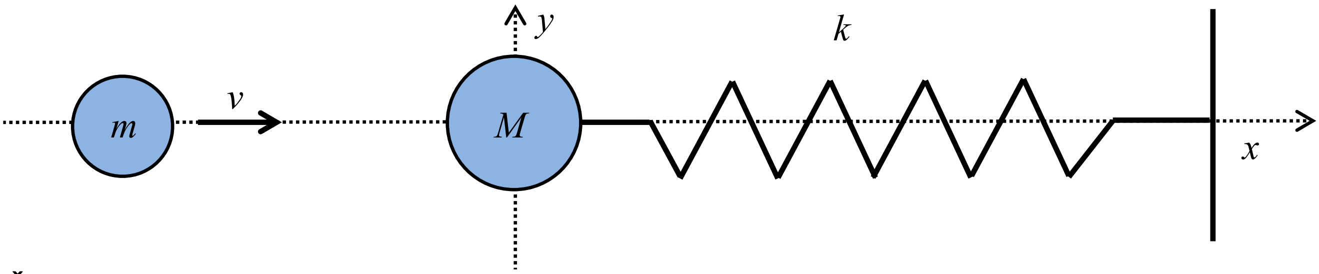
Pro zjištění rychlosti v, kterou musí raketa dosáhnout při odstartování ze Země, použijeme 2. Keplerův zákon. Plošná rychlost w je plocha, kterou opíše průvodič planety (nebo zde rakety) za určitý čas. Plošnou rychlost rakety můžeme tedy vyjádřit jako plochu elipsy vydělenou periodou oběhu rakety $w_r = \frac{\pi a_r b_r}{T_r}$. Plošnou rychlost rakety u Země můžeme vyjádřit také jako $w_r = \frac{1}{2} v r_Z$. Podle 2. Keplerova zákona je plošná rychlost konstantní a tedy platí $\frac{\pi a_r b_r}{T_r} = \frac{1}{2} v r_Z$. Z této rovnice můžeme vypočítat potřebnou rychlost rakety při odstartování ze Země

$$v = \frac{2\pi a_r b_r}{T_r r_Z}. \tag{1}$$

Pro výpočet rychlosti potřebujeme ještě zjistit velikost vedlejší poloosy elipsy, po které se pohybuje raketa. Mezi hlavní a vedlejší poloosou elipsy platí vztah $b^2 = a^2 - e^2$, kde e je excentricita elipsy, po které se pohybuje raketa $e_r = \frac{r_S - r_Z}{2} = 4.269$ AU. Takže vedlejší poloosu oběžné dráhy rakety je možné vyjádřit vztahem $b_r^2 = \left(\frac{r_S + r_Z}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_S - r_Z}{2}\right)^2 = r_S r_Z$. Vedlejší poloosa oběžné dráhy je tedy geometrickým průměr vzdálenosti od Slunce v perihéliu a v aféliu (to platí obecně pro každou elipsu) $b_r = \sqrt{r_S r_Z} = 3.088$ AU. Když tedy dosadíme do vztahu (1) hodnoty $a_r = 5.269$ AU, $b_r = 3.088$ AU a $T_r = 12.09$ let dostaneme pro rychlost rakety $v = 8.456$ AU/rok $= 40.10$ km/s.

Úloha 4

Na pružině o tuhosti k je připevněná kulička o hmotnosti M. Do této kuličky narazí jiná kulička o hmotnosti m letící rychlostí o velikosti v podle obrázku a dojde k dokonale pružné srážce. Před srážkou je pružina v klidu a není natažená ani stlačená. Jaká bude úhlová frekvence a amplituda kmitů pružiny po srážce?



Řešení

Úhlová frekvence kmitů pružiny je

$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$,

tj. nezávisí na rychlosti, kterou nalétávající kulička m předá kuličce o hmotnosti M.

Amplituda kmitů, ale bude záviset na rychlosti, kterou kulička M získá.

Nalétávající kulička m má před srážkou rychlost o velikosti v a po srážce se její rychlost změní na v_1. Kulička M na pružině je před srážkou v klidu a po srážce bude mít rychlost V_1. (v_1 a V_1 jsou x-ové složky vektoru rychlosti)

Protože se jedná o dokonale pružnou srážkou, získáme rychlosti v_1 a V_1 aplikací zákona zachování hybnosti a energie.

$mv = mv_1 + MV_1$,   (zákon zachování hybnosti)

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2$,   (zákon zachování energie)

Vyřešením této soustavy rovnic vypočítáme rychlosti v_1 a V_1.

Z první rovnice vyjádříme rychlost v_1

$v_1 = \frac{mv - MV_1}{m}$

a dosadíme ji do druhé rovnice (pokrátíme koeficienty ½)

$mv^2 = m\left(\frac{mv - MV_1}{m}\right)^2 + MV_1^2$

umocníme závorku na druhou

$mv^2 = mv^2 - 2MvV_1 + \frac{M^2}{m}V_1^2 + MV_1^2$

a po úpravě dostaneme

$V_1 = \frac{2m}{m+M}v$.

Závaží na pružině bude vykonávat harmonické kmity a jeho poloha je popsaná rovnicí

$x = A\sin(\omega t + \varphi)$,

kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$, A je amplituda kmitů a φ je fázový faktor, které určíme z počátečních podmínek.

V čase $t = 0$ je kulička M v počátku soustavy souřadnic, $x(0) = 0$, a má rychlost $\dot{x}(0) = V_1$. Pro amplitudu a fázový faktor dostáváme tedy podmínky

$x(0) = 0 = A\sin\varphi$

$\dot{x}(0) = V_1 = A\omega\cos\varphi$

Protože amplituda musí být nenulová, vychází z první rovnice, že $\varphi = 0$. Z druhé rovnice potom dostáváme $A = \frac{V_1}{\omega}$. Po dosazení za V_1 a ω dostáváme výsledný výraz pro amplitudu kmitů pružiny

$A = \frac{2m}{m+M}v\sqrt{\frac{M}{k}}$.