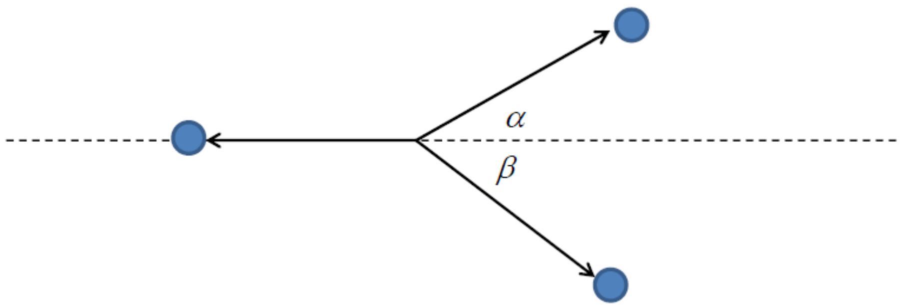
Test 1a

Úloha 1

Při výbuchu se nálož roztrhla na 3 stejně velké části, které se rozletěly podle obrázku rychlostí o stejné velikosti. Určete úhly α, β.



Řešení

Zvolíme si soustavu souřadnic podle obrázku a použijeme zákon zachování hybnosti. Protože před výbuchem jsou všechny části nálože v klidu je jejich hybnost nula. Po výbuchu letí všechy části (jejich hmotnost označme m) stejně velkou rychlostí (označme ji v), ale různým směrem. Můžeme tedy napsat zákon zachování hybnosti pro x -ovou a y-složku takto

$$0 = -mv + mv\ \cos\alpha + mv\ \cos\beta$$
$$0 = mv\ \sin\alpha - mv\ \sin\beta$$

Můžeme rovnice vydělit mv a po úpravě dostaneme

$$0 = -1 + \ \cos\alpha\ + \cos\beta$$
$$0 = \ \sin\alpha - \sin\beta$$

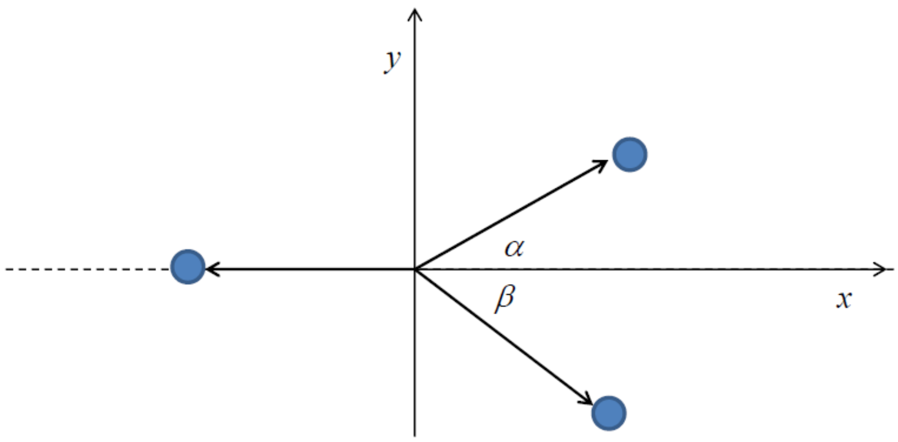
Z druhé rovnice je zřejmé, že $\sin\alpha$ musí být stejný jako $\sin\beta$a tedy $\beta\ = \alpha$.

Když dosadíme do první rovnice za β úhel α, tak dostaneme $0 = -1 +\ 2\cos\alpha$ a tedy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Tedy úhel α je 60^o.

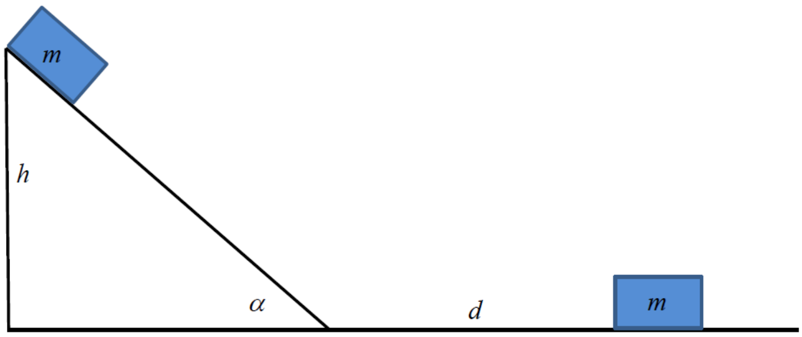
Pozn. Druhá rovnice by byla splněna také pro $\beta = \pi - \alpha$, pak ale nebude mít řešení první rovnice, kde po dosazení vyjde $1 =\ \cos\alpha\ + \cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha - \cos\alpha = 0$.

Takže jediná možnost je $\alpha = \beta = 60^o$.



Úloha 2

Předmět o hmotnosti m jsme nechali klouzat z výšky h po nakloněné rovině svírající s vodorovným směrem úhel α. Jakou dráhu d ujede po vodorovné podložce, než se zastaví? Dynamický koeficient smykového tření mezi vodorovnou podložkou a daným předmětem je μ a stejný koeficient smykového tření je také mezi nakloněnou rovinou a předmětem.

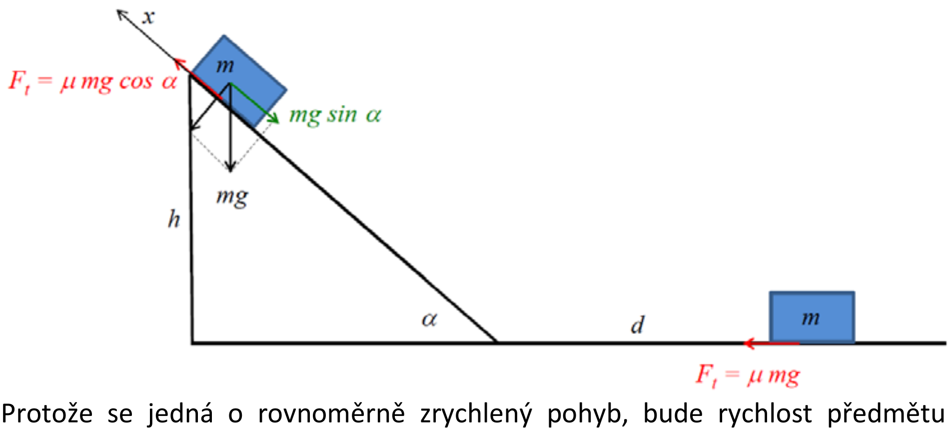


Řešení

Nejdříve vypočítáme jakou rychlost bude mít předmět v okamžiku, kdy sjede z nakloněné roviny. Jak je vidět z obrázku níže, předmět je stahován dolů z nakloněné roviny složkou tíhové síly ve směru nakloněné roviny. Tato síla má velikost $mg \sin\alpha$. Proti této síle působí třecí síla o velikosti $\mu\, mg \cos\alpha$. Můžeme tedy napsat druhý Newtonův zákon pro složku síly ve směru nakloněné roviny (kladný směr osy x je zvolen podél nakloněné roviny směrem nahoru)

$-ma = -mg \sin\alpha + \mu\, mg \cos\alpha.$

Sledovaný předmět tedy sjíždí po nakloněné rovině se zrychlením o velikosti $a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g$. (Pozn. Toto platí pouze, pokud je sklon nakloněné roviny (úhel α) dost velký aby $mg \sin\alpha > \mu\, mg\, cos\, \alpha$ a předmět sjížděl, tj. $\operatorname{tg}\alpha > \mu$. V opačném případě udrží tření předmět na místě a vůbec nesjede.)



Protože se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb, bude rychlost předmětu v okamžiku, kdy sjel z nakloněné roviny na vodorovnou podložku

$$v_0 = at_0 = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\, gt_0 \qquad (1)$$

kde t_0 je doba, po kterou sjíždí předmět po nakloněné rovině. Současně platí, že dráha, kterou předmět urazí na nakloněné rovině je $s = \frac{1}{2}a{t_0}^2$. Dobu, po kterou předmět sjíždí po nakloněné rovině, je tedy možné vyjádřit jako $t_0 = \sqrt{\frac{2s}{a}}$. Pro nakloněnou rovinu platí $s = \frac{h}{\sin\alpha}$ a čas t_0 je tedy $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}}$. Tento čas dosadíme do rovnice (1) a dostaneme rychlost, kterou má těleso, když sjede z nakloněné roviny $v_0 = at_0 = \sqrt{\frac{2ha}{\sin\alpha}}$.

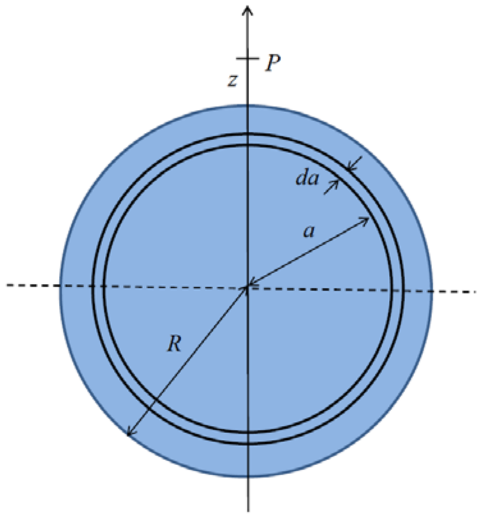
Když se těleso pohybuje po rovinné podložce, tak je brzděno třecí silou o velikosti

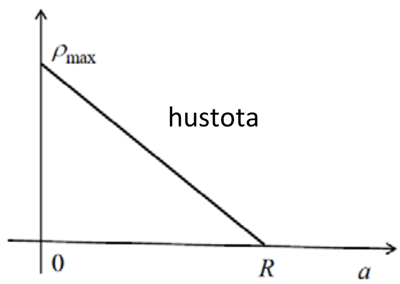
$F_t = \mu m g$. Pohybuje se tedy rovnoměrně zpomaleným pohybem a jeho rychlost tělesa se snižuje podle vztahu $v = v_0 - \frac{F_t}{m} t = v_0 - \mu g t$.
Předmět se zastaví, když $v = 0$ a to nastane v okamžiku $t_z = \frac{v_0}{\mu g}$. Dráha, kterou předmět urazí po vodorovné podložce je tedy $d = v_0 t_z - \frac{1}{2} \mu g {t_z}^2 = v_0 \frac{v_0}{\mu g} - \frac{1}{2} \mu g \frac{v_0^2}{\mu^2 g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g}$. Když dosadíme za $v_0 = \sqrt{\frac{2ha}{\sin \alpha}}$ dostáváme $d = \frac{ha}{\mu g \sin \alpha}$ a když nakonec dosadíme za $a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g$, vyjde nám, že předmět ujede po vodorovné podložce vzdálenost $d = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\mu \sin \alpha} h$.

Úloha 3
Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole koule o poloměru R, jejíž hustota se lineárně zvětšuje od okraje ke středu od 0 do $\rho_{\max}$.

Řešení
Střed koule umístíme do počátku soustavy souřadnic. Protože se jedná o sféricky symetrický problém stačí vyšetřit závislost potenciálu a intenzity gravitačního pole podél jedné souřadnicové osy, např. osy z. Rozdělíme si výpočet na případ, (i) kdy se nacházíme mimo kouli a (ii) kdy jsme uvnitř koule.

(i) vně koule
Využijeme toho, že potenciál gravitačního pole tenké homogenní duté koule o poloměru R a hmotnosti dm je vně koule $-G\frac{dm}{z}$, tj. stejný jako potenciál hmotného bodu o stejného hmotnosti umístěného ve středu koule. Kouli si tedy rozdělíme na tenké duté koule o tloušťce da a s poloměrem a postupně rostoucím od 0 do R (jako slupky cibule).





Vypočítáme potenciál v bodě P, jehož z-tová souřadnice je z. Příspěvek slupky o poloměru a k celkovému potenciálu v bodě P je $d\varphi = -G\frac{dm}{z}$, kde $dm = \rho(a) 4\pi a^2 da$. Hustota ρ lineárně narůstá z nulové hodnoty na kraji koule k maximální hodnotě $\rho_{\max}$ ve středu koule, viz obrázek. Závislost hustoty na a můžeme vyjádřit takto $\rho(a) = \frac{R-a}{R} \rho_{\max}$.
Hmotnost slupky můžeme vyjádřit jako $dm = \frac{R-a}{R} \rho_{\max} 4\pi a^2 da = 4\pi \rho_{\max} \left(a^2 - \frac{a^3}{R}\right) da$.
Příspěvek k potenciálu v bodě P od této slupky je $d\varphi = -\frac{G 4\pi \rho_{\max}}{z} \left(a^2 - \frac{a^3}{R}\right) da$.
Celkový potenciál v bodě P získáme posčítáním příspěvků všech slupek

$$\varphi = \int d\varphi = -\frac{G 4\pi \rho_{\max}}{z} \int_0^R \left(a^2 - \frac{a^{\text{š}}}{R}\right) da = -\frac{G 4\pi \rho_{\max}}{z} \left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4R}\right]_0^R = -\frac{G 4\pi \rho_{\max}}{z} \frac{R^3}{12}$$

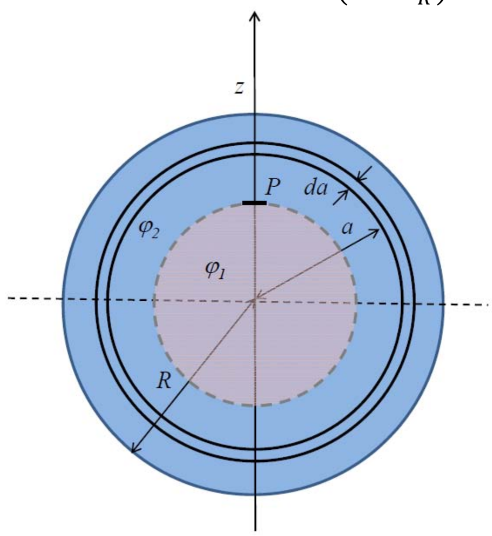
Pokud označíme $M_{\max} = \frac{4}{3}\pi\rho_{\max}R^3$, můžeme výsledek zapsat jako

$$\varphi = -\frac{GM_{\max}}{4z}$$

$M_{\max}$ je hmotnost koule o poloměru R, která má všude hustotu $\rho_{\max}$.
Pozn. Při výpočtu potenciálu jsme z jsme brali jako vzdálenost od počátku (tj. je vždy kladné). Pokud to má být souřadnice a jsou tedy možné kladné i záporné hodnoty, je potřeba použít absolutní hodnotu

$$\varphi = -\frac{GM_{\max}}{4|z|}$$

(ii) uvnitř koule
Nyní počítáme potenciál gravitačního pole v bodu P, který se nachází uvnitř koule a jeho z -tová souřadnice je z. Opět rozdělíme kouli na tenké slupky a hmotnost jedné takové slupky o poloměru a a a tloušťce da je $dm = 4\pi\rho_{\max}\left(a^2 - \frac{a^{š}}{R}\right)da.$



Potenciál φ v bodu P si můžeme rozdělit na příspěvek φ_1 od slupek, které jsou pod bodem P (tj. blíže ke středu koule) a příspěvek φ_2 od slupek, které jsou nad bodem P (tj. dále od středu koule), $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
Příspěvek $\varphi_1$je $\varphi_1 = -\frac{G4\pi\rho_{\max}}{z}\int_0^z\left(a^2 - \frac{a^{š}}{R}\right)da = -\frac{G4\pi\rho_{\max}}{z}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4R}\right]_0^z = -G4\pi\rho_{\max}\left(\frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4R}\right),$
což můžeme napsat jako $\varphi_1 = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(z^2 - \frac{3z^3}{4R}\right).$

Pro výpočet příspěvku φ_2 využijeme toho, že potenciál je všude uvnitř homogenní duté koule o hmotnosti dm poloměru a konstantní a to $-\frac{Gdm}{a}$.
Příspěvek slupky o hmotnosti dm a poloměru a k potenciálu v bodu P je tedy $d\varphi_2 = -\frac{Gdm}{a}$
Dosadíme za $dm = 4\pi\rho_{\max}\left(a^2 - \frac{a^{š}}{R}\right)da$ a dostaneme $d\varphi_2 = -G4\pi\rho_{\max}\left(a - \frac{a^2}{R}\right)da.$
Celkový příspěvek k potenciálu φ_2 dostaneme integrací

$$\varphi_2 = \int d\,\varphi_2 = -G4\pi\rho_{\max}\int_z^R\left(a - \frac{a^2}{R}\right)da = -G4\pi\rho_{\max}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3R}\right]_z^R$$

Po dosazení mezí

$$\varphi_2 = -G4\pi\rho_{\max}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3R}\right) = -G4\pi\rho_{\max}\left(\frac{R^2}{6} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3R}\right)$$

a to jde napsat jako

$$\varphi_2 = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{3z^2}{2} + \frac{z^3}{R}\right)$$

Výsledný potenciál uvnitř koule je

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(z^2 - \frac{3z^3}{4R} + \frac{R^2}{2} - \frac{3z^2}{2} + \frac{z^3}{R}\right) = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4R}\right)$$

Protože jsme brali z jako vzdálenost od středu koule, tj. z je vždy kladné, musíme pro záporné hodnoty souřadnice z otočit znaménko u členu z^3. Výsledek je tedy

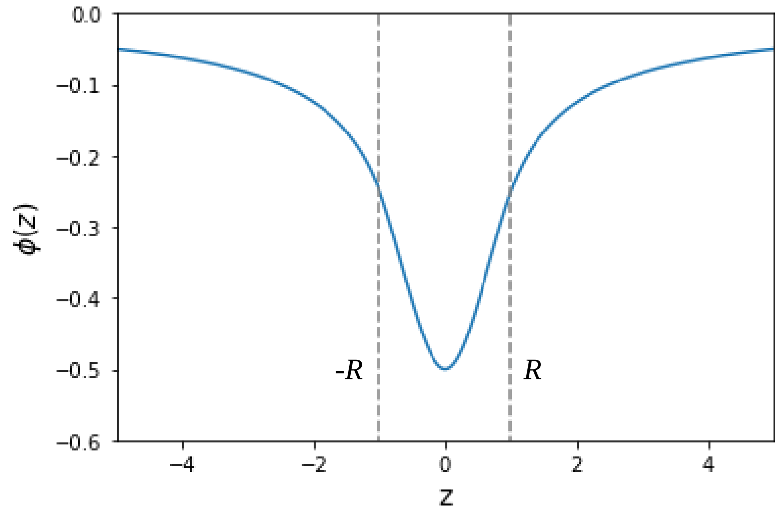
$$\varphi = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4R}\right) \text{ pro } z \geq 0$$

$$\varphi = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{4R}\right) \text{ pro } z < 0$$

To jde napsat souhrnně jako

$$\varphi = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4R}\frac{|z|}{z}\right)$$

Průběh potenciálu gravitačního pole je vykreslen na následujícím obrázku



Intenzita gravitačního pole koule v ose z bude mít tvar $\vec{K} = (0{,}0, K_z)$, kde z-tová složka intenzity je

$$K_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Vně koule dostaneme

$$K_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{GM_{\max}}{4z}\right) = -\frac{GM_{\max}}{4z^2} \text{ pro } z \geq 0$$

$$K_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{GM_{\max}}{4z}\right) = \frac{GM_{\max}}{4z^2} \text{ pro } z < 0$$

Tedy souhrnně to můžeme napsat jako

$$K_z = -\frac{GM_{\max}}{4z^2}\frac{|z|}{z}$$

Uvnitř koule máme

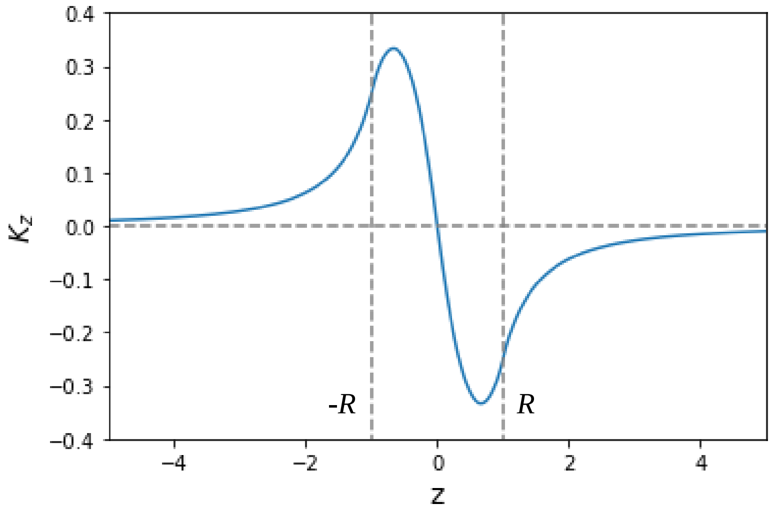
$$K_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4R}\right)\right) = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(z - \frac{3z^2}{4R}\right) \text{ pro } z \geq 0$$

$$K_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{4R}\right)\right) = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(z + \frac{3z^2}{4R}\right) \text{ pro } z < 0$$

To můžeme souhrnně napsat jako

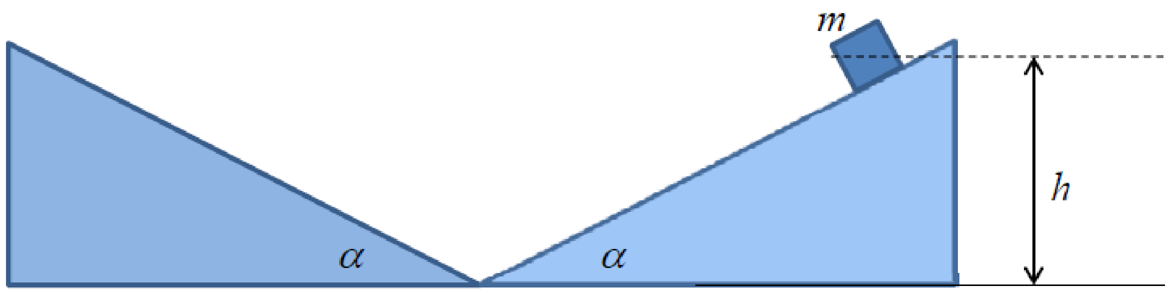
$$K_z = -\frac{GM_{\max}}{R^3}\left(z - \frac{3z^2}{4R}\frac{|z|}{z}\right)$$

Průběh složky K_z intenzity gravitačního pole je vykreslen na následujícím obrázku



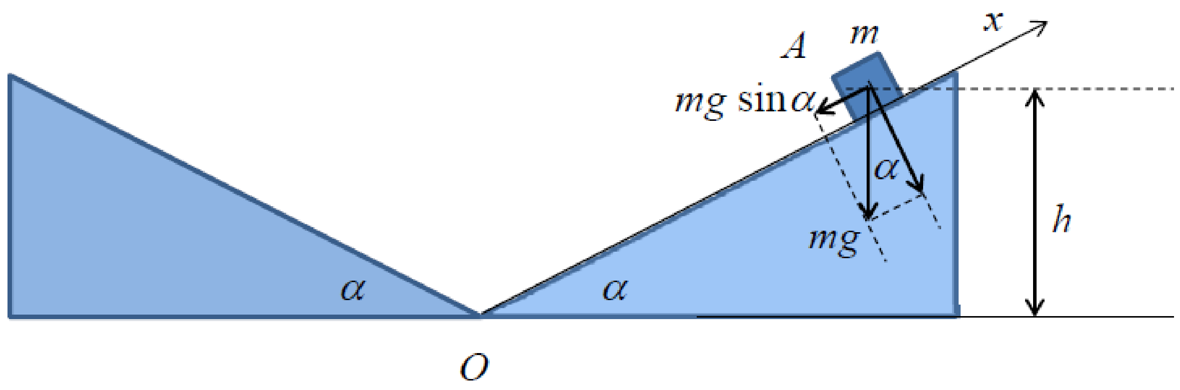
Úloha 4

Předmět o hmotnosti m pustíme po dráze podle obrázku z místa ve výšce h. Za jak dlouho se předmět vrátí zpátky do místa odkud jsme ho pustili, když po dráze klouže zcela bez tření?



Řešení

Doba, za kterou předmět sjede dolů je stejná jako doba, ze kterou vyjede nahoru. Stačí tedy spočítat čas, za který předmět sjede dolů z bodu A do bodu O a tento čas vynásobit čtyřmi. Jak je vidět z obrázku, tak předmět je stahován dolů složkou tíhové síly rovnoběžnou s povrchem nakloněné roviny. Tato složka tíhové síly má velikost $mg\,\sin\alpha$. Zvolíme osu x v rovině nakloněné roviny a její kladný směr mířící nahoru a můžeme napsat druhý Newtonův zákon pro sjíždějící předmět $-ma = -mg\,\sin\alpha$. Předmět tedy bude sjíždět dolů se zrychlením o velikosti $a = g\,\sin\alpha$. Pokud má sjet dolů až do bodu O, tak musí urazit dráhu $s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}a\,t^2$. Z toho vypočítáme čas jako $t = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}}$. Dosadíme za zrychlení $a = g\,\sin\alpha$ a dostáváme $t = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{1}{\sin\alpha}}$. Hledaná doba je $4t = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{4}{\sin\alpha}}$.



Úlohu je možné stejně dobře vyřešit pomocí celkové energie. V každém čase je celková energie předmětu $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgh(x)$, kde výška tělesa nad zemí $h(x)$ souvisí s jeho x-ovou souřadnicí jako s $h(x) = x\,\sin\alpha$ (x-ová osa je v rovině nakloněné roviny). Celková energie předmětu je tedy při sjíždění po nakloněné rovině $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx\,\sin\alpha$. Zderivujeme tuto rovnici podle času a dostáváme $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x}\,\sin\alpha$. Protože celová energie zůstává konstantní je $\frac{dE}{dt} = 0$, můžeme pokrátit m a $\dot{x}$ a dostaneme $\ddot{x} + g\,\sin\alpha = 0$. Tedy x-ová složka zrychlení předmětu je $\ddot{x} = -g\,\sin\alpha$. Když tuto rovnici dvakrát zintegrujeme podle času a použijeme počáteční podmínky $\dot{x}(0) = 0$ a $x(0) = \frac{h}{\sin\alpha}$ dostaneme $x(t) = -\frac{1}{2}g\,\sin\alpha\,t^2 + \frac{h}{\sin\alpha}$. Když předmět sjede do počátku (do bodu O, tak je $x = 0$. Z podmínky $0 = -\frac{1}{2}g\,\sin\alpha\,t^2 + \frac{h}{\sin\alpha}$ můžeme tedy vypočítat jak dloho bude předmět sjíždět dolů jako $t = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{1}{\sin\alpha}}$. Celkový čas, ze který se předmět vrátí zpáky do výchozího bodu, je čtyřnásobek, tj. $4t = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{4}{\sin\alpha}}$.