

---

**Mechanika**  
Mechanika  
Mechanika  
Mechanika  
Mechanika

JOZEF KVASNICA  
A KOLEKTIV

ACADEMIA PRAHA

---

# Mechanika

JOZEF KVASNICA  
ANTONÍN HAVRÁNEK  
PAVEL LUKÁČ  
BORIS SPRUŠIL

ACADEMIA PRAHA 1988

# Předmluva

*Tato učebnice vznikla z dlouholetých přednášek autorů na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity v Praze. Její obsah odpovídá učebním plánům pro posluchače fyziky prvního ročníku. K jednotlivým kapitolám je připojeno několik typických řešených úloh, které slouží k aktivnímu osvojení probírané látky.*

*Výběr látky a způsob výkladu činí z učebnice vhodnou pomůcku i pro posluchače přírodovědných a technických oborů k rozšíření a prohloubení znalostí z mechaniky.*

*Mechanika byla první axiomaticky formulovanou fyzikální disciplínou. Logická stavba mechaniky a způsob získávání poznatků je dodnes modelem „fyzikálního myšlení“ a předobrazem všech fyzikálních disciplín. Snažili jsme se těmto skutečnostem přizpůsobit metodu výkladu, a to i při limitujícím rozsahu matematických znalostí posluchačů prvního semestru. Některé matematické partie přesahující předpokládané středoškolské znalosti jsou v potřebném rozsahu vysvětleny v matematických dodatcích.*

*V učebnici, která je dílem autorského kolektivu (J. Kvasnica – vedoucí kolektivu, A. Havránek, P. Lukáč, B. Sprušil), jsme se snažili vyloučit nehomogenitu, která pramení jak z povahy jednotlivých partií, tak i z jejich pojetí příslušnými autory. Konkrétní rozdělení odpovědnosti jednotlivých autorů je následující: kapitoly 1, 6, 11, 12, matematické dodatky a závěr kapitoly 5 napsal J. Kvasnica, kapitolu 2 B. Sprušil, kapitolu 5 P. Lukáč, kapitoly 3, 4, 7, 8, 9, 10 A. Havránek.*

*Oběma posuzovatelům prof. RNDr. P. Kratochvílovi, DrSc., a doc. RNDr. M. Černohorskému, CSc., patří náš dík za podnětné připomínky k různým variantám rukopisu.*

*J. Kvasnica  
vedoucí autorského kolektivu*

# Kinematika hmotného bodu

## 1.1 Prostor a čas

Hmota má mnohotvárné formy a projevy své existence. Hmotné objekty (např. předměty, tělesa) mění svou vzájemnou polohu, velikost a tvar, tepelné, elektrické a magnetické vlastnosti, skupenství, chemické složení, biologické vlastnosti apod. a tyto změny se často označují společným názvem pohyb. Jednotlivé druhy pohybu se obvykle studují odděleně v odpovídajících vědních oborech. Vzájemnými souvislostmi různých forem pohybu se zabývají různé mezioborové disciplíny (chemická fyzika, biofyzika).

*Mechanika* (z řeckého *μηχανη* = mechané = nástroj, stroj) se zabývá studiem změny polohy těles v prostoru, změnami jejich velikosti a tvaru. Tomuto druhu pohybu říkáme mechanický pohyb. S ohledem na obsah a poslání této učebnice budeme všude v dalším výkladu (nebude-li řečeno jinak) pojmem pohyb označovat mechanický pohyb.

Mechanika se obvykle dělí na *kinematiku* (z řeckého *κίνησις* = kiné = pohyb), která se zabývá geometrií pohybu těles bez zřetele k jeho příčinám, a na *dynamiku* (z řeckého *δύναμις* = dynamis = síla), která studuje souvislosti mezi pohybem a silami působícími na zkoumané těleso. Speciálním případem dynamiky je statika, která se zabývá vyšetřováním rovnováhy sil.

Pohyb každého tělesa vždy popisujeme vzhledem k jinému tělesu, které nazýváme *vztažným* neboli *referenčním tělesem*, *vztažnou* neboli *referenční soustavou*. Pohyb sledovaného tělesa se nám jeví různě (má např. jinou trajektorii a rychlost) podle toho, k jakému referenčnímu tělesu tento pohyb vztahujeme. Tuto závislost způsobu pohybu na volbě referenční soustavy nazýváme *relativností pohybu*.

V předchozím výkladu jsme poněkud volně používali pojmů prostor a čas. Existují různé učené definice prostoru a času, avšak tyto definice jsou tak obecné a abstraktní, že jsou pro *konkrétní* výklad nepoužitelné.

Pojem prostoru vznikl z pozorování rozmístění objektivně existujících těles, jejich vzájemné vzdálenosti (odlehlosti) a orientace. Poněvadž dvě tělesa mohou mít libovolnou, spojitě se měnící vzájemnou vzdálenost a vzájemnou orientaci, přisuzujeme prostoru vlastnosti *kontinua*. K jednoznačnému určení polohy



libovolného místa (bodu) daného tělesa potřebujeme tři vzájemně nezávislé údaje (např. délku, šířku, a výšku od počátku referenční soustavy), proto pokládáme „náš“ prostor za *trojrozměrné kontinuum*. Jednotka délky (jeden metr, 1 m) je stanovena příslušnou mezinárodní úmluvou (normou).

Pojem času je odvozen z pozorování změn poloh a vlastností objektů a z doby trvání různých objektivně existujících procesů (např. střídání dne a noci, vegetační období). Jednotka doby trvání (jedna sekunda, 1 s) je určena příslušnou mezinárodní úmluvou (normou). Z pozorování libovolně dlouhých dob trvání procesů (změn) usuzujeme, že čas je (jednorozměrné) kontinuum.

Hmotné objekty existují v prostoru a v čase, tj. „zabírají“ jistou část prostoru a jejich polohy a vlastnosti se s časem mění. V *matematické abstrakci* si můžeme představit prostor a čas i *bez* těchto hmotných objektů. Vzniká tak otázka, zdali a jak jsou vlastnosti prostoru a času ovlivněny přítomností těchto objektů, popř. zdali a jak závisí vlastnosti prostoru a času na volbě referenční soustavy.

Tyto kardinální otázky nelze řešit apriorní logickou úvahou nebo spekulací, nýbrž je nutno rozhodnout je *empiricky*; zobecnění těchto empirických poznatků se pak vysloví *axiomaticky*.

V době, kdy Sir Isaac NEWTON (1643–1727) formuloval teoretické základy mechaniky, se nedal zjistit žádný vliv hmotných objektů na vzdálenosti dvou bodů prostoru, ani na jiné geometrické vlastnosti prostoru. Obdobně se v té době nedal zjistit vliv těles na chod času. Vzdálenosti dvou bodů prostoru i doby trvání procesů se zdály býti nezávislé na volbě referenční soustavy, v níž se tyto veličiny pozorují (měří). Z toho Newton dospěl k představě (postulátu) *absolutního prostoru a absolutního času nezávislého na hmotných objektech a na jejich pohybech*.

Ve svém fundamentálním díle *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) definuje absolutní prostor a absolutní čas takto: „Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně a bez ohledu na vnější objekty. Absolutní prostor je vzhledem ke své podstatě a bez ohledu na vnější objekty stále týž a nepohyblivý“.

Ukazuje se, že geometrické vlastnosti takového prostoru lze popsat soustavou Eukleidových axiomů (EUKLEIDÉS, asi 330–270 před n. l.), proto je Newtonův prostor klasické fyziky *trojrozměrným eukleidovským prostorem*.

V teorii relativity (viz kapitola 12) se ukazuje hluboká souvislost prostoru a času – tzv. *prostorčas*; tělesa a jejich pohyb mají vliv na geometrii *prostorochasu*. Tyto vlivy se však znatelně projevují až při rychlostech těles srovnatelných s rychlostí světla ve vakuu ( $c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ) anebo v blízkosti obrovských kosmických těles.

Tyto skutečnosti konkrétně dokazují, že prostor a čas jsou projevy a formami existence objektivní reality – hmoty.

Při pohybech těles se často setkáváme se situací, že tělesa se pohybují v oblastech prostoru, jež značně převyšují geometrické rozměry těchto těles. Uvedeme

alespoň dva příklady: pohyb elektronu v urychlovači a pohyb Země kolem Slunce. V takových případech můžeme (alespoň v prvním přiblížení) zcela zanedbat geometrické rozměry pohybujícího se tělesa a přejít k abstrakci hmotného bodu.

*Hmotným bodem* nazýváme těleso s nekonečně malými geometrickými rozměry, avšak s nenulovou hmotností. Poněvadž hmotný bod je podle definice (ex definitione) bezrozměrným útvarem, nelze mluvit ani o jeho otáčení, ani o změně tvaru (deformaci), nýbrž jenom o jeho pohybu podél nějaké křivky. Tento na první pohled velice umělý pojem hmotného bodu je mimořádně užitečným pojmem pro teoretickou výstavbu mechaniky. Jeho abstraktnost je však pouze zdánlivá. Různá tělesa se skládají z velkého počtu atomů (o rozměrech řádově  $10^{-10}$  m), jež samy sestávají z elektronů, protonů a neutronů, jejichž „rozměry“ (řádově  $10^{-15}$  m) jsou velmi malé nejen vzhledem k rozměrům makroskopických těles, ale i k rozměrům atomů. Reálná tělesa tak můžeme zobrazit jako soustavu hmotných bodů. Později (v kapitole 5) uvidíme, že postupný (translační) pohyb tělesa lze zobrazit pohybem hmotného bodu (hmotného středu, těžiště), v němž je soustředěna veškerá hmotnost tělesa.

*Poznámka:* Ustálený (a normou předepsaný) termín hmotný bod není v *mechanice* nejvhodnější. V mechanice se u tohoto objektu jedná pouze o jeho hmotnost zkoncentrovanou do bodu, proto by bylo vhodnější mluvit o *bodové hmotnosti* obdobně jako se v elektrodynamice mluví o bodovém náboji.

## 1.2 Poloha, trajektorie, rychlost a zrychlení hmotného bodu

K určení polohy hmotného bodu používáme různé souřadnicové soustavy (viz matematický dodatek D.1).

Zvolíme počátek  $O$  soustavy souřadnic a tři nekomplanární (tj. neležící v jedné rovině) jednotkové vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Spojnici  $\mathbf{r}$  počátku  $O$  s libovolným bodem  $M$  nazýváme *polohovým vektorem* (*průvodičem*, *radius – vektorem*) bodu  $M$  vzhledem k bodu  $O$ . Pomocí zvolené vektorové báze  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  zapíšeme průvodič  $\mathbf{r}$  v tvaru

$$\mathbf{r} = s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + s_3\mathbf{e}_3 \equiv s_i\mathbf{e}_i. \quad 1(2.1)$$

Vektory  $s_1\mathbf{e}_1, s_2\mathbf{e}_2, s_3\mathbf{e}_3$  jsou složky (komponenty), koeficienty  $s_1, s_2, s_3$  jsou souřadnice (koordináty) polohového vektoru  $\mathbf{r}$ . (Základní vztahy a operace s vektory uvádíme v matematických dodatcích D.3 a D.4). V rovnici 1(2.1) jsme užili *Einsteinovy sumační konvence* (viz dodatek D.2): vyskytne-li se ve výrazu malý latinský index právě dvakrát, budeme tím rozumět sumaci přes tento index, aniž bychom vypisovali sumační znak.

Bázové vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  budeme pokládat vzájemně ortogonální (kolmé), takže pro jejich skalární součiny platí

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (1(2.2))$$

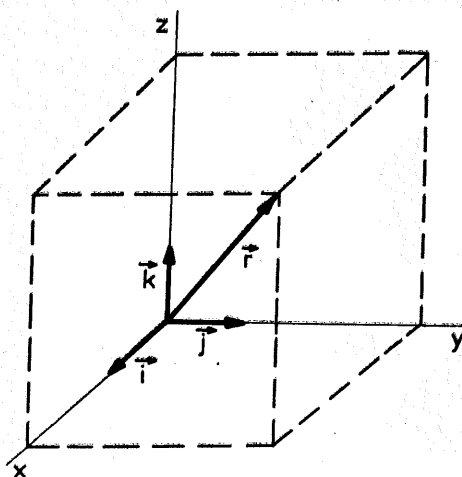
kde Kroneckerův symbol  $\delta_{ij} = 1$  pro  $j = i$  a  $\delta_{ij} = 0$  pro  $j \neq i$ . V takovém případě

$$\mathbf{s}_i = r \mathbf{e}_i. \quad (1(2.3))$$

Kartézská soustava je znázorněna na obr. 1.1. Jednotkové vektory kartézské báze se obvykle značí  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , takže polohový vektor bude

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

kde  $x, y, z$  jsou kartézské souřadnice průvodiče  $\mathbf{r}$ .



Obr. 1.1 Kartézská soustava souřadnic

Označíme-li  $\alpha, \beta, \gamma$  úhly, jež svírá polohový vektor  $\mathbf{r}$  s kladnými směry souřadnicových os  $x, y, z$ , pak je

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma, \quad (1(2.4))$$

kde

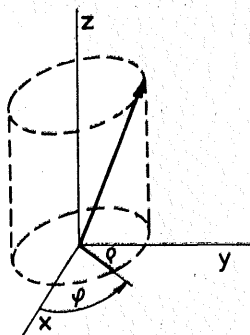
$$r \equiv |\mathbf{r}| \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (1(2.5))$$

je absolutní hodnota polohového vektoru. Směrové kosiny splňují při tom *normovací podmínku*

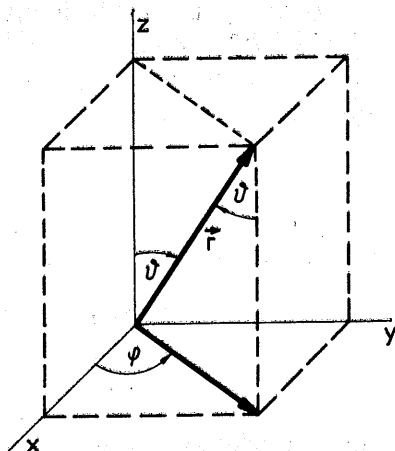
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1(2.6))$$

Cylindrická soustava  $\varrho, \varphi, z$  (viz obr. 1.2) navazuje na polární soustavu (viz dodatek D.1), k níž se přidá rovina  $z$  udávající výšku daného bodu nad rovinou  $x, y$ . Mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi platí vztahy

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z, \quad 1(2.7)$$



Obr. 1.2 Cylindrická soustava souřadnic



Obr. 1.3 Sférická soustava souřadnic

kde

$$\varrho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x. \quad 1(2.8)$$

Ve sférické soustavě  $r, \vartheta, \varphi$  (viz obr. 1.3) platí

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad 1(2.9)$$

kde

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \cos \vartheta = z/r, \quad \cos \varphi = x/(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad 1(2.10)$$

Při pohybu hmotného bodu se jeho polohový vektor  $r$  s časem mění a jeho koncový bod vytváří *pohybovou křivku* neboli *trajektorii*. Jak je ukázáno v dodatku D.1, obloukový element  $ds$  trajektorie v kartézské, cylindrické a sférické soustavě vyjadřují rovnice

$$ds \equiv |dr| = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2}, \quad 1(2.11)$$

$$ds \equiv |dr| = [(d\varrho)^2 + (\varrho d\varphi)^2 + (dz)^2]^{1/2}, \quad 1(2.12)$$

$$ds \equiv |dr| = [(dr)^2 + (r d\vartheta)^2 + (r \sin \vartheta d\varphi)^2]^{1/2}. \quad 1(2.13)$$



Celková délka trajektorie (dráha hmotného bodu) mezi body  $A$ ,  $B$  je dána integrálem

$$s = \int_A^B ds . \quad 1(2.14)$$

Odpovídající výrazy pro rovinnou křivku ležící v rovině  $(x, y)$  dostaneme tak, že v 1(2.11) – 1(2.14) položíme  $z = 0$ , resp.  $\vartheta = \pi/2$ .

Pohyb hmotného bodu v daném časovém intervalu je jednoznačně určen, když pro každý čas  $t$  v tomto intervalu je znám jeho polohový vektor

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t) . \quad 1(2.15)$$

Tomuto *parametrickému* zadání trajektorie odpovídají (v kartézské, cylindrické a sférické soustavě) rovnice

$$x \equiv x(t) , \quad y \equiv y(t) , \quad z \equiv z(t) , \quad 1(2.16)$$

$$\varrho \equiv \varrho(t) , \quad \varphi \equiv \varphi(t) , \quad z \equiv z(t) , \quad 1(2.17)$$

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t) , \quad \vartheta \equiv \vartheta(t) , \quad \varphi \equiv \varphi(t) . \quad 1(2.18)$$

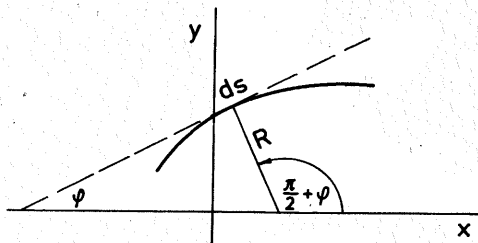
Nechť  $t_1, t_2$  jsou dva časové okamžiky a  $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}(t_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}(t_2)$ . Podíl

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}$$

určuje *průměrnou* rychlost hmotného bodu v časovém intervalu  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Zmenšováním intervalu  $\Delta t \rightarrow 0$  vyjádříme *okamžitou rychlost*  $\mathbf{v}$  hmotného bodu jako časovou derivaci jeho polohového vektoru

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} . \quad 1(2.19)$$

Derivaci podle času budeme označovat *tečkou* nad příslušným symbolem. (Toto označení zavedl I. Newton ve svých Principiích.)



Obr. 1.4

Pohyb bodu se nazývá *přímočarý*, když se nemění *směr* rychlosti; *rovnoměrným* pohybem nazýváme takový pohyb, při němž se nemění *absolutní hodnota*  $v \equiv |\mathbf{v}|$  rychlosti  $\mathbf{v}$ . Příkladem rovnoměrného pohybu je pohyb po kružnici s *konstantní* úhlovou rychlostí  $\omega = \dot{\varphi}$ .

Vektorovou rovnici 1(2.19) lze v kartézské, cylindrické a sférické soustavě nahradit odpovídajícími složkovými rovnicemi (viz D(1.15), D(1.24) a D(1.19))

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad 1(2.20)$$

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \quad 1(2.21)$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\vartheta = r\dot{\vartheta}, \quad v_\varphi = r \sin \vartheta \dot{\varphi}. \quad 1(2.22)$$

Důležitou charakteristikou křivky je její *křivost*, resp. *poloměr křivosti*. Vysvětlíme si tento pojem na příkladě rovinné křivky zadané rovnicí  $y \equiv y(x)$ . Obloukový element  $ds$  této křivky nahradíme obloukovým elementem  $R d\varphi$  kružnice o poloměru  $R$  (viz obr. 1.4), což vede k rovnici

$$ds = R d\varphi. \quad 1(2.23)$$

Veličina  $R$  je poloměr křivosti dané křivky, převrácená hodnota  $1/R$  je křivost křivky.

Vzorec 1(2.23) upravíme tak, že na  $ds$  užitíme vzorec D(1.6) a  $\varphi$  vyjádříme pomocí rovnice  $\operatorname{tg} \varphi = y'$ , resp.  $\varphi = \operatorname{arctg} y'$ , což vede k rovnici

$$(1 + y'^2)^{1/2} = R(d\varphi/dx).$$

Připomeneme-li si známý vzorec

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} f = \frac{f'}{1 + f^2},$$

pak (po dosazení  $f \equiv y'$ ) dostaneme hledaný výsledek

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad 1(2.24)$$

Přenecháme čtenáři jako cvičení, aby dokázal, že poslední vzorec lze přepsat také ve tvaru

$$\frac{1}{R} = \pm \left[ \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad 1(2.24')$$

Zobecnění na trojrozměrnou trajektorii provedeme v další části tohoto článku.

Délka oblouku trajektorie, tj. dráha hmotného bodu, jednoduše souvisí s absolutní hodnotou rychlosti hmotného bodu. Poněvadž kartézské, cylindrické

a sférické souřadnice jsou ortogonální, můžeme absolutní hodnotu  $v \equiv |\mathbf{v}|$  rychlosti vyjádřit některým ze vzorců

$$\begin{aligned} v \equiv |\mathbf{v}| &= (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} = (v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2)^{1/2} = \\ &= (v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad 1(2.25)$$

Ve shodě se vzorci D(1.15), D(1.19) a D(1.24) pak platí

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt, \quad 1(2.26)$$

resp.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}. \quad 1(2.27)$$

Často je výhodné považovat délku oblouku křivky (dráhu hmotného bodu) za parametr (místo času  $t$ ) v rovnici trajektorie. Parametrickou rovnici 1(2.15) trajektorie zaměníme rovnicí

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(s), \quad 1(2.28)$$

kde  $s$  je dráha hmotného bodu od pevně zvoleného bodu.

Poněvadž  $ds \equiv |d\mathbf{r}|$ , bude veličina

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} \quad 1(2.29)$$

představovat jednotkový tečný vektor dané trajektorie. Ve složkovém zápisu tomu odpovídají rovnice

$$\tau_i = \frac{ds_i}{ds}, \quad 1(2.30)$$

kde  $ds_i$  jsou elementární obloučky zavedené v dodatku D.1 vztahy D(1.16), D(1.25) a D(1.21).

Z definice 1(2.29) okamžitě plyne vztah  $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$ , z něhož derivací podle  $s$  dostaneme

$$\boldsymbol{\tau}(d\boldsymbol{\tau}/ds) = 0. \quad 1(2.31)$$

Poslední rovnice praví, že vektor  $d\boldsymbol{\tau}/ds$  je kolmý na tečný vektor  $\boldsymbol{\tau}$ , a má tedy směr normály. Označíme-li symbolem  $\mathbf{v}$  jednotkový vektor ve směru normály, pak z 1(2.31) plyne

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{R}. \quad 1(2.32)$$

Pro „koeficient úměrnosti“  $1/R$  snadno najdeme explicitní vyjádření. Povyšněním rovnice 1(2.32) na druhou dostaneme

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\tau_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\tau_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\tau_3}{ds}\right)^2, \quad 1(2.33)$$

jelikož  $v^2 = 1$ . V kartézské soustavě je  $\tau_1 = dx/ds$ ,  $d\tau_1/ds = d^2x/ds^2$  atd., což vede k vyjádření

$$\frac{1}{R} = \pm \left[ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad 1(2.34)$$

Odtud je vidět, že  $R$  představuje zobecnění poloměru křivosti na trojrozměrnou trajektorii. Vyjádření  $R$  v jiných souřadnicových soustavách dostaneme přímo z definičních vztahů 1(2.30) a 1(2.33).

Získaných výsledků použijeme k rozkladu zrychlení hmotného bodu na zrychlení tečné a normálové.

*Okamžitým zrychlením  $\mathbf{a}$*  hmotného bodu rozumíme veličinu

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}}. \quad 1(2.35)$$

Pomocí vztahů 1(2.27) a 1(2.29) vyjádříme okamžitou rychlost

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \equiv v\boldsymbol{\tau}. \quad 1(2.36)$$

Derivací tohoto vztahu podle času  $t$  dostaneme

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Po dosazení  $(ds/dt) = v$ ,  $(d\boldsymbol{\tau}/ds) = v/R$  získáme hledaný vztah

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu}. \quad 1(2.37)$$

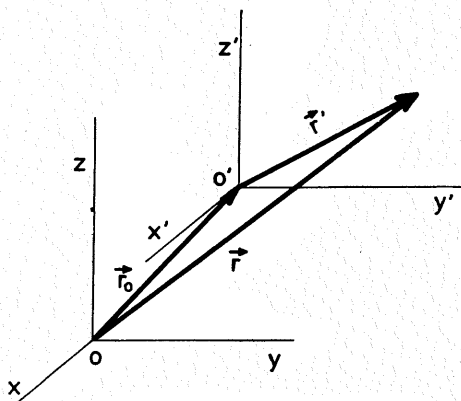
První člen  $\boldsymbol{\tau}(dv/dt)$  představuje tečnou, druhý člen  $v(v^2/R)$  normálovou složku zrychlení hmotného bodu.

Z definice vztahu 1(2.35) lze odvodit výrazy pro složky zrychlení v cylindrické a sférické soustavě, což se provádí ve speciálních kursech analytické mechaniky.



### 1.3 Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě

Často potřebujeme porovnat pohyb daného hmotného bodu (tělesa) z hlediska různých referenčních soustav, jež se vůči sobě navzájem pohybují. Pohyb projektilu vystřeleného z letícího letadla můžeme popisovat z hlediska referenční soustavy pevně spojené s letadlem anebo z hlediska pevného pozemského stanoviště, jež se však spolu se Zemí otáčí a pohybuje kolem Slunce. Vzniká tak kinematický řetěz složených pohybů.



Obr. 1.5 Translace souřadnicových soustav

Zde probereme dva jednoduché základní případy. Mějme dvě kartézské referenční soustavy  $(x, y, z)$  a  $(x', y', z')$ , jejichž počátky  $O, O'$  jsou navzájem posunuty o  $\mathbf{r}_0$ , přičemž orientace os obou soustav je stejná (viz obr. 1.5). Polohový vektor bodu  $M$  vzhledem k počátku  $O$  označíme  $\mathbf{r}$ , vzhledem k počátku  $O'$  symbolem  $\mathbf{r}'$ . Mezi oběma vektory očividně platí vztah

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' . \quad 1(3.1)$$

Nyní budeme předpokládat, že čárkovaná referenční soustava se pohybuje vůči nečárkované soustavě rovnoměrně a přímočaře konstantní rychlostí  $\mathbf{V}$  (ve směru spojnice  $OO'$ ). Podle Newtonova axiomu absolutního prostoru a absolutního času jsou vzdálenosti i čas nezávislé na pohybu referenční soustavy. Mezi oběma soustavami bude tedy platit ( $\mathbf{r}_0 = \mathbf{V}t$ )

$$\mathbf{r} = \mathbf{V}t + \mathbf{r}' , \quad t = t' . \quad 1(3.2)$$

Tato transformace, jež je (pro daný případ) matematickým vyjádřením absolutního prostoru a absolutního času, se nazývá *Galileiovou transformací* (Galileo GALILEI, 1564–1642).

Rychlosti hmotného bodu  $M$  v obou soustavách budou  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ,  $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt' = d\mathbf{r}'/dt$ , jelikož je  $t' = t$ . Poslední předpoklad ( $t' = t$ ) je pro další

výsledky *podstatný*. Derivací první rovnice 1(3.2) dostáváme *adiční teorém rychlostí Newtonovy mechaniky*

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' . \quad 1(3.3)$$

To je přímý důsledek axiomů absolutního prostoru a absolutního času, proto jakýkoliv *rozpor* s tímto adičním teorémem rychlostí je *vyvrácením* axiómů absolutního prostoru a absolutního času. Podrobněji se budeme touto problematikou zabývat v kapitole 12 věnované relativistické mechanice. Zde pouze poznamenejme, že adiční teorém 1(3.3) je ve výborné shodě s experimentem, pokud rychlosti jsou velmi malé ve srovnání s rychlostí světla  $c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

Poněvadž vzájemná rychlost  $\mathbf{V}$  obou soustav je konstantní, budou zrychlení hmotného bodu v obou soustavách stejná

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' . \quad 1(3.4)$$

Ve druhém případě budeme předpokládat, že obě referenční soustavy mají stejný počátek, avšak čárkovaná soustava rotuje s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega = \dot{\alpha}$  kolem (společné) osy  $z = z'$ . Vztah mezi souřadnicemi bodu v obou soustavách udávají rovnice D(2.1), které přepíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t , \\ x'_2 &= -x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t , \\ x'_3 &= x_3 . \end{aligned} \quad 1(3.5)$$

Zde jsme místo  $x, y, z$  užili označení  $x_1, x_2, x_3$  a úhel  $\alpha$  vyjádřili pomocí (konstantní) úhlové rychlosti  $\omega$  vztahem  $\alpha = \omega t$ . K rovnicím 1(3.5) by se ještě mělo přidat  $t' = t$ .

Derivací rovnic 1(3.5) podle času dostaneme složky rychlosti a zrychlení hmotného bodu v obou soustavách

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \cos \omega t + v_2 \sin \omega t + \omega(-x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t) , \\ v'_2 &= -v_1 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t - \omega(x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t) , \\ v'_3 &= v_3 ; \end{aligned} \quad 1(3.6)$$

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + 2\omega(-v_1 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t) - \\ &\quad - \omega^2(x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t) , \\ a'_2 &= -a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t - 2\omega(v_1 \cos \omega t + v_2 \sin \omega t) - \\ &\quad - \omega^2(-x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t) , \\ a'_3 &= a_3 . \end{aligned} \quad 1(3.7)$$

Složky rychlosti a zrychlení hmotného bodu v *rotující* soustavě se tedy transformují *složitějším* způsobem než samotné souřadnice.

Zavedeme  $\omega' \equiv -\omega$  (úhlovou rychlost rotace nečárkované soustavy vůči čárkované kolem osy  $3'$ ) a užijeme transformačních vzorců 1(3.5). Místo rovnic 1(3.6) a 1(3.7) tak dostaneme

$$\begin{aligned} v'_1 &= -\omega'x_2 + (v_1 \cos \omega t + v_2 \sin \omega t), \\ v'_2 &= +\omega'x_1 + (-v_1 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t), \\ v'_3 &= v_3; \end{aligned} \quad 1(3.8)$$

$$\begin{aligned} a'_1 &= \omega'^2x'_1 - 2\omega'v'_2 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t), \\ a'_2 &= \omega'^2x'_2 + 2\omega'v'_1 + (-a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t), \\ a'_3 &= a_3. \end{aligned} \quad 1(3.9)$$

Členy  $\omega'^2x'_1$ ,  $\omega'^2x'_2$  jsou složkami *odstředivého zrychlení*, členy  $-2\omega'v'_2$ ,  $2\omega'v'_1$  jsou složkami *Coriolisova zrychlení* (Gaspard CORIOLIS, 1792–1843).

Obecnou rotaci kolem libovolně orientované osy rotace můžeme získat složením tří rotací typu 1(3.5). V takovém případě budeme mít tři složky  $\omega'_1$ ,  $\omega'_2$ ,  $\omega'_3$  vektoru úhlové rychlosti  $\omega'$  rotace soustavy kolem dané rotační osy (viz kapitolu 7 věnovanou mechanice tuhého tělesa). Tato rotační osa obecně nesouhlasí se žádnou ze souřadnicových os. Stejným postupem jako při odvozování rovnic 1(3.9) získáme pro Coriolisovo zrychlení  $\mathbf{a}_C$  vyjádření

$$\mathbf{a}_C \equiv 2[\omega' \times \mathbf{v}'] = -2[\omega \times \mathbf{v}']. \quad 1(3.10)$$

Coriolisovo zrychlení je *kolmé* jak na vektor úhlové rychlosti  $\omega'$  (směr rotační osy), tak na rychlost  $\mathbf{v}'$  hmotného bodu v *rotující* soustavě. Ve speciálním případě rotace kolem osy  $3'$ , tj.  $\omega' \equiv (0, 0, \omega')$ , plynou z 1(3.10) známé již členy  $-2\omega'v'_2$ ,  $2\omega'v'_1$ .

## Řešené úlohy

1. Vyšetřete trajektorii hmotného bodu zadanou parametrickou rovnicí

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

Fyzikálně to odpovídá šikmému vrhu v homogenním tíhovém poli (s tíhovým zrychlením  $g$ ) počáteční rychlostí  $v_0$  pod úhlem  $\alpha$ .

Řešení. Vyloučením parametru  $t = x/(v_0 \cos \alpha)$  dostaneme rovnici paraboly

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2)$$

Z (1) vypočteme složky rychlosti  $v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_y = \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt$ , a odtud plyne pro rychlost

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = [v_0^2 \cos^2 \alpha + (gt - v_0 \sin \alpha)^2]^{1/2}. \quad (3)$$

Časový interval odpovídá řešením  $y = 0$ , tj.  $t = 0$ ,  $t = T = 2(v_0/g) \sin \alpha$ . Zavedeme-li ještě  $a = (v_0/g) \cos \alpha$ , pak délka dráhy je

$$s = \int_0^T v dt = g \int_{-T/2}^{T/2} (a^2 + \tau^2)^{1/2} d\tau = 2g \int_0^{T/2} (a^2 + \tau^2)^{1/2} d\tau, \quad (4)$$

kde  $\tau = t - T/2$ . Při integraci uijeme vztahu

$$\int (a^2 + \tau^2)^{1/2} d\tau = \frac{\tau}{2} (a^2 + \tau^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2} \ln[\tau + (a^2 + \tau^2)^{1/2}].$$

Po dosazení do (4) a jednoduchých úpravách dostaneme

$$s = \frac{v_0^2}{g} \left[ \sin \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right].$$

Křivost trajektorie určíme z rovnice 1(2.24), v níž uijeme (1).

2. Najděte trajektorii, jejíž poloměr křivosti  $R = y^2$ .

Řešení. Dosazením do rovnice 1(2.24) se přesvědčíme, že tomu vyhovuje řešení

$$y = \operatorname{ch} x \equiv \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

3. Trajektorie hmotného bodu je dána parametrickými rovnicemi

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = v_0 t.$$

Řešení. Průmět do roviny  $(x, y)$  je kružnice  $x^2 + y^2 = a^2$ . Tato kružnice se posouvá ve směru  $z$ -ové osy rychlostí  $v_0$ . Trajektorií je tedy šroubovice. Z rychlostí  $v = (v_0^2 + a^2 \omega^2)^{1/2}$  určíme dráhu (počítanou od  $t = 0$ , resp.  $z = 0$ )

$$s = vt = (v_0^2 + a^2 \omega^2)^{1/2} z / v_0.$$

4. Vyšetřete (rovinnou) trajektorii hmotného bodu  $x = a \sin \omega t$ ,  $y = b \cos \omega t$ .

Řešení. Jedná se o elipsu  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ . Pro rychlost dostaneme

$$v = \omega a (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \omega t)^{1/2},$$



kde  $\varepsilon = e/a$ ,  $e = (a^2 - b^2)^{1/2}$ . Dráha je pak dána tzv. eliptickým integrálem

$$s = \omega a \int_{t_0}^{t_1} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \omega t)^{1/2} dt.$$

Tento integrál nelze (kromě případů  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ) vyjádřit analyticky pomocí elementárních funkcí.

5. Zrychlení hmotného bodu pohybujícího se přímočaře je nepřímě úměrné jeho rychlosti. Najděte zákon dráhy („jízdní řád“) takového hmotného bodu.

Řešení. Za přímku zvolíme osu  $x$ , takže je

$$\ddot{x} = k/(2\dot{x}) \quad (1)$$

(konstantu úměrnosti jsme označili  $k/2$ ). Z rovnice (1) plyne  $\dot{x}\ddot{x} = k/2$ , tj.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kt \right) = 0.$$

Výraz v závorce musí být tedy konstantní. Označíme-li tuto konstantu  $C/2$ , pak je  $\dot{x}^2 - kt = C$ . Je-li rychlost  $v = \dot{x}$  v čase  $t = 0$  rovna  $v_0$ , pak  $C = v_0^2$ , a tudíž

$$\dot{x}^2 = v_0^2 + kt.$$

Vezmeme-li pohyb po polopřímce  $x \geq 0$ , pak je

$$\frac{dx}{dt} = + (v_0^2 + kt)^{1/2}. \quad (2)$$

Elementární integrací dostaneme

$$x = \frac{2}{3k} (v_0^2 + kt)^{3/2} - \frac{2}{3k} v_0^3. \quad (3)$$

Integrační konstantu jsme zvolili tak, aby při  $t = 0$  bylo  $x = 0$ . Spojením rovnic (1), (2) a (3) dostaneme závislost zrychlení na poloze

$$\ddot{x} = \frac{k}{2} \left( \frac{3}{2} kx + v_0^3 \right)^{-1/3}.$$

Zrychlení  $\ddot{x}$  souvisí se silou  $F$  vztahem (viz kapitolu 2)  $F = m\ddot{x}$ . Tím je také určena síla  $F$ , již je nutno na hmotný bod (o hmotnosti  $m$ ) působit, aby měl pohyb požadované vlastnosti (1), resp. (3).

# Dynamika hmotného bodu

## 2.1 Základní zákony klasické mechaniky

Klasická mechanika je deduktivní věda o mechanickém pohybu těles založená na čtyřech základních axiómech. Jsou to obecná tvrzení získaná zobecněním empirických poznatků. Platnost těchto axiómů nelze a priori (předem) dokázat, jejich obecnou platnost ověřujeme dodatečně (a posteriori) tím, že veškeré jejich důsledky jsou v souladu s pozorováním.

K prvnímu z nich dospěl Galilei ve svém díle „Dialog o dvou světových systémech – Ptolemaiově a Koperníkově“ z roku 1632. Jedním z argumentů proti heliocentrické hypotéze Koperníkově byla námitka, že v důsledku denní rotace Země by například kámen vypuštěný na vrcholu věže nedopadl na Zemi u jejího úpatí a pohyb Země vzhledem k ovzduší by se projevoval stálou vichřicí na jejím povrchu. V myšlenkovém experimentu rozebral Galilei možné výsledky pozorování pohybu různých těles v uzavřené kabině lodi a dospívá k závěru, že tyto pohyby budou zcela stejné, ať je loď v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu; tento závěr pak aplikuje i na zmíněné pohyby na zemském povrchu. Dnes uvedené tvrzení pokládáme za základní fyzikální princip, nazýváme ho *Galileiův princip relativity* a formulujeme ho takto:

Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech souřadnicových soustavách, které jsou navzájem v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

Newton ve svých *Principiích* zavedl představu absolutního prostoru a času a uvedl tři základní zákony, jimiž se řídí mechanický pohyb těles (která zde pokládáme za hmotné body zavedené v předchozí kapitole); dnes je nazýváme *Newtonovy pohybové zákony*. V českém překladu se nejčastěji setkáváme s jejich následujícím zněním:

### *První zákon – zákon setrvačnosti*

Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, dokud není vnějšími silami nuceno tento stav změnit.

### *Druhý zákon – zákon síly*

Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.

### *Třetí zákon – zákon akce a reakce*

Každá akce vyvolává stejně velkou reakci opačného směru, vzájemné síly mezi dvěma tělesy mají vždy stejnou velikost a opačný směr.

Všechny se vztahují na pohyby těles v absolutním čase a absolutním prostoru.

V tomto odstavci si nejdříve provedeme rozbor těchto zákonů a uvedeme jejich matematický zápis, ukážeme si, že platí jen ve vybraných souřadnicových soustavách a že splňují Galileiův princip relativity.

Jak jsme si uvedli v předchozí kapitole, zabývá se mechanika studiem, tedy popisem a objasňováním, mechanických pohybů těles. Východiskem pro objasnění těchto pohybů byl Newtonovi (podobně jako jeho předchůdcům) výběr jistých základních pohybů se stálými, neproměnnými charakteristikami a představa, že jejich změny, schopné nakonec objasnit celé bohatství pozorovaných pohybů, lze jednoznačně přiřadit nějakým příčinám.

A priori nelze rozhodnout, zda základním pohybovým stavem má být klid, rovnoměrný pohyb po kružnici, či nějaký jiný druh pohybu. To platí i pro Newtonovu volbu rovnoměrného přímočarého pohybu a jeho speciálního případu – klidu. Lze o ní jen říci, že vychází z kritického rozboru představ jeho předchůdců (zejména Aristotela a Galileia) a že její důsledky jsou v souladu s pozorováním.

První Newtonův zákon tedy definuje základní pohybový stav těles a příčinu jeho změn nazývá silou. *Síla* je vyjádřením interakce mezi tělesy, ke které dochází buď při jejich vzájemném dotyku (např. nárazem nebo třením), nebo bezdotykovým působením nějakého „silového centra“ (např. při působení Země na Měsíc). Pokud jde o výše uvedenou formulaci zákona setrvačnosti, je zarážející, že se nezmiňuje o rotačním pohybu těles, takže je obecně použitelná jen na pohyb hmotného bodu. Na základě rozboru různých vydání a překladů Newtonových Principií dospěli někteří badatelé k přesvědčení, že správný český překlad by měl znít:

„Každé těleso, které se nachází ve stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu v daném směru, setrvává ve svém stavu, ledaže je silami přinuceno jej změnit.“

Ten totiž vystihuje v nejstručnější podobě skutečnost, kterou Newton podrobně uvádí v komentářích k tomuto zákonu, že si při uvedeném pohybu těleso zachovává jak velikost a směr rychlosti translačního pohybu, tak velikost a směr rychlosti otáčení (úhlové rychlosti  $\omega$ ).

Za míru pohybového stavu tělesa zvolil Newton ve svém druhém pohybovém zákonu *hybnost*  $p$ , která je součinem *hmotnosti* tělesa  $m$  a okamžité rychlosti  $v$  (translačního pohybu jeho hmotného středu). V souladu s představami řeckých atomistů pokládal hmotnost za míru množství látky v tělese obsažené, úměrnou počtu stejnorodých atomů, z nichž se těleso skládá, chápal tedy hmotnost jako veličinu skalární. Rychlosti (a podobně i síly) určoval velikostí, směrem a smyslem a skládal je podle pravidla rovnoběžníka, to znamená, že

s nimi počítal jako s vektory. Vztah mezi hybností, hmotností a rychlostí můžeme tedy zapsat definičním vztahem

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} . \quad 2(1.1)$$

Označíme-li sílu jako  $\mathbf{F}$ , lze při vhodné volbě jednotek (např. v soustavě SI) zapsat druhý pohybový zákon rovnicí

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} ; \quad 2(1.2)$$

konstanta úměrnosti, která by podle slovního znění měla rovněž vystupovat v tomto vztahu, je pak totiž rovna jedné (připomeňme si, že v soustavě SI je jednotkou hmotnosti kilogram, jednotkou rychlosti metr za sekundu, jednotkou síly newton).

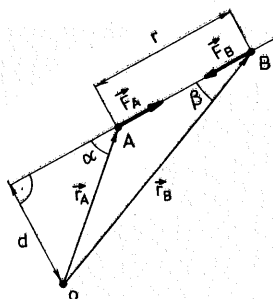
Podle původních atomistických představ byly nejmenší částice hmoty nejen dále nedělitelné, ale co do vlastností byly neměnné, takže například jejich hmotnost byla nezávislá na pohybovém stavu. Pokud zůstane počet částic v tělese obsažených během pohybu neměnný, měla by podle této představy být neměnná i hmotnost pohybuujícího se tělesa. Jak ukázaly moderní pokusy, je tato základní představa klasické fyziky velmi dobrým přiblížením ke skutečnosti v případě, že rychlost tělesa je velmi malá ve srovnání s rychlostí světla ve vakuu. Z rovnic 2(1.1) a 2(1.2) vyplývá, že

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} . \quad 2(1.3)$$

Omezíme-li se na běžné případy, kdy počet částic v tělese se s časem nemění, tj.  $dm/dt = 0$ , můžeme v rámci klasické fyziky místo rovnice 2(1.2) psát rovnici

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} . \quad 2(1.4)$$

Z ní vyplývá, že při neměnné síle  $\mathbf{F}$  je zrychlení  $\mathbf{a}$  sledovaného tělesa tím menší, čím větší je jeho hmotnost. Hmotnost vystupující v rovnici 2(1.4) je mírou



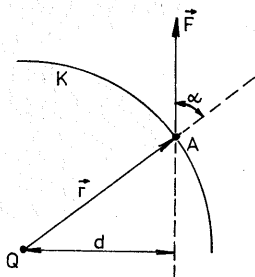
Obr. 2.1 Síly popisující interakci dvou hmotných bodů

setrvačnosti tělesa, tj. odporu, který klade pokusu o změnu jeho rychlosti. Proto tuto hmotnost nazýváme *hmotností setrvačnou*.

Příkladem vyjádření síly jako míry interakce mezi tělesy je Newtonův gravitační zákon (podrobněji viz kapitola 7). Máme-li dva hmotné body  $A$  a  $B$  (viz obr. (2.1)) s hmotnostmi  $m_A$  a  $m_B$ , jejichž vzdálenost je  $r$ , a označíme-li jednotkový vektor vedoucí od  $B$  k  $A$  jako  $\mathbf{e}_r$ , pak hmotný bod  $B$  působí na hmotný bod  $A$  silou  $\mathbf{F}$ , pro kterou podle gravitačního zákona platí

$$\mathbf{F} = -\alpha \frac{m_A m_B}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad 2(1.5)$$

Veličiny  $m_A$  a  $m_B$  jsou opět mírou množství látky obsažené v hmotných bodech  $A$  a  $B$  a nazýváme je *gravitační hmotnosti*. Ze všech dosud provedených měření vyplývá, že při použití stejných jednotek jsou zjištěné hodnoty setrvačné a gravitační hmotnosti daného tělesa v rámci chyb měření stejně velké, proto v dalším výkladu budeme hovořit jen o hmotnosti tělesa a nebudeme rozlišovat,



Obr. 2.2 K zavedení momentu síly a momentu hybnosti (viz text)

zda jde o hmotnost gravitační či setrvačnou.

Podle rovnic 2(1.2) a 2(1.4) jsou okamžitá rychlost změny hybnosti a okamžitě zrychlení sledovaného tělesa v čase  $t$  rovny síle, která v tomto čase na těleso působí. Tato síla obecně závisí na polohách a hybnostech interagujících těles. V dalších odstavcích bude ilustrováno na konkrétních případech, že  $\mathbf{F}$  lze zpravidla psát jako funkci času  $t$ , polohy  $\mathbf{r}$  a okamžité rychlosti  $\mathbf{v}$  sledovaného tělesa, tedy  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Z matematického hlediska je tedy pohyb těles určen diferenciálními rovnicemi druhého řádu.

Pro studium kruhového pohybu hmotného bodu – hmotného středu tělesa – je třeba upravit zápis druhého Newtonova pohybového zákona a zavést pojem momentu síly a momentu hybnosti vzhledem k nějakému bodu prostoru. Mějme například hmotný bod  $A$ , který se pohybuje po kružnici  $K$  a působí na něj síla  $\mathbf{F}$  – viz obr. 2.2. *Moment síly  $\mathbf{M}$*  vzhledem k bodu  $Q$  je definován vztahem

$$\mathbf{M} \equiv [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]. \quad 2(1.6)$$

Jeho velikost je rovna  $M = rF \sin \alpha = Fd$ , směr a smysl je dán pravidly vektorového součinu – viz D.4. Zavedeme-li analogicky k rovnici 2(1.6) *moment hybnosti* (zvaný též *točivost*)  $\mathbf{b}$  vzhledem ke  $Q$  vztahem

$$\mathbf{b} \equiv [\mathbf{r} \times \mathbf{p}], \quad 2(1.7)$$

lze snadno ukázat, že ke zkoumání rotačních pohybů používáme druhý Newtonův zákon ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}. \quad 2(1.8)$$

Vynásobíme-li totiž rovnici 2(1.2) zleva vektorově vektorem  $\mathbf{r}$ , dostaneme s využitím 2(1.6)

$$\left[ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = \mathbf{M};$$

platí

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{dt} &= \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times m\mathbf{v}] = m \frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \\ &= m \left\{ [\mathbf{v} \times \mathbf{v}] + \left[ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] \right\} = m \left[ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] = \left[ \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right], \quad 2(1.9) \end{aligned}$$

neboť součin  $[\mathbf{v} \times \mathbf{v}]$  je roven nulovému vektoru.

Sledujeme-li pohyby reálných těles, je vždy třeba řešit současně jak rovnici 2(1.2) nebo 2(1.4), tak rovnici 2(1.8) (přitom vzniká ovšem otázka, zda a jak lze reálnému tělesu připsat jediný polohový vektor  $\mathbf{r}$  a jediný vektor  $\mathbf{v}$ ). V této kapitole se budeme především zabývat pohyby hmotného bodu, kdy určení těchto vektorů je zcela zřejmé a stačí se omezit jen na rovnici 2(1.2) nebo 2(1.4).

Vraťme se znovu k rovnici 2(1.4) a uvažujme případ, kdy hmotný bod o hmotnosti  $m$  vystavíme jednou působení síly  $\mathbf{F}_1$ , která vyvolá jeho zrychlení  $\mathbf{a}_1$ , podruhé působení jiné síly  $\mathbf{F}_2$ , která vyvolá zrychlení  $\mathbf{a}_2$ , a postupujeme takto dále až k síle  $\mathbf{F}_n$  a zrychlení  $\mathbf{a}_n$ . Ptejme se, s jakým zrychlením se bude tento bod pohybovat za současného působení sil  $\mathbf{F}_1$  až  $\mathbf{F}_n$ . Žádný z dosud uvedených zákonů tuto otázku neřeší, neboť je například myslitelné, že by „zapnutí zdroje síly  $\mathbf{F}_2$ “ ovlivnilo buď „zdroj síly  $\mathbf{F}_1$ “, nebo způsob „přenosu“ síly  $\mathbf{F}_1$  z jejího „zdroje“ na hmotný bod tak, že by se tím původní síla  $\mathbf{F}_1$  změnila na nějakou jinou sílu  $\mathbf{F}'_1$ . Proto je třeba druhý Newtonův zákon doplnit tzv. *principem superpozice sil*, který vyplývá opět ze zkušenosti a tvrdí, že pohybové účinky několika současně působících sil jsou stejné jako účinek jediné síly dané jejich vektorovým součtem. Pro sílu  $\mathbf{F}$ , vystupující na pravých stranách rovnic

2(1.2) a 2(1.4) tedy platí, že je vektorovým součtem (výslednicí) všech sil působících na těleso

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i . \quad 2(1.10)$$

Z tohoto principu a druhého Newtonova zákona aplikovaného na působení jednotlivých sil dílčích pak plyne, že výsledná změna hybnosti či zrychlení je dána vektorovým součtem dílčích změn hybností či zrychlení, neboli

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \quad 2(1.11)$$

či

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i . \quad 2(1.12)$$

Pak druhý Newtonův zákon vyjadřuje i tzv. *zákon skládání pohybů*, podle kterého výsledný pohyb tělesa, vykonávaný pod vlivem síly  $\mathbf{F}$  je (v daném smyslu) součtem pohybů, které by vykonalo působením jednotlivých sil dílčích, bez ohledu na jejich pořadí (vektorový součet je komutativní).

Třetí Newtonův pohybový zákon lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} , \quad 2(1.13)$$

kde  $\mathbf{F}_{12}$  je síla, kterou působí těleso 2 na těleso 1,  $\mathbf{F}_{21}$  je síla, kterou působí těleso 1 na těleso 2. Přitom předpokládáme, že vektorové přímky obou sil splývají (viz obr. (2.1), kde  $\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_{12}$ ,  $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_{21}$ ), ačkoli samotná rovnice 2(1.13) by připouštěla možnost, že jsou jen rovnoběžné. Podle tohoto zákona je akce vždy, a tedy i v každém okamžiku, rovna reakci. Protože tento zákon platí pro všechny silové interakce objektů včetně působení „silového centra“ a protože absolutní čas je ve všech bodech absolutního prostoru týž, znamená to, že např. náhlá změna v poloze nějaké hvězdy se současně projeví jako změna jejího gravitačního působení na všechny ostatní hmotné objekty ve vesmíru bez ohledu na to, jak jsou od ní vzdáleny. Kdybychom si představili, že při změně polohy hvězdy dojde k vyslání „silového signálu“ o této změně, pak z předchozího vyplývá, že se podle druhého zákona tento signál šíří prostorem nekonečně rychle. Dnes již víme, že žádný „silový signál“ se nemůže šířit rychlostí vyšší, než je rychlost světla ve vakuu (viz kapitola 12). Ukazuje se však, že Newtonovy zákony popisují s dostatečnou přesností pohyb těles, jejichž rychlost je malá ve srovnání s rychlostí světla a která se všechna nacházejí v tak malé oblasti prostoru, že v ní lze silovou interakci pokládat s dostatečnou přesností za okamžitou.

Newtonovy pohybové zákony platí jen tehdy, pokud pohyb těles vyjádříme ve „správných“ souřadnicových soustavách. Mějme například dva hmotné

body  $A$  a  $B$  interagující podle gravitačního zákona 2(1.5), obr. (2.1), a zvolme souřadnicovou soustavu tak, že její počátek položíme do bodu  $A$  a jednu souřadnicovou osu do spojnice obou bodů. V této soustavě je zrychlení  $\mathbf{a}_A$  bodu  $A$  stále nulové (je stále v počátku), vzhledem k předpokládané silové interakci je podle druhého Newtonova zákona zrychlení  $\mathbf{a}_B$  bodu  $B$  nenulové; podle téhož zákona by mělo platit  $\mathbf{F}_A = \mathbf{0}$  (bod  $A$  je v klidu), zatímco podle třetího zákona musí být  $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B = -m_B \mathbf{a}_B \neq \mathbf{0}$ .

Kdybychom počátek souřadnicové soustavy položili do bodu  $B$ , rozpor tím zřejmě neodstraníme. Je tedy třeba zvolit soustavu souřadnic nezávislou na hmotných bodech a i čas určit nezávisle na jejich pohybu – takto lze dospět k představám o absolutním prostoru a absolutním čase. Vyjdeme-li z předpokladu jejich existence, lze „správnou“ soustavu souřadnic zvolit na základě následující úvahy. Představme si absolutní prostor a v něm jediný hmotný bod. Tento bod, na který nepůsobí žádné síly, neboť nemá s čím interagovat, nazveme *volný hmotný bod*. Souřadnicové soustavy, vůči kterým je volný hmotný bod v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, nazveme *inerciální souřadnicové soustavy* (ostatní soustavy nazveme *neinerciální*). Inerciální soustavy jsou vůči sobě buď v klidu, nebo rovnoměrném přímočarém pohybu. Platí v nich zřejmě zákon setrvačnosti a podle Newtona i zákon síly a zákon akce a reakce.

Podají-li se nám ve Vesmíru najít tři hmotná tělesa, která neleží na jedné přímce a která lze s dostatečnou přesností považovat za volné hmotné body, můžeme s nimi spojit souřadnicovou soustavu, která bude s touto přesností soustavou inerciální. Z experimentálního studia interakce těles víme, že síly mezi nimi působící klesají s jejich rostoucí vzájemnou vzdáleností. Zadáme-li předem požadovanou přesnost (ať již s ohledem na povahu řešené úlohy nebo mezní přesnost existujících měřicích zařízení), můžeme určit, jak musí být tělesa od sebe vzdálena, aby je bylo možné považovat za volné hmotné body. S vysokou přesností lze za ně pokládat stálice v naší Galaxii, jejichž průměrná vzájemná vzdálenost je  $\cong 10^{16}$  m. Proto souřadnicovou soustavu s počátkem ve Slunci (přesněji ve středu hmotnosti naší sluneční soustavy, viz kapitola 5) a osami směřujícími ke stálicím pokládáme za inerciální a nazýváme *soustavou Galileiovou*. Souřadnicová soustava s počátkem ve Slunci, jednou osou směřující do středu Země a druhou ležící v rovině oběžné dráhy Země kolem Slunce, se vůči soustavě Galileiově otáčí, pohybuje se tedy se zrychlením, a není soustavou inerciální. Na povrchu Země nabývá toto zrychlení hodnoty, jejíž přibližnou velikost snadno odhadneme. Pokládejme Zemi za hmotný bod (poloměr Země  $R_Z \cong 6,4 \cdot 10^6$  m, vzdálenost Země–Slunce  $R \cong 1,5 \cdot 10^{11}$  m) a předpokládejme, že vykonává vzhledem ke Slunci rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru  $R$ . Za rok, tj. asi  $3 \cdot 10^7$  s, opíše její polohový vektor úhel  $2\pi$ , takže úhlová rychlost tohoto pohybu je  $\omega \cong 2\pi/3 \cdot 10^7 \cong 2 \cdot 10^{-7}$  rad s<sup>-1</sup>. Za uvedených předpokladů ( $dR/dt = 0$ ,  $d\varphi/dt \equiv \omega = \text{konst}$ ) dostáváme pro



velikost odstředivého zrychlení  $a = \omega^2 R \cong 6 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ . Zrychlení této velikosti je možné v řadě případů zanedbat — je například 1 600krát menší než velikost průměrného tíhového zrychlení na povrchu Země. Často lze dokonce s postačující přesností přijmout za inerciální i soustavu pevně spojenou se Zemí, tzv. *soustavu laboratorní*. Spočítáme-li obdobným způsobem velikost zrychlení vyvolaného denní rotací Země kolem její osy, zjistíme, že je přibližně rovna  $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ , a je tedy téměř 300krát menší než velikost průměrného zrychlení tíhového na povrchu Země.

V soustavách neinerciálních Newtonovy zákony neplatí. Sledujeme-li v neinerciální soustavě  $S'$  pohyb hmotného bodu s hmotností  $m$ , polohovým vektorem  $\mathbf{r}'$ , okamžitou rychlostí  $\mathbf{v}'$  a okamžitým zrychlením  $\mathbf{a}'$ , vystaveného působení výsledné síly interakce mezi tímto bodem a ostatními tělesy  $\mathbf{F}$ , pak obecně zjistíme, že

$$m\mathbf{a}' \neq \mathbf{F}. \quad 2(1.14)$$

Lze však určit takovou sílu  $\mathbf{F}'$ , že platí

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'. \quad 2(1.15)$$

Představme si, že kromě neinerciální soustavy  $S'$  máme ještě inerciální soustavu  $S$ , ve které náš hmotný bod má polohový vektor  $\mathbf{r}$ , okamžitou rychlost  $\mathbf{v}$  a okamžité zrychlení  $\mathbf{a}$ . Protože počátky  $O$  a  $O'$  soustav  $S$  a  $S'$  obecně nesplývají, platí

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \mathbf{r}', \quad 2(1.16)$$

kde  $\mathbf{q}$  je polohový vektor počátku  $O'$  soustavy  $S'$  vzhledem k soustavě  $S$ ; přitom bude platit (viz rovnici 1(2.1))

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{q} = q_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}' = x'_i \mathbf{e}'_i. \quad 2(1.17)$$

Zderivujeme-li rovnici 2(1.16) podle času, zjistíme, že platí

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_u + \mathbf{v}'. \quad 2(1.18)$$

Rychlost  $\mathbf{v}_u$  nazýváme *rychlost unášivá*. Využijeme-li rovnice 2(1.17), zjistíme, že

$$\mathbf{v}_u = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'], \quad 2(1.19)$$

$$\mathbf{v}_{O'} = \dot{q}_i \mathbf{e}_i, \quad 2(1.20)$$

$$[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'] = x'_i \dot{\mathbf{e}}'_i. \quad 2(1.21)$$

Unášivá rychlost je tedy součtem okamžité rychlosti počátku  $O'$  vzhledem k soustavě  $S$  a rychlosti  $[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']$  souvisící s vektorem  $\boldsymbol{\omega}$  úhlové rychlosti otáčení  $S'$  vzhledem k  $S$ . Obdobně zjistíme, že platí

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}', \quad 2(1.22)$$

kde *unášivé zrychlení*  $\mathbf{a}_u$  souvisí se zrychlením  $\mathbf{a}_{O'}$  počátku  $O'$  a vektory úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}$  a úhlového zrychlení  $\boldsymbol{\varepsilon}$  soustavy  $S'$  vzhledem k  $S$  vztahem

$$\mathbf{a}_u = \mathbf{a}_{O'} + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'] . \quad 2(1.23)$$

K určení síly  $\mathbf{F}'$  vystupující v rovnici 2(1.15) vyjádříme nejdříve z rovnice 2(1.22) vektor  $\mathbf{a}'$  a vzniklý vztah vynásobíme hmotností  $m$  uvažovaného bodu (která je v  $S$  i  $S'$  stejná).

Dostaneme

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_u = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s , \quad 2(1.24)$$

kde *setrvačná síla*  $\mathbf{F}_s$  je definována vztahem

$$\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}_u . \quad 2(1.25)$$

Vidíme, že v neinerciálních soustavách je možné vyjádřit vztah mezi okamžitým zrychlením hmotného bodu a působící silou rovnicí 2(1.15), analogickou druhému Newtonovu zákonu, pokud výslednou sílu  $\mathbf{F}'$  vypočteme podle 2(1.24) jako součet síly interakce  $\mathbf{F}$  mezi hmotným bodem a ostatními tělesy a síly setrvačné  $\mathbf{F}_s$ . Z rovnic 2(1.25) a 2(1.23) plyne, že setrvačná síla se obecně skládá ze čtyř příspěvků. V praktických případech, kdy zkoumáme pohyb těles v laboratorní souřadnicové soustavě takové, že její počátek  $O'$  je ve středu hmotnosti Země a jejíž osy jsou pevně spojeny se Zemí tak, že jedna z nich splývá s osou denní zemské rotace, je zpravidla možné se omezit na příspěvky dva: *sílu odstředivou*  $\mathbf{F}_{OD}$

$$\mathbf{F}_{OD} = -m[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']] \quad 2(1.26)$$

a *sílu Coriolisovu*  $\mathbf{F}_C$

$$\mathbf{F}_C = -2m[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']; \quad 2(1.27)$$

jim odpovídající zrychlení byla již popsána v odstavci (1.3). Odstředivá síla působí v této neinerciální soustavě na všechny body, které neleží na ose denní zemské rotace, a to bez ohledu na to, jsou-li vůči Zemi v klidu či v pohybu; na základě 2(1.26) snadno zjistíme, že odstředivá síla *nesměřuje* obecně od středu Země. Síla Coriolisova působí jen na ty hmotné body, které se vůči Zemi pohybují tak, že jejich rychlost  $\mathbf{v}'$  není rovnoběžná s osou denní rotace. Důsledkem působení Coriolisovy síly je mimo jiné vírový pohyb proudících vzdušných mas v zemské atmosféře nebo skutečnost, že kámen volně padající z věže se nebude pohybovat po svislici.

Síla  $\mathbf{F}$  působící na hmotný bod v důsledku jeho interakce s jinými hmotnými tělesy bývá někdy označována jako síla skutečná, zatím co síla  $\mathbf{F}_s$  (projevující se i tehdy, nezmění-li se počet či konfigurace hmotných objektů interagujících s daným bodem) jako síla zdánlivá. Toto označení není šťastné, neboť setrvačná

síla mění zcela reálně – a ne jen zdánlivě – pohybový stav těles v neinerciálních soustavách (vzpomeňme třeba sílu odstředivou v pohybujících se dopravních prostředcích). V rámci klasické fyziky plyne existence setrvačných sil ze zákona setrvačnosti platného vzhledem k silám interakce mezi hmotnými objekty v soustavách inerciálních a lze ji chápat jako důsledek vlivu absolutního prostoru na hmotné objekty. Skutečnost, že absolutní prostor by takto ovlivňoval pohyb těles a přitom sám nebyl jejich přítomností a pohybem ovlivňován, je v rozporu se základní představou, že každé silové působení je „oboustranné“; je proto vážnou apriorní námitkou proti jeho existenci.

## 2.2 Pohybové rovnice

Druhý Newtonův pohybový zákon je vektorovou rovnicí, kterou při výpočtech rozepisujeme do soustavy tří rovnic skalárních. V kartézské soustavě souřadnic s vektory báze označenými  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  tuto soustavu zapisujeme ve tvaru

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad 2(2.1)$$

Nemění-li se hmotnost tělesa s časem, píšeme soustavu 2(2.1) v některé z následujících ekvivalentních podob

$$ma_i = F_i, \quad 2(2.2)$$

$$m \frac{dv_i}{dt} = F_i, \quad 2(2.3)$$

$$m \frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i \quad (\text{vždy } i = 1, 2, 3). \quad 2(2.4)$$

Trojici rovnic soustav 2(2.2) až 2(2.4) nazýváme *pohybové rovnice* hmotného bodu.

V dalším budeme předpokládat, že platí

$$F_i = F_i(t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad 2(2.5)$$

že tedy souřadnice vektoru  $\mathbf{F}$  nezávisí na žádné jiné veličině než na čase  $t$  a souřadnicích polohového vektoru a okamžité rychlosti tělesa. Pak 2(2.4) je soustavou tří diferenciálních rovnic druhého řádu vzhledem k souřadnicím  $x_i$ . Jejím řešením jsou tři funkce

$$x_i = x_i(t) \quad 2(2.6)$$

takové, že splňují rovnice soustavy. Aby tyto funkce měly smysl parametrických rovnic dráhy, musí být  $x_i(t)$  diferencovatelnými spojitými reálnými funkcemi času. Při výpočtu postupujeme zpravidla tak, že místo 2(2.4) řešíme následující soustavu šesti diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i, \quad 2(2.7a)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad 2(2.7b)$$

kde

$$f_i \equiv \frac{F_i}{m} \quad (\text{vždy } i = 1, 2, 3). \quad 2(2.7c)$$

Nejdříve vyřešíme tři rovnice 2(2.7a) a jako řešení dostaneme tři funkce

$$v_i = v_i(t, x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad 2(2.8)$$

Dosadíme-li z 2(2.8) do zbývajících tří rovnic 2(2.7b), získáme rovnice dráhy 2(2.6). Přitom požadujeme, aby ze znalosti polohy  $\mathbf{r}_0$  a hybnosti  $\mathbf{p}_0$ , respektive rychlosti  $\mathbf{v}_0$  hmotného bodu (obecně tělesa) v jistém čase  $t_0$  a znalosti rovnic 2(2.5) pro souřadnice síly bylo možné jednoznačně určit jeho další pohyb v časech  $t > t_0$ . V matematice se dokazuje, že platí následující tvrzení:

Jsou-li funkce  $v_i$  a  $f_i$  jednoznačnými funkcemi svých argumentů, jsou-li spojitě pro všechny hodnoty  $t, x_i, v_i$  blízké k  $t_0, x_{0i}, v_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a mají-li spojitě parciální derivace prvního řádu podle  $x_i$  a  $v_i$ , pak existuje právě jedno řešení soustavy 2(2.7) dané rovnicemi 2(2.6) a 2(2.8) vyhovující počátečním podmínkám

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \quad v_i(t_0) = v_{0i}. \quad 2(2.9)$$

V dalším výkladu se setkáme vždy jen s takovými funkcemi  $v_i$  a  $f_i$ , které uvedené podmínky splňují, takže dostaneme vždy jedno řešení.

Ilustrujme si řešení pohybových rovnic na příkladu střely vystřelené ze zemského povrchu šikmo vzhůru, tj. na příkladu tzv. *šikmého vrhu*. K tomu, aby jej bylo možné řešit, je nezbytné úlohu zjednodušit, zidealizovat, to znamená mimo jiné seřadit všechna možná silová působení podle jejich velikosti a omezit se zpravidla jen na jedno z nich, relativně největší. Získané řešení je pak ovšem jen řešením přibližným. Zavedme si tedy následující zjednodušující předpoklady:

1. střelu lze pokládat za hmotný bod (neboť lze odhlédnout od jejích rozměrů, tvaru a rotačního pohybu),
2. pohyb se odehrává ve vzduchoprázdnu, a není tedy třeba uvažovat pohyb vzduchu vůči střele a odpor, který klade jejímu pohybu,

3. pohyb střely je omezen na tak malou oblast prostoru, že v ní lze tíhové zrychlení pokládat za konstantní a plochu zemského povrchu nahradit geometrickou rovinou,
4. soustava souřadnic, která je vůči takovému zemskému povrchu v klidu či rovnoměrném přímočarém pohybu, je soustava inerciální.

Za těchto předpokladů působí na sledovaný hmotný bod  $A$  s hmotností  $m$  jen tíha  $\mathbf{G}$ , pro kterou – jak známo – platí

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} ; \quad 2(2.10)$$

konstantní vektor  $\mathbf{g}$  tíhového zrychlení směřuje vždy kolmo k rovině zemského povrchu. Označme okamžik výstřelu  $t_0$  a zvolme inerciální kartézskou soustavu souřadnic  $S = \{P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  v obecné poloze tak, že platí

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) , \quad 2(2.11)$$

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 = (v_{01}, v_{02}, v_{03}) , \quad 2(2.12)$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad 2(2.13)$$

a souřadnice uvedených vektorů jsou nenulové. Vzhledem k 2(2.7c) a 2(2.10)

$$\frac{dv_i}{dt} = g_i , \quad i = 1, 2, 3 . \quad 2(2.14)$$

Protože  $g_i$  jsou konstanty, zjistíme, že platí

$$v_i = g_i(t - t_0) + v_{0i} , \quad 2(2.15)$$

a po dosazení do 2(2.7b) dostaneme

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t - t_0) + v_{0i} \quad 2(2.16)$$

s řešením ( $v_{0i}$  jsou konstanty)

$$x_i = \frac{1}{2} g_i(t - t_0)^2 + v_{0i}(t - t_0) + x_{0i} \quad (\text{vždy } i = 1, 2, 3) . \quad 2(2.17)$$

Výpočet se zjednoduší, zvolíme-li polohu souřadnicové soustavy s ohledem na zadání úlohy. V našem případě by bylo např. vhodné zvolit jednu ze souřadnicových os (třeba osu  $z$ ) tak, aby byla kolmá k zemskému povrchu a směřovala vzhůru. Pak

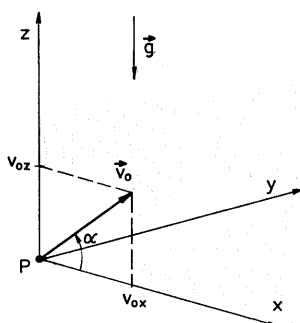
$$\mathbf{f} = (0, 0, -g) . \quad 2(2.18)$$

Odečítání času začneme v okamžiku výstřelu, takže

$$t_0 = 0 ; \quad 2(2.19)$$

počátek souřadnicové soustavy položíme do místa výstřelu, takže bude platit

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0) . \quad 2(2.20)$$



Obr. 2.3 Poloha kartézské souřadnicové soustavy výhodná pro popis šikmého vrhu

Vektor počáteční rychlosti  $\mathbf{v}_0$  určuje spolu s osou  $z$  v prostoru jistou rovinu, do které položíme druhou souřadnicovou osu, např. osu  $x$  – viz obr. 2.3. Pak bude platit

$$\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z}) . \quad 2(2.21)$$

Nulové souřadnice vektorů  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  zjednodušují výpočet. Snadno např. nahlédneme, že nyní stačí vyšetřovat pohyb jen v rovině určené osami  $x$  a  $z$ . Ve směru osy  $y$  se bod  $A$  pohybovat nebude, neboť v čase  $t = 0$  byl v tomto směru v počátku ( $y_0 = 0$ ) a klidu ( $v_{0y} = 0$ ) a nepůsobila na něj žádná síla ( $f_y = 0$ ). K určení rychlosti máme tedy nyní rovnice

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 , \quad 2(2.22a)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g \quad 2(2.22b)$$

s řešením

$$v_x = v_{0x} , \quad 2(2.23a)$$

$$v_z = -gt + v_{0z} \quad 2(2.23b)$$

a k určení parametrických rovnic dráhy vztahy

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}, \quad 2(2.24a)$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + v_{0z} \quad 2(2.24b)$$

s řešením ( po přihlédnutí k 2.(2.20))

$$x = v_{0x}t, \quad 2(2.25a)$$

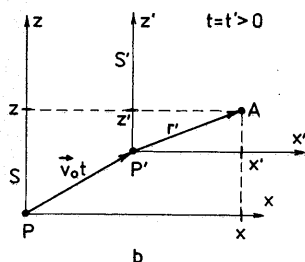
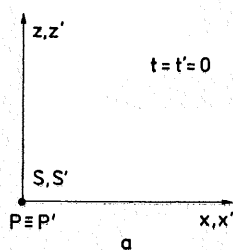
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \quad 2(2.25b)$$

příčemž vždy

$$y = 0. \quad 2(2.26)$$

Uvedené řešení má fyzikální smysl jen pro časy  $0 \leq t \leq t^*$ , kde  $t^*$  je okamžik dopadu střely. Protože jsme předpokládali, že zemský povrch je dán rovinou  $z = 0$ , pak z podmínky

$$z(t^*) = 0 \quad 2(2.27)$$



Obr. 2.4 K popisu pohybu hmotného bodu ve dvou navzájem se pohybujících kartézských soustavách (viz text)

a rovnice 2(2.25b) dostaneme

$$t^* = \frac{2v_{0z}}{g} . \quad 2(2.28)$$

Protože  $g$  je kladné, musí být kladné i  $v_{0z}$ . Protože však při daném vektoru počáteční rychlosti  $\mathbf{v}_0$  a elevačním úhlu  $\alpha$  (viz obr. 2.3) je

$$v_{0z} = v_0 \cdot \sin \alpha \quad 2(2.29)$$

a  $\alpha$  může nabývat jen hodnot  $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ , je  $v_{0z} > 0$  jen tehdy, když  $v_0 > 0$  a  $\alpha \in (0, \pi)$ .

Představme si, že bychom měli uloženo najít řešení téže úlohy v kartézské soustavě  $S' = \{P', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  takové (viz obr. 2.4), že v čase  $t = 0$  soustavy  $S$  a  $S'$  splývají (obr. 2.4a) a pro  $t > 0$  zůstávají jejich osy navzájem rovnoběžné, zatímco  $P'$  bude vůči  $S$  vykonávat rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí  $\mathbf{v}_0$  (obr. 2.4b). K řešení se nabízejí dvě cesty:

Podle první z nich vyjdeme ze známých parametrických rovnic dráhy bodu  $A$  v soustavě  $S$  (rovnice 2(2.25)) a skutečnosti, že mezi jeho souřadnicemi v soustavách  $S$  a  $S'$  platí

$$y = y' ; \quad x = x' + v_{0x}t ; \quad z = z' + v_{0z}t . \quad 2(2.30)$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnic 2(2.25) dostaneme vztahy

$$x' = 0 ; \quad y' = 0 ; \quad z' = -\frac{1}{2}gt^2 , \quad 2(2.31)$$

podle kterých v soustavě  $S'$  vykonává hmotný bod volný pád ze stavu klidu v počátku  $P'$ .

Druhá cesta vychází ze skutečnosti, že  $S$  a  $S'$  jsou vázány Galileiovou transformací, a podle Galileiova principu relativity platí tedy v  $S'$  stejné fyzikální zákony jako v  $S$ . Platí tedy v  $S'$  (analogicky k rovnicím 2(2.22))

$$\frac{dv'_x}{dt} = 0 , \quad \frac{dv'_z}{dt} = -g , \quad 2(2.32)$$

ovšem se změněnými počátečními podmínkami

$$\mathbf{r}'_0 = (0, 0, 0) , \quad 2(2.33)$$

$$\mathbf{v}'_0 = (0, 0, 0) . \quad 2(2.34)$$

Řešení je pak analogické rovnicím 2(2.25) a po dosazení nových počátečních podmínek opět dospějeme ke vztahům 2(2.31); oba způsoby řešení vedou v tomto případě ke stejnému výsledku.



## 2.3 Práce

Vyjadřujeme-li pomocí pohybových rovnic pohyb nějakého tělesa, zjišťujeme na jedné straně, že nelze přihlídnout k jeho interakci se všemi hmotnými objekty ve Vesmíru, na druhé straně lze často dospět k dostatečně přesnému řešení, jestliže výraz pro výslednou sílu na těleso působící zahrne jeho interakci jen s několika málo – zpravidla blízkými – hmotnými objekty. Tak např. často postačí vyšetřovat roční pohyb Země kolem Slunce tak, jakoby v celém Vesmíru byla přítomna jen tato dvě tělesa. Abstrakcí dospíváme k pojmu *izolované soustavy těles* jako takové jejich skupiny, která není vystavena silovému působení z vnějšku a v níž pohyb každého tělesa je ovlivňován jen jeho interakcí s ostatními tělesy soustavy; speciálním případem izolované soustavy je volný hmotný bod. V inerciálních soustavách souřadnic se absolutní prostor jeví jako homogenní a izotropní, absolutní čas jako homogenní. Při studiu pohybu v izolovaných soustavách se tyto vlastnosti projevují v podobě zákona zachování energie (homogenita času), hybnosti (homogenita prostoru) a momentu hybnosti (izotropie prostoru). Ve zbývajících částech této kapitoly zavedeme pojmy nutné k jejich formulaci.

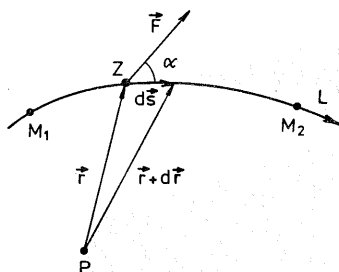
Ke studiu obecných prostorových zákonitostí pohybu je užitečné nejdříve zavést pojem silového pole. Představme si, že máme dva hmotné body  $A$  a  $B$  s hmotnostmi  $m_A$  a  $m_B$ , které spolu gravitačně interagují. Síla  $\mathbf{F}$ , kterou působí bod  $B$  na bod  $A$ , je dána vztahem 2(1.5)

$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{m_A m_B}{r^2} \mathbf{e}_r .$$

Tato rovnice je předpisem, podle kterého můžeme každému bodu prostoru, do kterého bychom umístili bod  $A$  (s výjimkou bodu s  $r = 0$ , kde se nachází bod  $B$ ), přiřadit trojici reálných čísel, souřadnice vektoru  $\mathbf{F}$ . Oblast, ve které každému bodu můžeme přiřadit trojici reálných čísel, nazveme *vektorovým polem*, vektorové pole příslušné síle nazveme *silovým polem*.

V uvedeném případě dvou hmotných bodů můžeme např. říci, že bod  $B$  vytváří silové pole síly  $\mathbf{F}$ , které působí na bod  $A$  a vyvolává změnu jeho pohybového stavu. Stejně tak ovšem můžeme bod  $A$  pokládat za „zdroj“ silového pole síly  $(-\mathbf{F})$  vyvolávající změny pohybového stavu bodu  $B$ . V důsledku gravitační interakce se oba body budou zřejmě pohybovat vzhledem k inerciální soustavě souřadnic, a budou se tedy pohybovat i silová pole. Vůči pevnému bodu prostoru bude silové pole časově závislé. Vezmeme-li za bod  $A$  Zemi, za bod  $B$  Slunce, snadno nahlédneme (a lze to i přesně spočítat), že změna polohy Slunce vyvolaná gravitační interakcí se Zemí bude velmi malá oproti změně polohy Země. V této a podobných situacích můžeme pak při vyšetřování pohybu obou těles s postačující přesností považovat jedno z nich (hmotný bod  $B$ ,

Slunce) za nehybný „zdroj“ pole síly  $\mathbf{F}$ , působící na druhé, pohybující se těleso (hmotný bod  $A$ , Zemi). Jestliže pohybový stav pohybujícího se tělesa nebude ovlivňovat ani jiné charakteristiky „zdroje“ pole, můžeme pak se „zdrojem“



Obr. 2.5

svázat přibližně inerciální soustavu souřadnic a silové pole působící na pohybující se těleso bude nezávislé na čase; takovými poli, ve kterých  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , se budeme nyní zabývat.

Pro zjištění vlastností časově neproměnného silového pole vzhledem k obecným pohybům použijeme jako sondy myšlený hmotný bod  $Z$  o hmotnosti  $m$ , který budeme v poli podle vlastního uvážení posunovat a přitom zjišťovat, jaká síla  $\mathbf{F}$  na něj působí v bodě s polohovým vektorem  $\mathbf{r}$ . Tak získáme o silovém poli informace, které odpovídají pravé straně rovnice 2(1.2)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Zároveň budeme zkoumat, jak se zjištěné vlastnosti silového pole projeví na pohybovém stavu skutečného hmotného bodu  $A$  s touž hmotností  $m$ . Tuto informaci nám poskytne levá strana uvedené rovnice.

Mějme dáno silové pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , zvolme v něm dva pevné body  $M_1$  a  $M_2$  a libovolnou orientovanou křivku  $L$  procházející body  $M_1$  a  $M_2$  jako dráhu, po níž budeme posunovat myšlený bod  $Z$  (viz obr. 2.5). *Elementární práci*  $dA$  silového pole při elementárním posuvu bodu  $Z$  o  $d\mathbf{s}$  definujeme vztahem

$$dA = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{s}| \cdot \cos \alpha. \quad 2(3.1)$$

Je-li síla vyjádřena v newtonech a dráha v metrech, je práce vyjádřena v joulech (J).

Elementární práce je nulová, když buď alespoň jedna z veličin  $|\mathbf{F}|$  a  $|d\mathbf{s}|$  je nulová, nebo když nenulová síla svírá s nenulovým posunutím pravý úhel. V dalším budeme předpokládat, že  $|\mathbf{F}|$  i  $|d\mathbf{s}|$  jsou nenulové. Elementární práce bude kladná (budeme říkat, že silové pole vykonává při posuvu  $Z$  o  $d\mathbf{s}$  práci

$dA > 0$ ), bude-li úhel  $\alpha$  ostrý. Pokud  $\alpha$  bude tupý úhel, bude  $dA$  záporné. Výsledná práce  $A_{21}$  silového pole příslušná posuvu  $Z$  po dráze z  $M_1$  do  $M_2$  je dána rovnicí

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) . \quad 2(3.2)$$

Pokud by  $Z$  proběhl stejný úsek dráhy v obráceném smyslu, tj. od  $M_2$  k  $M_1$ , pak by se změnilo při dané orientaci  $L$  znaménko u  $d\mathbf{s}$  a platilo by tedy

$$A_{12} = \int_{L(M_2)}^{L(M_1)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = - \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = -A_{21} . \quad 2(3.3)$$

V případě, že rovnice křivky  $L$  je dána parametry tak, že pro polohový vektor jejich bodů platí

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q) , \quad 2(3.4)$$

kde  $q$  je parametr, máme

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(q)) = \mathbf{F}(q) \quad 2(3.5)$$

a

$$d\mathbf{r} = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dq} \right) \cdot dq , \quad 2(3.6)$$

takže

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) = \int_{q_1}^{q_2} \left[ F_x \cdot \frac{dx}{dq} + F_y \cdot \frac{dy}{dq} + F_z \cdot \frac{dz}{dq} \right] dq ; \quad 2(3.7)$$

$q_1$  a  $q_2$  jsou hodnoty parametru odpovídající polohám  $M_1$  a  $M_2$ .

Speciálně může být parametr  $q$  roven času  $t$ . Pak místo 2(3.7) dostaneme

$$A_{21} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{dA}{dt} \right) dt ; \quad 2(3.8)$$

člen na pravé straně této rovnice přitom vychází z definice  $A_{21}$  jako integrálu z  $dA$  a jeho „rozšíření“ výrazem  $dt/dt$ .

Časovou derivaci  $A$  označujeme  $P$  a nazýváme *okamžitý výkon*

$$P \equiv \frac{dA}{dt} ; \quad 2(3.9)$$

jednotkou výkonu je watt (W). Z 2(3.8) plyne, že platí

$$P = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) . \quad 2(3.10)$$

Pokud je tedy například vektor síly kolmý na vektor rychlosti, je výkon nulový; pokud toto platí pro všechny polohy mezi  $M_1$  a  $M_2$ , je nulová i práce  $A_{21}$ . Obecně však bude  $A_{21} \neq 0$  a její hodnota bude záviset na tvaru uvažované křivky  $L$ , polohách bodů  $M_1$ ,  $M_2$  a na orientaci pohybu.

Zvolme nyní křivku  $L$  tak, aby svým tvarem a orientací odpovídala skutečné dráze reálného hmotného bodu  $A$  v daném silovém poli. Sledujme, jak se práce silového pole projeví na pohybovém stavu bodu  $A$ . Rovnici 2(3.1) přepíšeme na tvar

$$dA = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{s} \right). \quad 2(3.11)$$

Protože máme

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$$

a při konstantní hmotnosti bodu  $A$  dále platí

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

dostaneme

$$\begin{aligned} dA &= \left( m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \right) = m(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) = \frac{1}{2} m d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{2} m d(v^2) = d\left( \frac{1}{2} mv^2 \right). \end{aligned} \quad 2(3.12)$$

Kinetickou energii  $W_k$  hmotného bodu zavedeme vztahem

$$W_k \equiv \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}. \quad 2(3.13)$$

Pak z 2(3.12) plyne

$$dA = dW_k. \quad 2(3.14)$$

Elementární práce  $dA$  silového pole je tedy rovna elementární změně  $dW_k$  kinetické energie  $W_k$  hmotného bodu  $A$ , pohybujícího se v poli po skutečné dráze, která plyne z druhého Newtonova pohybového zákona; základní jednotka kinetické energie je totožná se základní jednotkou práce, joulem.

Platí

$$\int_{L(M_1)}^{L(M_2)} dW_k = [W_k]_{M_1}^{M_2} = \frac{1}{2} m(v_2)^2 - \frac{1}{2} m(v_1)^2 \equiv \Delta W_k, \quad 2(3.15)$$

kde  $v_2$  a  $v_1$  jsou rychlosti hmotného bodu v koncovém a počátečním bodě dráhy a jako  $\Delta W_k$  jsme označili rozdíl odpovídajících kinetických energií.

Máme tedy celkem

$$\Delta W_k = A_{21}; \quad 2(3.16)$$

rozdíl kinetických energií hmotného bodu v koncovém a počátečním bodě dráhy je v silovém poli  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  (jen do té míry „rozumném“, že lze spočítat integrál z  $(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})$ ) roven práci pole po dráze hmotného bodu. Význam tohoto tvrzení vyplyne z dalšího výkladu, k výpočtu  $\Delta W_k$  se rovnice 2(3.16) nehodí. Museli bychom totiž v daném silovém poli zjistit z pohybových rovnic a počátečních podmínek tvar dráhy hmotného bodu (a jako první krok tedy rychlost v každém bodě dráhy) a pak další integrací vypočítat  $A_{21}$ .

Vezměme opět myšlený bod  $Z$  a pohybujeme jím v daném silovém poli tak, že se po určité době navrátí do výchozího bodu  $M_1$  své dráhy. Pokud by se pohyboval po části křivky  $L$  z  $M_1$  do  $M_2$  a pak po téže křivce zpět z  $M_2$  do  $M_1$ , byla by podle rovnic 2(3.2) a 2(3.3) výsledná práce pole nulová. V případě, že se bod  $Z$  bude pohybovat z  $M_1$  do  $M_2$  po křivce  $L_1$  (viz obr. (2.6)) a z  $M_2$  do  $M_1$  po jiné křivce  $L_3$ , můžeme říci, že se pohyboval po uzavřené křivce  $L$ . Označíme-li výslednou práci při tomto pohybu z  $M_1$  do  $M_1$  jako  $A_{11}$ , bude platit

$$A_{11} \equiv \oint_L (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}), \quad 2(3.17)$$

kde na pravé straně stojí integrál po uzavřené křivce  $L$ . Podle toho, jaké hodnoty veličina  $A_{11}$  nabývá, dělíme silová pole do několika skupin, o kterých se zmíníme v následujících odstavcích.

## 2.4 Konzervativní silová pole

Pole, ve kterých pro libovolnou uzavřenou křivku  $L$  platí

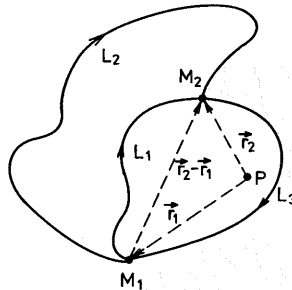
$$\oint_L (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = 0, \quad 2(4.1)$$

nazýváme *konzervativní* nebo též *potenciálová silová pole* (význam tohoto názvu vyplyne z dalšího výkladu). Je-li silové pole  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  superpozicí několika dílčích konzervativních polí

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k(\mathbf{r}), \quad 2(4.2)$$

$$\oint_L (\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s}) = 0 \quad \text{pro všechna } k, L, \quad 2(4.3)$$

je výsledné pole rovněž polem konzervativním. V konzervativních polích platí, že práce  $A_{21}$  vykonaná polem při pohybu bodu z polohy  $M_1$  do  $M_2$  nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body. Toto tvrzení si dokážeme s pomocí obr. 2.6, na



Obr. 2.6 K rozboru pohybu hmotného bodu po uzavřené křivce (viz text)

němž je poloha  $M_1$  spojena s  $M_2$  orientovanými křivkami  $L_1$  a  $L_2$ , poloha  $M_2$  s  $M_1$  orientovanou křivkou  $L_3$ . Označme uzavřenou křivku tvořenou  $L_1$  a  $L_3$  jako  $L$ , uzavřenou křivku tvořenou  $L_2$  a  $L_3$  jako  $L'$ , práci  $A_{21}$  po křivce  $L_1$  jako  $A_{21}(L_1)$  a obdobně práce další. Podle 2(4.1) musí v konzervativním poli platit

$$A_{11}(L) = A_{21}(L_1) + A_{12}(L_3) = A_{11}(L') = A_{21}(L_2) + A_{12}(L_3) = 0. \quad 2(4.4)$$

To je ovšem možné jen tehdy, jestliže

$$A_{21}(L_1) = A_{21}(L_2), \quad 2(4.5)$$

$A_{21}$  tedy nezávisí na tvaru dráhy. Pak ovšem nezávisí na tvaru dráhy ani odpovídající změna kinetické energie  $\Delta W_k$  (viz rovnice 2(3.16)) a k výpočtu  $A_{21}$  podle rovnice 2(3.2) můžeme zvolit např. přímkovou spojnicí  $M_1$  a  $M_2$  ležící ve směru  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ . Pro každou dvojici  $M_1$  a  $M_2$  bude  $A_{21}$  funkcí  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  a při daném směru pohybu bude záviset jen na velikosti  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ , tedy

$$A_{21} = A_{21}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|). \quad 2(4.6)$$

Protože velikost vektoru  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  nezávisí na volbě soustavy souřadnic, nezávisí na této volbě ani hodnota  $A_{21}$ , ani zjištění, že dané pole je konzervativní. Pomocí veličiny  $A_{21}$  lze každé poloze bodu  $Z$  v daném poli přiřadit reálné číslo  $W_p(\mathbf{r})$ , které nazveme *potenciální (polohová) energie*  $W_p$ . Přiřadíme-li pevně zvolené poloze  $M_1$  pevné (ale jinak libovolné) reálné číslo  $C$ , tedy

$$W_{p1} \equiv W_p(\mathbf{r}_1) = C, \quad 2(4.7)$$

pak poloze  $M_2$  můžeme přiřadit číslo

$$W_{p2} = W_{p1} - A_{21}. \quad 2(4.8)$$

Zavedeme-li rozdíl potenciálních energií  $\Delta W_p$  hmotného bodu v polohách  $M_1$  a  $M_2$  vztahem

$$\Delta W_p \equiv W_{p2} - W_{p1}, \quad 2(4.9)$$

dostáváme z 2(4.8)

$$A_{21} = -\Delta W_p, \quad 2(4.10)$$

podle kterého je práce pole spojená s přechodem hmotného bodu z polohy  $M_1$  do  $M_2$  rovna záporně vzatému rozdílu potenciálních energií bodu v těchto polohách. Odsud a z rovnice 2(3.16) máme

$$\Delta W_k = -\Delta W_p \quad 2(4.11)$$

neboli

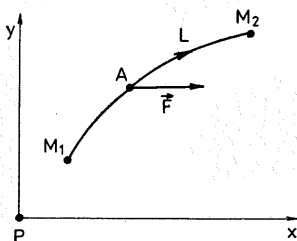
$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2} = \text{konst.} \quad 2(4.12)$$

Označme součet kinetické a potenciální energie hmotného bodu (nebo tělesa)  $W_m$  a nazvěme ho *mechanická energie*; pak platí

$$W_m \equiv W_k + W_p = \text{konst.} \quad 2(4.13)$$

Vidíme, že při pohybu v konzervativním silovém poli se mechanická energie hmotného bodu nemění, zůstává zachována, konzervována (odtud i název konzervativní pole). Vztah 2(4.13) nazýváme *zákon zachování mechanické energie*.

Konzervativními jsou mimo jiné všechna silová *pole homogenní* (v nichž ve všech polohách působí na hmotný bod síla stejné velikosti, směru a smyslu) a všechna *pole centrálních sil* (v nichž směr síly působící v libovolné poloze prochází vždy tímž pevným bodem pole – silovým centrem, smysl je vždy buď od centra, nebo k centru a velikost závisí jen na vzdálenosti od centra).



Obr. 2.7

Vezměme případ homogenního silového pole, kde síla  $F$  působící na hmotný bod  $A$  má ve všech bodech prostoru stejnou velikost, směr a smysl. Zvolme v něm dva pevné body  $M_1$  a  $M_2$  a spojme je orientovanou křivkou  $L$ . Kartéz-

skou soustavu souřadnic zvolme tak (viz obr. 2.7), že síla  $\mathbf{F}$  má souřadnice  $(F, 0, 0)$ , a necht'  $L$  leží v rovině  $X, Y$ . K výpočtu  $A_{21}$  uijeme rovnice 2(3.2), ve které skalární součin v integrandu vyjádříme pomocí souřadnic obou vektorů, takže dostaneme

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) .$$

Protože souřadnice vektoru  $\mathbf{F}$  jsou všechny konstantní a  $F_y, F_z$  navíc nulové, máme

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} F_x dx = F \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} dx = F(x_2 - x_1) . \quad 2(4.14)$$

$A_{21}$  v tomto případě tedy nejen nezávisí na tvaru křivky  $L$ , ale dokonce je závislá jen na jedné ( $x$ -ové) ze souřadnic jejich koncových bodů; homogenní pole je tedy polem konzervativním. Hmotnému bodu  $A$  o hmotnosti  $m$  můžeme proto připsat potenciální energii, a to vztahem (srovnej 2(4.14), 2(4.9) a 2(4.10))

$$W_p(\mathbf{r}) = -F \cdot x + C , \quad 2(4.15)$$

kde  $C$  je libovolné reálné číslo mající význam potenciální energie přisouzené bodům, pro něž  $x = 0$ . V homogenním poli gravitačním bývá zvykem volit osu  $x$  opačného smyslu, než má síla pole  $\mathbf{F}$  rovná tíže  $\mathbf{G}$ , připsat nulovou potenciální energii bodům ležícím v rovině zemského povrchu a  $x$ -ovou souřadnici hmotného bodu označovat  $h$ , kde  $h$  je výška bodu nad zemským povrchem, tedy

$$W_p(x = 0) = 0 , \quad 2(4.16)$$

$$F = F_x = -mg , \quad 2(4.17)$$

$$x = h . \quad 2(4.18)$$

Platí pak

$$W_p = mgh . \quad 2(4.19)$$

V případě centrálního silového pole zvolíme soustavu sférických souřadnic tak, že její počátek splývá se silovým centrem. Jedinou nenulovou složkou síly pak bude síla radiální  $\mathbf{F}_r$ ,  $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}$ , jejíž vektorová přímka splývá s vektorovou přímkou polohového vektoru  $\mathbf{r}$ . Pro práci  $A_{21}$  dostaneme proto vztah

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} (\mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r}) = \int_{r_1}^{r_2} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) \quad 2(4.20)$$

a vidíme, že velikost  $A_{21}$  rovněž nezávisí na tvaru dráhy mezi body  $M_1$  a  $M_2$ . Centrálním polem je např. gravitační pole vzbuzené hmotným bodem o hmot-



nosti  $m_c$  jako silovým centrem, neboť síla, která v něm působí na hmotný bod  $A$  o hmotnosti  $m$ , je dána vztahem 2(1.5)

$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{m_c m}{r^2} \mathbf{e}_r$$

splňujícím definici síly centrální. Dosadíme-li tento výraz do rovnice 2(4.20), dostaneme

$$A_{21} = \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \kappa m_c m . \quad 2(4.21)$$

Hmotnému bodu v tomto gravitačním poli přísluší potenciální energie

$$W_p(\mathbf{r}) = -\kappa \frac{m_c m}{r} + C . \quad 2(4.22)$$

Dohodneme-li se dále, že má platit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W_p(\mathbf{r}) = 0 , \quad 2(4.23)$$

dostaneme známý vztah

$$W_p(\mathbf{r}) = -\kappa \frac{m_c m}{r} . \quad 2(4.24)$$

Výrazy pro sílu a potenciální energii v homogenním i centrálním poli gravitačních sil lze zapsat jako součin dvou faktorů, z nichž jeden přísluší jen danému hmotnému bodu  $A$  a je roven jeho hmotnosti  $m$ , druhý lze připsat silovému poli. Pro faktory příslušející v obou případech silovému poli zavádíme zvláštní názvy a označení. *Intenzitou silového pole  $I$*  nazveme podíl

$$I \equiv \frac{\mathbf{F}}{m} . \quad 2(4.25)$$

Podle této definice je vektor intenzity  $I$  všude kolineární s vektorem  $\mathbf{F}$ , jeho fyzikální rozměr odpovídá zrychlení ( $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ ) a jeho velikost je číselně rovna síle působící na hmotný bod o jednotkové hmotnosti. Známe-li intenzitu pole  $I$  a hmotnost sledovaného bodu  $m$ , pak sílu, která v daném poli na tento bod působí, vypočteme podle vztahu

$$\mathbf{F} = mI . \quad 2(4.26)$$

Potenciálem silového pole  $U$  (odtud název – potenciálová pole) nazveme podíl

$$U = \frac{W_p}{m} . \quad 2(4.27)$$

Potenciál má fyzikální rozměr čtverce rychlosti a číselně se rovná potenciální energii hmotného bodu jednotkové hmotnosti. Známe-li potenciál pole  $U$  a hmotnost  $m$  sledovaného hmotného bodu, pak potenciální energii tohoto bodu v daném poli vypočteme z rovnice

$$W_p = mU . \quad 2(4.28)$$

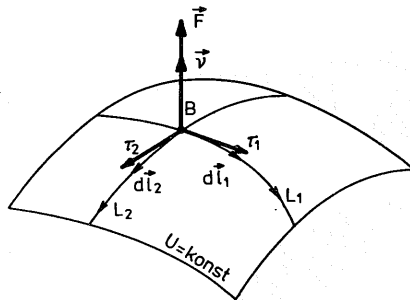
Z rovnic 2(4.1) a 2(4.26) plyne, že konzervativní (potenciálové) je takové pole, ve kterém pro každou uzavřenou křivku  $L$  platí

$$\oint_L (\mathbf{I} \cdot d\mathbf{s}) = 0 . \quad 2(4.29)$$

*Ekvipotenciální plochou* (tj. plochou konstantního potenciálu) nazýváme množinu bodů prostoru, kterým přísluší táž hodnota potenciálu  $U$

$$U(x, y, z) = C , \quad 2(4.30)$$

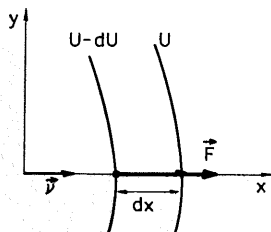
kde  $C$  je konstanta. V homogenním i centrálním poli prochází každým bodem prostoru jediná ekvipotenciální plocha. V homogenním poli tvoří ekvipotenciální plochy soustavu rovnoběžných rovin, v centrálním poli tvoří soustavu kulo-



Obr. 2.8 Vzájemná poloha síly a ekvipotenciální plochy konzervativního silového pole

ových ploch se středem v silovém centru. V obou případech platí, že vektor intenzity  $\mathbf{I}$  je v každém bodě prostoru kolmý na ekvipotenciální plochu tímto bodem procházející; můžeme se o tom přesvědčit následujícím způsobem (viz obr. 2.8). V ekvipotenciální ploše procházející zvoleným bodem prostoru  $B$  zvo-

líme dvě orientované křivky  $L_1$  a  $L_2$  tak, aby se v bodě  $B$  protínaly. Elementární posunutí  $d\mathbf{l}_1$  a  $d\mathbf{l}_2$  nějakého hmotného bodu z polohy  $B$  podél křivek  $L_1$  a  $L_2$  mají zřejmě směr jednotkových tečných vektorů  $\boldsymbol{\tau}_1$  a  $\boldsymbol{\tau}_2$  k těmto křivkám v bodě



Obr. 2.9

$B$ . Podél obou křivek je změna potenciální energie  $\Delta W_p$  nulová, a musí tedy platit

$$dA = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_1) = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_2) = 0.$$

Pokud  $F \neq 0$ , je to možné právě tehdy, jestliže platí  $\mathbf{F} \perp d\mathbf{l}_1$  a  $\mathbf{F} \perp d\mathbf{l}_2$ , takže  $\mathbf{F}$  (a tudíž i  $\mathbf{l}$ ) má směr jednotkového vektoru normály  $\boldsymbol{\nu}$  k ploše  $U = \text{konst}$  v bodě  $B$ . Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že jednotkový vektor ve směru osy  $x$  je současně vektorem  $\boldsymbol{\nu}$  (viz obr. 2.9), takže platí  $\mathbf{F} = (F, 0, 0)$ . Pro  $dA$  dostáváme

$$dA = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = F \cdot dx = -dW_p, \quad 2(4.31)$$

takže můžeme psát

$$F = - \frac{dW_p}{dx}. \quad 2(4.32)$$

Při obecné poloze vektoru  $\boldsymbol{\nu}$  vzhledem k osám kartézské soustavy dostaneme

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{\delta W_p}{\delta x} \mathbf{i} + \frac{\delta W_p}{\delta y} \mathbf{j} + \frac{\delta W_p}{\delta z} \mathbf{k} \right) = - \text{grad } W_p, \quad 2(4.33)$$

a obdobně

$$\mathbf{l} = - \text{grad } U. \quad 2(4.34)$$

Je tedy síla  $\mathbf{F}$  (intenzita  $\mathbf{l}$ ) rovna záporně vzatému součtu prostorových parciálních derivací potenciální energie  $W_p$  (potenciálu  $U$ ) podél tří os souřadnic; tento součet nazýváme gradient (viz D. 5). Protože gradient konstanty je roven nule, je hodnota  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{l}$ , určená z těchto vztahů nezávislá na volbě aditivní konstanty

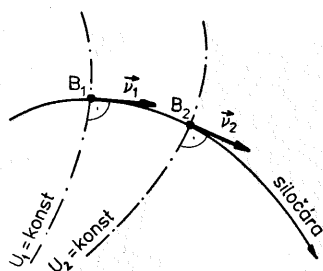
ve výrazech pro  $W_p$  a  $U$ . Zároveň z rovnice 2(4.11) plyne, že místo 2(4.33) můžeme psát

$$\mathbf{F} = \text{grad } W_k \quad 2(4.35)$$

a že

$$\text{grad } W_m = \text{grad } W_k + \text{grad } W_p = 0. \quad 2(4.36)$$

V uvažovaných potenciálových polích můžeme jednoznačně určit soustavu takových navzájem se neprotínajících křivek, že směr tečny k příslušné křivce v daném bodě prostoru  $B$  má směr normály k ekvipotenciální ploše procházející bodem  $B$ ; v dvourozměrném případě je tato situace znázorněna na obr. 2.10.



Obr. 2.10 Ekvipotenciální plochy a siločára konzervativního silového pole

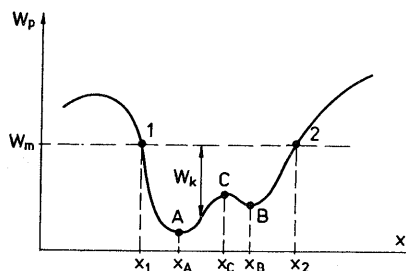
Tyto křivky nazýváme *siločárami* silového pole a zpravidla volíme počet siločár  $dN_s$  procházejících elementem  $dS$  ekvipotenciální plochy obsahujícím bod  $B$  tak, aby platilo

$$I = \frac{dN_s}{dS}. \quad 2(4.37)$$

Siločáry a ekvipotenciální plochy vytváří v silovém poli přirozenou souřadnicovou soustavu, kterou můžeme využít k mapování polí. Omezíme-li se na pole nejvýše dvourozměrná, existuje i velmi názorná souvislost s obyčejnou mapou.

Hodnotu potenciálu či potenciální energie můžeme chápat jako výšku bodu obecné plochy popisující skalární pole  $U(\mathbf{r})$  nebo  $W_p(\mathbf{r})$  vzhledem k libovolné, ale pevně zvolené základní rovině. Tato obecná plocha je povrchem „potenciálové krajiny“, v níž ekvipotenciální křivky hrají úlohu vrstevnic, silokřivky úlohu spádnic. Podívejme se z tohoto hlediska na obr. 2.11, na kterém je pro jednorozměrné silové pole zakreslena závislost  $W_p$  na souřadnici  $x$  bodu pole. Ve vyznačených bodech pole  $A$ ,  $B$ ,  $C$  platí  $(dW_p/dx) = 0$  a na hmotný bod nacházející se v těchto polohách působí tedy silové pole podle 2(4.32) nulovou silou. Všimneme-li si blíže průběhu  $W_p(x)$  v okolí polohy  $A$ , vidíme, že pro

$x = x_A + dx$  je  $(dW_p/dx) > 0$ , a tedy  $F_x < 0$ ; pro  $x = x_A - dx$  je  $(dW_p/dx) < 0$ , a tedy  $F_x > 0$  (obdobné vztahy platí i v okolí bodu  $B$ ). Proto v okolí bodu  $A$  působí pole na hmotný bod silou, která ho vrací do polohy



Obr. 2.11 Příklad závislosti potenciální, kinetické a mechanické energie na poloze tělesa v jedno-rozměrném konzervativním silovém poli

$A$ . Říkáme, že hmotný bod, který je v poloze  $A$  (nebo  $B$ ) v klidu, je v ní ve *stabilní rovnováze*. V okolí polohy  $C$  působí pole na hmotný bod silami, které mají tendenci zvětšovat odchylku od této polohy; rovnováhu hmotného bodu, který je v poloze  $C$  v klidu, nazýváme *rovnováhou labilní*. V konzervativních silových polích je mechanická energie  $W_m$  hmotného bodu všude konstantní a kinetická energie  $W_k$  vždy nezáporná. Pro pole znázorněné na obr. 2.11 a zvolenou hodnotu  $W_m$  snadno zjistíme, že hmotný bod se může pohybovat jen v oblasti prostoru dané uzavřeným intervalem souřadnic  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ; jen v této oblasti je  $W_k \geq 0$ .

## 2.5 Nekonzervativní silová pole, disipativní procesy, tření

Silová pole, ve kterých pro libovolně zvolenou uzavřenou křivku  $L$  platí

$$\oint_L (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) \neq 0, \quad (2.5.1)$$

nazýváme *pole nekonzervativní*. V dalším soustředíme pozornost na pole, pro která vždy platí

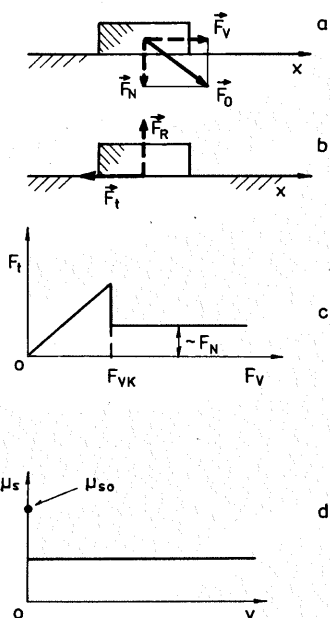
$$\oint_L (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) < 0 \quad (2.5.2)$$

a která nazýváme *pole disipativních sil*. Práce vykonaná disipativními silami při pohybu hmotného bodu je záporná – při pohybu v tomto poli se kinetická energie pohybujícího se tělesa snižuje. Disipativními silami popisujeme např. mechanický odpor kladený jinými tělesy pohybu tělesa sledovaného. Tento odpor, který při pohybu tělesa plyny nebo kapalinami nazýváme *od-*

por prostředí, je vyvolán složitými procesy interakce souhrnně nazývanými *tření*. Síla  $F_t$  míří vždy proti směru relativního pohybu tělesa vůči tělesům ostatním, takže pro libovolné elementární posunutí platí

$$(\mathbf{F}_t \cdot d\mathbf{s}) < 0. \quad (5.3)$$

Rozlišujeme *tření vnější*, které vzniká při relativním pohybu dvou dotýkajících se těles v ploše jejich dotyku, a *tření vnitřní* vznikající při vzájemném



Obr. 2.12 K popisu smykového tření (viz text)

posuvu různých částí jednoho tělesa. Podíl vnějšího a vnitřního tření na výsledném tření při relativním pohybu dvou těles závisí, zhruba řečeno, na poměru „pevnosti“ látek jednoho a druhého tělesa a materiálu stykové vrstvy jejich vnějších ploch. Vnější tření převažuje tehdy, jestliže „pevnost“ materiálu roste se vzdáleností od stykové vrstvy. Vnitřní tření souvisí s jevy *viskozity (vazkosti) a anelasticity*, o kterých bude řeč v dalších kapitolách. Zde se omezíme na tření vnější, které dělíme na *tření smykové (těž – vlečné)* a *tření valivé*.

Všimněme si tření smykového a uvažujme pohyb kvádrů po makroskopicky rovné podložce (viz obr. 2.12). Odhlédneme nejdříve od interakce kvádrů s podložkou a označme za této podmínky výslednou sílu působící na kvádr  $F_0$ ; tu můžeme rozložit na normálovou složku  $F_N$  působící kolmo k rovině dotyku

a vodorovnou složku  $\mathbf{F}_V$  (obr. 2.12a). Ze strany podložky působí na kvádr dvě síly,  $\mathbf{F}_R$  a  $\mathbf{F}_t$  (obr. 2.12b). Síla  $\mathbf{F}_R$  je reakcí podložky na sílu  $\mathbf{F}_N$  a pokud v důsledku interakce nedojde k porušení materiálu kvádru nebo podložky (např. prolomením podložky), platí podle třetího pohybového zákona

$$\mathbf{F}_R = -\mathbf{F}_N. \quad 2(5.4)$$

Síla  $\mathbf{F}_t$  působí v ploše kvádru stýkající se s podložkou a má vždy opačný smysl než  $\mathbf{F}_V$ . Pokud je velikost  $\mathbf{F}_V$  menší než jistá kritická hodnota  $\mathbf{F}_{VK}$  (obr. 2.12c), má  $\mathbf{F}_t$  charakter reakce podložky na  $\mathbf{F}_V$ , a platí tedy

$$\mathbf{F}_t = -\mathbf{F}_V. \quad 2(5.5)$$

Za uvedených podmínek je výsledná síla  $\mathbf{F}$  působící na kvádr

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_N + \mathbf{F}_V) + (\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_t) \quad 2(5.6)$$

nulová a kvádr se po podložce nebude smýkat. Jakmile  $\mathbf{F}_V$  překoná kritickou hodnotu  $\mathbf{F}_{VK}$ , přestane rovnice 2(5.5) platit. Síla  $\mathbf{F}_t$  bude mít sice stále opačný smysl než  $\mathbf{F}_V$ , její velikost však bude menší než  $\mathbf{F}_V$ . Představujeme si, že v tomto okamžiku dochází k poškození či rozrušení materiálu mikroskopických překážek pro pohyb v ploše styku.

V důsledku poklesu velikosti  $\mathbf{F}_t$  stane se výsledná síla  $\mathbf{F}$  kladnou a kvádr se začne smýkat ve směru kladné osy  $x$ . Podle *Amontonsova zákona* je síla tření nezávislá na velikosti plochy styku obou těles a je úměrná jen velikosti  $\mathbf{F}_N$ , přičemž součinitel úměrnosti na  $\mathbf{F}_N$  nezávisí. Vektorově lze tento zákon zapsat vztahem

$$\mathbf{F}_t = -\mu_s \cdot F_N \cdot \mathbf{e}_v, \quad 2(5.7)$$

kde  $\mathbf{e}_v$  je jednotkový vektor ve směru síly  $\mathbf{F}_V$ , bezrozměrný faktor  $\mu_s$  nazýváme *součinitelem smykového tření*. Smýkají-li se po sobě suché povrchy pevných látek, závisí hodnota  $\mu_s$  na materiálu smýkaného tělesa a podložky a na kvalitě (drsnosti resp. hladkosti) dotýkajících se povrchů. Při pomalých pohybech  $\mu_s$  téměř nezávisí na rychlosti vzájemného pohybu a hovoříme pak o *suchém (Coulombově) tření*. Smýkají-li se po sobě umělé hmoty nebo je-li plocha dotyku mazána, je hodnota  $\mu_s$  na rychlosti závislá.

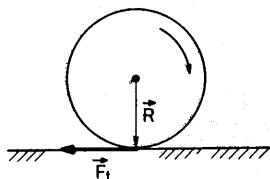
Formálně lze platnost tohoto zákona rozšířit i na případ kritického stavu klidu ( $\mathbf{F}_V = \mathbf{F}_{VK}$ ). Hovoříme pak o *klidovém (statickém) tření*; jemu přísluší *součinitel klidového tření*  $\mu_{s0}$  a podle toho, co jsme si dosud uvedli, platí pro něj

$$\mu_{s0} \equiv \mu_s(v = 0) > \mu_s(v > 0) \quad 2(5.8)$$

– viz obr. 2.12d. I  $\mu_{s0}$  závisí obecně složitým způsobem na podmínkách, za

kterých je měřen, mimo jiné i na době, po kterou se povrchy obou těles v klidu stýkají.

V případě valivého pohybu válce o poloměru  $R$  po makroskopicky rovinné podložce (viz obr. 2.13) setkáváme se se třením valivým a *součinitelem va-*



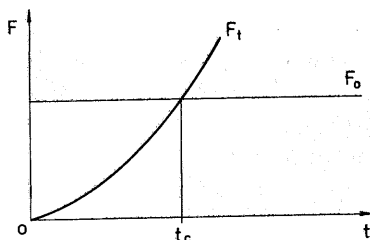
Obr. 2.13 K popisu valivého tření (viz text)

livého tření  $\mu_v$ . Tento součinitel je koeficientem úměrnosti mezi velikostí momentu síly valivého tření  $[R \times F_t]$  a velikostí normálové síly  $F_N$

$$\mu_v = \frac{RF_t}{F_N}, \quad 2(5.9)$$

a má tedy rozměr délky; v této kapitole je však třeba zdůraznit, že veličiny v rovnici 2(5.9) jsou jen ty, které souvisí s popisem pohybových atributů tělesa jako hmotného bodu.

V obecném případě závisí velikost síly tření na rychlosti vzájemného pohybu, přičemž tato závislost nemusí být dokonce ani monotónní. Pokud na pohybující



Obr. 2.14

se těleso působí rychlostně závislá síla tření  $F_t$  a kromě toho ještě nějaká další konstantní vnější síla  $F_0$ , dosáhne rychlost tělesa po uplynutí jisté doby ustálené, s dobou dále neproměnné hodnoty  $v_{stac}$ . Představme si například, že v čase  $t = 0$  (viz obr. 2.14) bylo těleso v klidu; v tomto stavu platí  $F_t = 0$ . Pod vlivem síly  $F_0$  bude rychlost tělesa postupně růst a s ní poroste i  $F_t$ , a to až do času  $t = t_c$ , kdy bude platit

$$F_t = F_0. \quad 2(5.10)$$



Výsledná síla působící na těleso bude pak pro  $t \geq t_c$  rovna nule a jeho pohyb bude rovnoměrný přímočarý. Platí-li

$$F_t = \alpha v, \quad 2(5.11)$$

kde  $\alpha$  je *kladná* konstanta úměrnosti, dostaneme z rovnice 2(5.10) pro velikost ustálené rychlosti vztah

$$v_{\text{stac}} = \frac{1}{\alpha} \cdot F_0. \quad 2(5.12)$$

K popisu ustáleného pohybu tělesa zavádíme pojem *pohyblivosti*  $\mu_M$  vzta- hem

$$v_{\text{stac}} \equiv \mu_M I_0; \quad 2(5.13)$$

takže  $\mu_M$  má význam ustálené rychlosti pohybu v poli síly  $F_0$  o jednotkové intenzitě  $I_0$ .

Na závěr tohoto odstavce všimněme si energie tělesa pohybujícího se v ne-konzervativních silových polích. Protože i v těchto polích lze definovat práci sil pole, lze zavést kinetickou energii pohybujícího se tělesa zcela stejně, jak jsme to učinili dříve. Práce sil pole po uzavřené dráze však nyní není rovna nule, a proto práce odpovídající přenosu tělesa mezi dvěma polohami v poli závisí na tvaru zvolené dráhy; nelze proto jednoznačně, a tedy smysluplně zavést energii potenciální, a tudíž ani energii mechanickou jako součet energie kinetické a potenciální. Proto v nekonzervativních polích nemůže platit zákon zachování mechanické energie. Ilustrujeme si tuto skutečnost na jednoduchém případě hmotného bodu o hmotnosti  $m$ , který se pohybuje ve směru kladné osy  $x$  pod vlivem dvou sil: konzervativní síly  $F_V$  ležící ve směru pohybu a proti ní působící síly tření  $F_t$ , která je přímo úměrná velikosti rychlosti pohybujícího se bodu. Podle uvedeného můžeme psát

$$F_V = - \frac{dW_p}{dx} i, \quad 2(5.14)$$

kde  $W_p$  je potenciální energie hmotného bodu v poli síly  $F_V$ , a

$$F_t = -\alpha v. \quad 2(5.15)$$

Výsledná síla  $F = F_V + F_t$  je zřejmě nekonzervativní. Uvedený pohyb je popsán pohybovou rovnicí

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = - \frac{dW_p}{dx} - \alpha \frac{dx}{dt}. \quad 2(5.16)$$

Spočteme nyní elementární práci  $dA$  výsledné síly během elementárního posunutí  $dx$ . S přihlédnutím k rovnicím 2(3.1) a 2(3.14) dostaneme vztah

$$dW_k = dA = F_x dx = - \frac{dW_p}{dx} dx - \alpha \frac{dx}{dt} dx = - dW_p - \alpha \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt ,$$

kteřý upravíme na tvar

$$\frac{d}{dt} (W_k + W_p) = -\alpha v^2 < 0 . \quad 2(5.17)$$

S rostoucím časem tedy mechanická energie  $W_m = W_k + W_p$  klesá. Její pokles můžeme připisat tomu, že přechází v jiné formy energie, např. energii tepelnou. Nazveme-li součet všech dílčích energií izolované soustavy těles *energií celkovou*, platí i v nekonzervativních polích následující *zákon zachování celkové energie*: v izolované soustavě těles zůstává celková energie soustavy konstantní.

## 2.6 Impuls síly a zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti

Podobně jako jsme v předchozích odstavcích sledovali výsledný účinek síly na pohyb tělesa z hlediska čistě prostorového, všimněme si nyní jejího účinku z hlediska časového; budeme předpokládat, že výsledná působící síla  $\mathbf{F}$  závisí explicitě jen na čase, tj. že  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ , a že pohyb sledujeme v inerciální soustavě. Podle druhého Newtonova pohybového zákona projeví se působení síly během elementárního časového intervalu  $dt$  elementární změnou hybnosti  $d\mathbf{p}$ , pro kterou platí

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt . \quad 2(6.1)$$

Pro konečný časový interval  $\langle t_1, t_2 \rangle$  dostaneme integraci

$$\Delta \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt . \quad 2(6.2)$$

Integrál na pravé straně této rovnice označujeme  $\mathbf{J}$  a nazýváme *impuls síly*

$$\mathbf{J} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt , \quad 2(6.3)$$

takže platí

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J} . \quad 2(6.4)$$

Podobně lze odvodit z rovnice 2(1.8) vztah

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{L} , \quad 2(6.5)$$

podle kterého je rozdíl momentů hybnosti tělesa  $\Delta \mathbf{b}$  v časech  $t_2$  a  $t_1$  roven *impulsu momentu síly*  $\mathbf{L}$  definovanému vztahem

$$\mathbf{L} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt . \quad 2(6.6)$$

Pokud hmotnost tělesa zůstává konstantní, můžeme místo 2(6.4) psát

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}}{m} . \quad 2(6.7)$$

Změna rychlosti tělesa  $\Delta \mathbf{v}$  je podle této rovnice při dané hmotnosti  $m$  a impulsu  $\mathbf{J}$  vždy stejná; na celkovém stavu tělesa se však může projevit různě. Pro ilustraci uvažujme dva stejně hmotné automobily A a B jedoucí po přímé rovné silnici touž rychlostí. Nechť A dosáhne stavu klidu za čas  $\Delta t_A$  postupným brzděním, B za čas  $\Delta t_B$  nárazem na pevnou překážku ( $\Delta t_B \ll \Delta t_A$ ), přičemž změny jejich rychlostí jsou v obou případech vyvolány působením časově neproměnných sil  $\mathbf{F}_A$  a  $\mathbf{F}_B$ . Protože hmotnost  $m$  i  $\Delta \mathbf{v}$  jsou stejné, je stejný i impuls obou sil a platí

$$\mathbf{J} = \mathbf{F}_A \Delta t_A = \mathbf{F}_B \Delta t_B . \quad 2(6.8)$$

Za daných podmínek však nutně platí  $\mathbf{F}_B \gg \mathbf{F}_A$ , což je příčinou rozdílného tvaru automobilů po zastavení. Zapišme změnu rychlosti rovnicí

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F} \Delta t}{m} . \quad 2(6.9)$$

Vyjádříme-li přibližně odpovídající změnu polohy  $\Delta \mathbf{r}$  pomocí rychlosti  $(\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\Delta \mathbf{v})$ , kde  $\mathbf{v}_1$  je rychlost v čase  $t_1$ , máme

$$\Delta \mathbf{r} = \left( \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} \right) \cdot \Delta t . \quad 2(6.10)$$

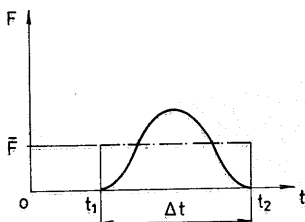
Vyloučíme-li z rovnic 2(6.9) a 2(6.10) veličinu  $\Delta t$ , dostaneme

$$\Delta \mathbf{v} \left( \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} \right) = \left( \frac{\mathbf{F}}{m} \right) \cdot \Delta \mathbf{r} . \quad 2(6.11)$$

Vidíme, že změna rychlosti  $\Delta \mathbf{v}$  může být velká i při velmi malé změně polohy  $\Delta \mathbf{r}$ , pokud je poměr  $(\mathbf{F}/m)$  veliký. Při daném impulsu síly k tomu dojde tehdy, je-li doba jejího působení velmi krátká.

Rovnice 2(6.4) využíváme s výhodou právě v případech, kdy hybnost tělesa se mění během krátkých časových intervalů (působením „impulsních“ sil vyvo-

lávajících např. pohyb náboje v hlavní děla) anebo na malých úsecích dráhy (působením „krátkodosahových“ sil, např. během srážek těles). V těchto situacích zpravidla neznáme přesný časový anebo prostorový průběh působící síly



Obr. 2.15 Časový průběh impulsní síly (schematicky)

$F$  a můžeme jen předpokládat, že tato síla začíná působit počínaje časem  $t_1$  (viz obr. 2.15), její velikost zprvu s časem roste, později klesá, až v čase  $t_2 = t_1 + \Delta t$  opět nabude nulové hodnoty. Můžeme pak určit průměrnou působící sílu  $\bar{F}$  vztahem

$$\bar{F} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = \frac{J}{\Delta t} \quad 2(6.12)$$

a vypočítat ji na základě známé změny hybnosti  $\Delta p$

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad 2(6.13)$$

Uvažujeme nyní místo časového působení síly na jediné těleso případ izolované soustavy skládající se ze dvou těles, která můžeme považovat za hmotné body  $A$  a  $B$ . Předpokládejme, že jejich silovou interakci lze popsat třetím Newtonovým pohybovým zákonem; označíme-li tedy sílu působící na  $A$  jako  $F_A$  a sílu působící na  $B$  jako  $F_B$  pak v každém okamžiku platí

$$F_A = -F_B. \quad 2(6.14)$$

V časovém intervalu  $\langle t_1, t_2 \rangle$  dojde pod vlivem této interakce k změně  $\Delta p_A$  částice  $A$

$$\Delta p_A \equiv p_A(t_2) - p_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_A dt \quad 2(6.15)$$

a  $\Delta p_B$  částice  $B$

$$\Delta p_B \equiv p_B(t_2) - p_B(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_B dt. \quad 2(6.16)$$

Vzhledem ke vztahu 2(6.14) se hodnoty integrálů na pravých stranách obou posledních rovnic liší jen znaménkem, takže

$$\Delta \mathbf{p}_A + \Delta \mathbf{p}_B = \mathbf{0} \quad 2(6.17)$$

neboli

$$\mathbf{p}_A(t_1) + \mathbf{p}_B(t_1) = \mathbf{p}_A(t_2) + \mathbf{p}_B(t_2) = \text{konst.} \quad 2(6.18)$$

Tato rovnice vyjadřuje *zákon zachování hybnosti* v izolované soustavě.

Obdobně lze ukázat, že za stejných podmínek platí i *zákon zachování momentu hybnosti*  $\mathbf{b}$  ve tvaru

$$\mathbf{b}_A(t_1) + \mathbf{b}_B(t_1) = \mathbf{b}_A(t_2) + \mathbf{b}_B(t_2) = \text{konst.} \quad 2(6.19)$$

Podle rovnice 2(1.8) můžeme psát

$$\Delta \mathbf{b}_A = \mathbf{b}_A(t_2) - \mathbf{b}_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_A dt \quad 2(6.20)$$

a obdobný vztah platí i tehdy, zaměníme-li index  $A$  indexem  $B$ . Označíme-li polohové vektory bodů  $A$  a  $B$  vzhledem k libovolnému bodu prostoru  $O$  jako  $\mathbf{r}_A$  a  $\mathbf{r}_B$  (viz obr. 2.1), platí pro velikost  $M_A$  momentu síly  $\mathbf{F}_A$

$$M_A = r_A F_A \sin \alpha = F_A d, \quad 2(6.21)$$

a obdobně

$$M_B = r_B F_B \sin \beta = F_B d; \quad 2(6.22)$$

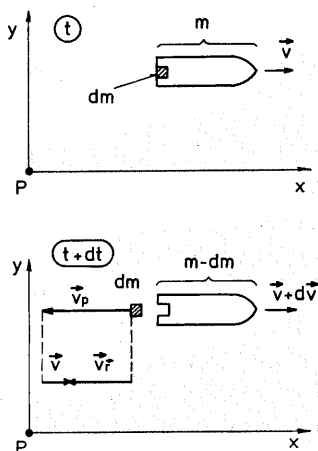
přitom je zároveň patrné, že smysl obou momentů je opačný (liší se znaménkem). Protože však zároveň platí  $F_A = F_B$ , dostaneme

$$\Delta \mathbf{b}_A + \Delta \mathbf{b}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B = \mathbf{0}, \quad 2(6.23)$$

odkud již vyplývá rovnice 2(6.19). Snadno lze dokázat, že za jinak stejných podmínek platí rovnice 2(6.18) a 2(6.19) pro libovolný počet částic v izolované soustavě. Pokud by tato soustava obsahovala jen jediný hmotný bod, byl by to volný hmotný bod a uvedené rovnice by pak vyjadřovaly zákon setrvačnosti. Jak vyplývá z experimentů, jsou zákony zachování hybnosti a točivosti obecnými fyzikálními zákony, jejichž platnost *nezávisí* na tom (jak by se zdálo nutné z našeho odvození), zda je přesně splněn třetí Newtonův zákon vyjádřený zde rovnicí 2(6.14).

Zákon zachování hybnosti lze využít k analýze pohybů těles, jejichž hmotnost se s časem mění. Jak jsme si ukázali na začátku této kapitoly, mohla by hmotnost tělesa záviset na čase ve dvou případech. Za prvé tehdy, kdyby hmotnost atomů, z nichž se látka skládá, závisela na pohybovém stavu tělesa. Tuto možnost klasická fyzika vylučuje a je zkoumána až v mechanice relativis-

tické (viz poslední kapitola této učebnice). Za druhé k tomu může dojít tak, že během pohybu se mění počet atomů, z nichž se těleso skládá. Příkladem tu může být třeba vodní kapka, která se během pádu buď může vypařovat, nebo naopak růst připojováním dalších molekul vody z ovzduší, anebo raketa urychlující svůj



Obr. 2.16 K rozboru pohybu rakety (viz text)

pohyb vymrštováním plynů z raketového motoru. Poslední z nich si nyní probereme s využitím obr. 2.16.

V jistém čase  $t$  necht' je hmotnost rakety s palivem rovna  $m$ , její rychlost vzhledem k inerciální soustavě označme  $\mathbf{v}$ , rychlost vymrštovaných plynů v této soustavě označme  $\mathbf{v}_p$ . Pro výtokovou rychlost  $\mathbf{v}_r$  plynů vzhledem k raketě dostáváme

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_p - \mathbf{v} . \quad (2.6.24)$$

Výtoková rychlost má vždy opačný směr než  $\mathbf{v}$  a budeme ji pokládat za konstantní. V čase  $t$  je celková hybnost soustavy  $\mathbf{p}_s$  dána vztahem

$$\mathbf{p}_s = m\mathbf{v} , \quad (2.6.25)$$

v čase  $t' = t + dt$  platí pro hybnost  $\mathbf{p}'_s$

$$\mathbf{p}'_s = (m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mathbf{v}_p dm , \quad (2.6.26)$$

kde  $dm$  je množství paliva, které za čas  $dt$  bylo v podobě plynů vymrštěno z rakety,  $d\mathbf{v}$  je změna rychlosti rakety tímto procesem vyvolaná. Pokud raketa s palivem a vytrysklé plyny tvoří izolovanou soustavu (nejsou vystaveny působení dalších těles, např. Země), platí v této soustavě zákon zachování hybnosti

$$\mathbf{p}'_s = \mathbf{p}_s . \quad (2.6.27)$$

Provedeme-li roznásobení na pravé straně rovnice 2(6.26) a zanedbáme člen „druhého řádu malosti“  $dm \cdot dv$ , dostaneme po dosazení z 2(6.25) a 2(6.26) do 2(6.27) a jednoduché úpravě

$$m \, dv = -v_r \cdot dm . \quad 2(6.28)$$

Podle druhého Newtonova zákona je síla  $\mathbf{F}$  působící na raketu rovna součinu  $m(dv/dt)$ . Z rovnice 2(6.28) pro ni dostáváme výraz

$$\mathbf{F} = -v_r \cdot \frac{dm}{dt} \quad 2(6.29)$$

(připomeňme, že rychlost  $v_r$  má opačné znaménko než rychlost rakety  $v$ , síla  $\mathbf{F}$  tedy působí ve směru pohybu rakety a urychluje ji); tato síla je vyvolána unikajícími plyny a nazýváme ji *reaktivní tažná síla*. Protože nejen  $v_r$ , ale i rychlost spalování paliva ( $dm/dt$ ) bývá zpravidla konstantní, bývá i tato síla konstantou charakteristickou pro daný raketový motor a palivo. Předpokládejme, že v čase  $t = 0$  byl zapnut raketový motor, přičemž před tím byla raketa v klidu, a označme startovací hmotnost rakety  $m_0$ , takže platí

$$m(t = 0) \equiv m_0 , \quad 2(6.30)$$

$$\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{0} . \quad 2(6.31)$$

Pokud od  $t = 0$  do času  $\tau$  je motor stále v činnosti a výtoková rychlost je během celé doby konstantní, můžeme z rovnice 2(6.28) odvodit vztah mezi velikostí okamžité rychlosti rakety  $v$  a její okamžitou hmotností  $m$ . Upravíme 2(6.28) na tvar

$$\frac{dm}{m} = - \frac{1}{v_r} \, dv \quad 2(6.32)$$

(položili jsme jednu osu souřadnic do směru pohybu a vynechali označení vektorů) a po integraci v mezích  $t = 0$ ,  $t = \tau$  dostaneme

$$v(\tau) = v_r \cdot \ln \left( \frac{m_0}{m(\tau)} \right) ; \quad 2(6.33)$$

tento vztah nazýváme *rovnice Ciolkovského*. Pokud by se náš systém (raketa + plyny) nacházel ve vnějším silovém poli síly  $\mathbf{F}_E$ , nešlo by již o systém izolovaný a jeho pohyb bychom zkoumali pomocí pohybové rovnice

$$\frac{d\mathbf{p}_s}{dt} = \mathbf{F}_E . \quad 2(6.34)$$

Protože

$$d\mathbf{p}_s = \mathbf{p}'_s - \mathbf{p}_s , \quad 2(6.35)$$

zjistíme z rovnic 2(6.25), 2(6.26) a 2(6.34), že pro pohyb rakety pak platí tzv. rovnice Mešcherského

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_E - \mathbf{v}_r \frac{dm}{dt}. \quad 2(6.36)$$

## Řešené úlohy

1. Přesvědčte se, že rovnice 2(1.23) a 2(1.22) obsahují jako zvláštní případ vztahy 1(3.9).

Řešení. Rovnice 2(1.22) a 2(1.23) můžeme zapsat jediným vztahem

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}_{O'} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}'_{OD} + \mathbf{a}'_C + \mathbf{a}'_{UZ}, \quad (1)$$

kde jsme zavedli odstředivé zrychlení  $\mathbf{a}'_{OD}$  vztahem

$$\mathbf{a}'_{OD} \equiv [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']], \quad (2)$$

Coriolisovo zrychlení  $\mathbf{a}'_C$  vztahem

$$\mathbf{a}'_C \equiv 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] \quad (3)$$

a zrychlení  $\mathbf{a}'_{UZ}$  vztahem

$$\mathbf{a}'_{UZ} \equiv [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}']. \quad (4)$$

Připomeňme, že vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{a}_{O'}$  předpokládáme vyjádřené v inerciální soustavě  $S$  s bázovými vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (viz např. rovnice 2(1.17)), ostatní vektory v neinerciální soustavě  $S'$  s bázovými vektory  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ .

V odstavci 1.3 se předpokládá, že  $S$  a  $S'$  jsou soustavy kartézské, jejich počátky  $O$  a  $O'$  a osy  $z$  a  $z'$  trvale splývají a soustava  $S'$  se kolem  $z$  otáčí se stálou úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega}$ . To znamená, že v rovnici 2(1.16)

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

takže

$$\mathbf{r}' = x'_i \mathbf{e}'_i = x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{r}, \quad (6)$$

a dále

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Navíc

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}'_3 = \omega \mathbf{e}_3, \quad (10)$$

neboť

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \quad (11)$$



a

$$\omega_3 = \omega \quad (12)$$

a osy  $z$  a  $z'$  splývají. Vzhledem k (8) a (9) můžeme místo (1) psát

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] . \quad (13)$$

Označíme-li součet vektorů na pravé straně (13) symbolem  $\mathbf{b}'$  můžeme psát

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = b'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{b}' ; \quad (14)$$

vztah (14) je analogický rovnici (6). Známe-li vektor  $\mathbf{b}'$ , můžeme jeho souřadnici  $b'_i$  v soustavě  $S'$  spočítat pomocí vztahu (viz rov. 1(2.3))

$$b'_i = (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{e}'_i) , \quad (15)$$

takže s využitím (14) dostáváme

$$b'_i = a_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_i) + a_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_i) + a_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_i) . \quad (16)$$

Spočtíme nyní souřadnici  $b'_1$ . Z analogie mezi (14) a (6) a z rovnice 1(3.5) zjistíme, že platí

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) = \cos \omega t, \quad (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) = \sin \omega t, \quad (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1) = 0 , \quad (17)$$

takže místo (13) můžeme psát

$$a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t = a'_1 + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']]_1 + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']_1 , \quad (18)$$

kde dolní indexy u vektorových součinů označují souřadnice těchto vektorů na ose 1 soustavy  $S'$ . Platí

$$[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}']_1 = (\omega_2 v'_3 - \omega_3 v'_2) = -\omega v'_2 ; \quad (19)$$

dále

$$[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']]_1 = \omega_2 [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']_3 - \omega_3 [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']_2 = -\omega [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']_2 \quad (20)$$

a

$$[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}']_2 = \omega_3 x'_1 - \omega_1 x'_3 = \omega x'_1 . \quad (21)$$

Z rovnic (18) až (21) plyne

$$a'_1 = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + 2\omega v'_2 + \omega^2 x'_1 . \quad (22)$$

Dosadíme-li za  $v'_2$  druhou z rovnic 1(3.6) a za  $x'_1$  první z rovnic 1(3.5), zjistíme, že (22) je totožná s prvním ze vztahů 1(3.9). Obdobným výpočtem souřadnic  $b'_2$  a  $b'_3$  bychom pak dokázali platnost celého tvrzení.

2. V nenulovém homogenním gravitačním poli s gravitačním zrychlením  $\mathbf{g}$  se pohybuje hmotný bod vystavený pouze působení gravitace. Zvolme dvě kartézské souřadnicové soustavy  $S'$  a  $S''$ .

Soustava  $S'$  nechť je inerciální a platí v ní

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g) \quad (1)$$

spolu s počátečními podmínkami

$$\mathbf{r}'_0 = (0, 0, 0) \quad (2)$$

a

$$\mathbf{v}'_0 = (0, 0, 0). \quad (3)$$

Mezi souřadnicemi  $x', y', z'$  bodů v soustavě  $S'$  a souřadnicemi  $x'', y'', z''$  v soustavě  $S''$  platí vztahy

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'' - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4)$$

Najděte řešení pohybových rovnic hmotného bodu v soustavě  $S'$ . Určete, zda v soustavě  $S''$  platí a) Newtonovy pohybové zákony, b) stejné pohybové zákony jako v soustavě  $S'$ .

Řešení. Pohybové rovnice v soustavě  $S'$  vyřešíme stejně jako v textu odstavce 2.3; dostaneme (viz rov. 2(2.31))

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (5)$$

V soustavě  $S''$  neplatí Newtonovy pohybové zákony. Plyne to buď z toho, že  $x'' = y'' = z'' = 0$  pro všechna  $t$  (jak zjistíme dosazením (5) do (4)), zatímco hmotný bod je podle zadání vystaven působení nenulové gravitační síly, nebo ze skutečnosti, že podle (5) se  $S''$  pohybuje zrychleně vůči  $S'$ , a není proto soustavou inerciální. Protože v  $S'$  Newtonovy zákony platí, je zřejmé, že v  $S''$  neplatí stejné pohybové zákony jako v  $S'$ . Ke stejnému závěru lze dospět i rychleji: plyne totiž ze zrychleného pohybu  $S''$  vůči  $S'$  a Galileiova principu relativity.

3. Mějme silové pole, ve kterém platí

$$\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3z^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}, \quad (1)$$

kde  $x, y, z$  jsou souřadnice polohového vektoru  $\mathbf{r}$ . Zvolme jako dráhu bodu  $Z$  přímku danou rovnicí

$$x = 2y = 4z. \quad (2)$$

Najděte velikost práce  $A_{21}$  spojenou s posuvem bodu z polohy  $M_1 = (0, 0, 0)$  do  $M_2 = (4, 2, 1)$ .

Řešení. Vyjďme z obecného vztahu 2(3.2). Pomocí vztahu

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{r} \quad (3)$$

rozepíšeme výraz  $(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})$  jako

$$(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (4)$$

Integrál na pravé straně rovnice 2(3.2) je pak součtem tří integrálů. První z nich označíme  $A_{21x}$

$$A_{21x} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} F_x dx = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} 2xz dx. \quad (5)$$

Souřadnice  $z$  je podél zvolené dráhy vázána se souřadnicí  $x$  rovnicí (2); dosadíme-li z ní za  $z$  do (5), dostaneme

$$A_{21x} = \int_0^4 2x \frac{1}{4} x dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 dx = \frac{1}{6} \left[ x^3 \right]_0^4 = \frac{32}{3}. \quad (6)$$

Obdobně

$$A_{21y} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} F_y dy = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} 3z^2 dy = \int_0^2 3(y/2)^2 dy = \frac{1}{4} \left[ y^3 \right]_0^2 = 2, \quad (7)$$

$$A_{21z} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} F_z dz = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} y^2 dz = 4 \int_0^1 z^2 dz = \frac{4}{3} \left[ z^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \quad (8)$$

Celkem tedy

$$A_{21} = \frac{32}{3} + 2 + \frac{4}{3} = 14. \quad (9)$$

4. Mějme silové pole, ve kterém platí

$$\mathbf{F} = 4y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad (1)$$

křivka, po které posouváme bod  $Z$ , je dána soustavou parametrických rovnic

$$x = 4 \cos \theta, \quad y = 4 \sin \theta, \quad z = 2\theta. \quad (2)$$

Vypočítejte práci  $A_{21}$  při změně  $\theta$  z hodnoty 0 na hodnotu  $2\pi$ .

Řešení. S pomocí rovnic (1) a (2) zjistíme, že platí

$$F_x = 4y = 16 \sin \theta ; \quad F_y = 8 \cos \theta ; \quad F_z = 1 \quad (3)$$

a

$$\frac{dx}{d\theta} = -4 \sin \theta ; \quad \frac{dy}{d\theta} = 4 \cos \theta ; \quad \frac{dz}{d\theta} = 2 . \quad (4)$$

S využitím rovnice 2(3.7) dostaneme

$$A_{21x} = \int_0^{2\pi} F_x \frac{dx}{d\theta} d\theta = -64 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -64\pi , \quad (5)$$

$$A_{21y} = \int_0^{2\pi} F_y \frac{dy}{d\theta} d\theta = 32 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 32\pi , \quad (6)$$

$$A_{21z} = \int_0^{2\pi} F_z \frac{dz}{d\theta} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi . \quad (7)$$

Sečtením rovnic (5) až (7) dostaneme výsledek  $A_{21} = -28\pi$ .

# Kmity

## 3.1 Harmonický kmit

Kmitavý pohyb, jakožto pohyb hmotného bodu vystaveného působení síly mířící k jeho rovnovážné poloze, je jedním ze základních typů pohybu. V této kapitole si proto podrobně probereme různé typy kmitavých pohybů a uvedeme jejich hlavní charakteristiky.

Harmonickým nazýváme takový pohyb hmotného bodu, pro který závislost polohy bodu  $x$  na čase  $t$  je dána harmonickou funkcí

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) + x_0. \quad 3(1.1)$$

Konstanty  $A$  a  $\omega$  jsou kladné veličiny. V rovnici 3(1.1) harmonického pohybu, který bývá též nazýván harmonickým kmitem, užíváme pro konstantu  $A > 0$  označení *amplituda kmitu* a pro výraz  $\omega t + \alpha$  *fáze kmitu*. Konstanta  $\omega > 0$  bývá nazývána úhlová (kruhová) frekvence a konstanta  $\alpha$  fázová konstanta. Koná-li bod harmonický kmit 3(1.1), pohybuje se pouze po úsečce  $-A \leq x - x_0 \leq A$ . Střed této úsečky, který leží v bodě  $x_0$ , se nazývá rovnovážnou polohou bodu. Často při vyšetřování harmonického pohybu se počátek souřadnicové osy, tj. bod  $x = 0$ , klade do rovnovážné polohy kmitajícího bodu, a potom  $x_0 = 0$ . Harmonický kmit je pohybem periodickým. Po čase

$$T = 2\pi/\omega, \quad 3(1.2)$$

který nazýváme *dobou kmitu*, se celý průběh pohybu opakuje. Převrácená hodnota doby kmitu udává, kolik kmitů bod vykoná za jednotku času. Tuto veličinu nazýváme *frekvencí*

$$\nu = 1/T \quad 3(1.3)$$

a její vztah k úhlové frekvenci  $\omega$  plyne z rovnice 3(1.2)

$$2\pi\nu = \omega. \quad 3(1.4)$$

Použijeme-li vzorce  $\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\beta$  k úpravě výrazu 3(1.1), dostáváme  $x = A \cos\alpha \sin\omega t + A \sin\alpha \cos\omega t + x_0$ . Výrazy  $A \cos\alpha$ ,

$A \sin \alpha$  jsou konstantní a můžeme je označit postupně  $a, b$ . S tímto označením přejde rovnice 3(1.1) na ekvivalentní tvar, který také bývá při vyšetřování harmonického pohybu užíván,

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t + x_0. \quad 3(1.5)$$

Harmonický kmit je rovnicí 3(1.5) vyjádřen jako součet harmonických funkcí  $\sin \omega t$  a  $\cos \omega t$  s různými koeficienty  $a, b$ . Pro vzájemný přepočítání obou vyjádření 3(1.1) a 3(1.5) harmonického kmitu platí zřejmě vzorce

$$\begin{aligned} a &= A \cos \alpha, & A &= (a^2 + b^2)^{1/2}, \\ b &= A \sin \alpha, & \alpha &= \operatorname{arctg}(b/a). \end{aligned} \quad 3(1.6)$$

Derivováním rovnice 3(1.1) podle času (viz rovnice 1(3.32)), dostáváme pro rychlost harmonického pohybu

$$v = A\omega \cos(\omega t + \alpha) \quad 3(1.7)$$

a pro zrychlení podle 1(3.52)

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha). \quad 3(1.8)$$

Rychlost  $v$  a zrychlení  $a$  v rovnicích 3(1.7) a 3(1.8) jsou vektory v přímce  $x$ , tj. v jednorozměrné soustavě souřadnicové, a nesmějí být zaměňovány s velikostí vektorů rychlosti a zrychlení, i když pro ně bývá zvykem užívat stejný symbol. Rychlost i zrychlení harmonického pohybu jsou opět harmonickými funkcemi času. Velikost rychlosti má maximální hodnotu v rovnovážné poloze, velikost zrychlení je maximální v krajních polohách pohybu.

Porovnáme-li rovnici 3(1.8) s rovnicí 3(1.1), dostáváme důležitý vztah mezi zrychlením  $a$  a výchylkou  $x - x_0$  harmonického pohybu

$$a = -\omega^2(x - x_0); \quad 3(1.9)$$

*zrychlení harmonického pohybu je úměrné výchylce a míří proti ní, konstantou úměrnosti je kladná veličina – čtverec úhlové frekvence  $\omega^2$ .* Podle druhého Newtonova zákona vyjádřeného rovnicí 2(1.4) dostáváme pak pro sílu  $F$ , která působí při harmonickém kmitu na hmotný bod o hmotnosti  $m$ , vyjádření

$$F = -m\omega^2(x - x_0), \quad 3(1.10)$$

a tedy i *síla při harmonickém pohybu je úměrná výchylce a míří proti ní.*

Ukážeme dále, že vždy, když na hmotný bod vázaný na přímku působí síla úměrná výchylce a mířící proti výchylce, vzniká harmonický kmit. K tomuto závěru dojdeme, uvažujeme-li rovnici 2(1.4) jako pohybovou rovnici hmotného bodu, tj. jako rovnici pro určení pohybu hmotného bodu v poli známé síly. Budeme tedy hledat, jak se pohybuje hmotný bod vázaný na přímku, na nějž

působí síla, která míří k jednomu bodu přímky a jejíž velikost roste úměrně se vzdáleností od tohoto bodu. Zvolíme-li ve směru přímky souřadnicovou osu  $x$  s počátkem v bodě, ke kterému míří síla (tj. položíme pro zjednodušení  $x_0$  z rovnice 3(1.10) rovné nule), můžeme pro působící sílu napsat vyjádření  $F = -kx$ , kde konstanta  $k > 0$ . Pohybová rovnice pro pohyb hmotného bodu o hmotnosti  $m$  v tomto silovém poli pak má tvar

$$m\ddot{x} = -kx . \quad 3(1.11)$$

Je to rovnice, jejímž řešením máme určit neznámou funkci  $x = x(t)$ . Jelikož se v této rovnici kromě neznámé funkce  $x(t)$  vyskytují i její derivace (zde druhá derivace  $\ddot{x}$ ), mluvíme o diferenciální rovnici. Funkce, která splňuje rovnici 3(1.11), musí mít tu vlastnost, že její druhá derivace je až na vynásobení jistou konstantou rovna záporně vzaté funkci samotné. Tuto vlastnost mají harmonické funkce  $\sin \omega t$  a  $\cos \omega t$ . Položíme-li  $x = \sin \omega t$ , dostaneme  $\ddot{x} = -\omega^2 \sin \omega t$  a po dosazení těchto výrazů do 3(1.11) máme

$$-m\omega^2 \sin \omega t = -k \sin \omega t . \quad 3(1.12)$$

Rovnici 3(1.12) můžeme splnit pro všechna  $t$ , položíme-li

$$\omega^2 = k/m . \quad 3(1.13)$$

Tedy funkce  $\sin \omega t$  s  $\omega = (k/m)^{1/2}$  je řešením rovnice 3(1.11). Stejným postupem lze zjistit, že i funkce  $\cos \omega t$  s  $\omega = (k/m)^{1/2}$  je řešením rovnice 3(1.11). Řešením je i každá funkce  $C_1 \sin (k/m)^{1/2}t$  a  $C_2 \cos (k/m)^{1/2}t$  a též součet těchto funkcí

$$x = C_1 \sin [(k/m)^{1/2}t] + C_2 \cos [(k/m)^{1/2}t], \quad 3(1.14)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou libovolné konstanty. O tom, že funkce 3(1.14) je řešením rovnice 3(1.11), se lze přesvědčit, dosadíme-li ji do rovnice 3(1.11).

Z teorie diferenciálních rovnic plyne, že obecné řešení rovnice typu 3(1.11) dostaneme, najdeme-li její dvě lineárně nezávislá řešení (lineárně nezávislé jsou takové dvě funkce  $f_1(t)$  a  $f_2(t)$ , pro které nelze najít konstantu  $C$  takovou, aby bylo  $f_1(t) = Cf_2(t)$  pro všechny hodnoty nezávislé proměnné  $t$ ) a vytvoříme jejich lineární kombinaci. Funkce  $\sin [(k/m)^{1/2}t]$  a  $\cos [(k/m)^{1/2}t]$  jsou dvě lineárně nezávislá (nelze najít konstantu  $C$  takovou, aby pro všechna  $t$  platila rovnice  $\sin [(k/m)^{1/2}t] = C \cos [(k/m)^{1/2}t]$ ) řešení rovnice 3(1.11) a výraz 3(1.14) je jejich lineární kombinací, tedy funkce 3(1.14) je obecným řešením rovnice 3(1.11). Obecné řešení diferenciální rovnice je takové řešení, v jehož tvaru lze zapsat všechna řešení této rovnice. Tedy neexistuje žádné řešení rovnice 3(1.11), které by nebylo možno napsat ve tvaru 3(1.14). Zde je si však třeba všimnout, že

funkci 3(1.14) je možno psát též v ekvivalentním tvaru (viz rovnice 3(1.1), 3(1.5) a 3(1.6))

$$x = A \sin \left[ (k/m)^{1/2} t + \alpha \right]. \quad 3(1.15)$$

Řešením pohybové rovnice 3(1.11) jsme zjistili, že *hmotný bod, vázaný na přímku, na nějž působí síla, jejíž velikost je úměrná vzdálenosti od jistého bodu a která míří z obou stran k tomuto bodu, koná harmonický kmit s rovnovážnou plohou v bodě, ke kterému míří síla.* Konstanty  $A$ ,  $\alpha$  v rovnici 3(1.15), případně  $C_1$ ,  $C_2$  v rovnici 3(1.14) lze určit z počátečních podmínek pohybu, tj. z výchylky a rychlosti hmotného bodu v čase  $t = 0$ . Frekvence kmitů je dána výrazem 3(1.13), a tedy závisí na hmotnosti  $m$  hmotného bodu a na tom, jak prudce vzrůstá velikost síly  $F$  se vzdáleností od bodu, ke kterému síla  $F$  míří. Je-li síla  $F$  realizována pružinou, odpovídá konstanta  $k$  tuhosti pružiny, Výsledek získaný řešením rovnice 3(1.11) bylo možno očekávat, když jsme zjistili (viz 3(1.10)), že na hmotný bod konající harmonický kmit působí síla úměrná výchylce mířící k rovnovážné poloze. Zjistíme-li však sílu, která působí na hmotný bod konající jistý druh pohybu, nemůžeme ještě vyloučit, že za působení stejné síly nemůže vzniknout i jiný druh pohybu. Teprve skutečnost, že funkce 3(1.14) (respektive její ekvivalentní tvar 3(1.15)) je obecným řešením diferenciální rovnice 3(1.11), potvrzuje závěr, že jediný pohyb, který může hmotný bod vázaný na přímku  $x$  konat v poli síly  $F = -kx$ , je harmonický kmit.

### 3.2 Tlumený harmonický kmit a aperiodický tlumený pohyb

Budeme vyšetřovat pohyb hmotného bodu vázaného na přímku, na nějž vedle elastické síly uvažované v rovnici 3(1.11) působí ještě odporující síla úměrná rychlosti pohybu. Položíme-li do přímky, podél které se může hmotný bod pohybovat, souřadnicovou osu  $x$  s počátkem v místě, k němuž směřuje elastická síla, bude tato síla  $F_E$  vyjádřena rovnicí

$$F_E = -kx \quad 3(2.1)$$

a odporující síla rovnicí

$$F_V = -hv = -h\dot{x}, \quad 3(2.2)$$

kde  $k$  a  $h$  jsou kladné konstanty,  $k > 0$ ,  $h > 0$ . Pohybová rovnice hmotného bodu o hmotnosti  $m$ , na nějž působí síly 3(2.1) a 3(2.2), má tvar

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}. \quad 3(2.3)$$



Zavedeme-li označení  $\omega_0^2 = k/m$  a  $2\delta = h/m$ , lze po zřejmé úpravě přepsat rovnici 3(2.3) na tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad 3(2.4)$$

Symbolem  $\omega_0$  je označena frekvence 3(1.13) netlumeného ( $\delta = 0$ ) harmonického kmitu 3(1.15). Pro úhlové frekvence  $\omega$  užíváme, jak je při výkladu kmitů běžné, stručného označení frekvence. Při konkrétních výpočtech je třeba si uvědomit, že takto označená frekvence je podle 3(1.4)  $2\pi$  –násobkem frekvence  $\nu$ .

Rovnice 3(2.4) je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty druhého řádu. Obecné řešení takové rovnice získáme, najdeme-li dvě lineárně nezávislé funkce  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$ , které řeší tuto rovnici, a vytvoříme jejich lineární kombinaci

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \quad 3(2.5)$$

jak jsme již uvedli při řešení rovnice 3(1.11). Tvzení, že obecným řešením rovnice 3(2.4) je výraz 3(2.5), znamená, že každou funkci  $x(t)$ , která je řešením rovnice 3(2.4), lze napsat ve tvaru 3(2.5), tedy

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t). \quad 3(2.6)$$

Hodnoty dosud libovolných konstant  $C_1$  a  $C_2$  lze určit z počátečních podmínek pohybu.

Snadno se lze přesvědčit, že řešením rovnice 3(2.4) je funkce

$$x = e^{\alpha t}. \quad 3(2.7)$$

Provedeme první a druhou derivaci funkce 3(2.7)

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}, \quad \ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

a všechny tři poslední výrazy dosadíme do rovnice 3(2.4). Dostaneme rovnici

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\delta\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0, \quad 3(2.8)$$

kteou zřejmě lze splnit pro všechna  $t$ , lze-li splnit algebraickou rovnici

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad 3(2.9)$$

neboť vždy nenulovým výrazem  $e^{\alpha t}$  je možno rovnici 3(2.8) krátit. Rovnice 3(2.9) se nazývá charakteristická rovnice k rovnici 3(2.4). Charakteristická rovnice 3(2.9) je kvadratickou rovnicí pro dosud neurčenou konstantu  $\alpha$ . Jejím řešením získáme dvě hodnoty  $\alpha_1, \alpha_2$  dané rovnicí

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2}. \quad 3(2.10)$$

Rovnici 3(2.9) lze řešit, a tedy  $e^{\alpha t}$  je řešením rovnice 3(2.4), položíme-li  $\alpha$  rovné jedné z hodnot daných rovnicí 3(2.10). S výjimkou případu  $\delta = \omega_0$  získáváme tak dvě lineárně nezávislé funkce  $e^{\alpha_1 t}$  a  $e^{\alpha_2 t}$ , které řeší rovnici 3(2.4). Funkce  $e^{\alpha_1 t}$  a  $e^{\alpha_2 t}$  jsou lineárně nezávislé, protože nelze najít konstantu, kterou by bylo možno vynásobit funkci  $e^{\alpha_1 t}$ , abychom dostali  $e^{\alpha_2 t}$ , jsou-li  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  různé. Obecné řešení rovnice 3(2.4) je pak pro  $\delta \neq \omega_0$

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad 3(2.11)$$

kde hodnoty  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  jsou dány rovnicí 3(2.10).

V případě  $\delta = \omega_0$  dá právě uvedený postup pouze jednu funkci  $x_1 = e^{-\delta t}$  řešící rovnici 3(2.4). Druhou lineárně nezávislou funkcí řešící rovnici 3(2.4) v případě  $\delta = \omega_0$  je funkce  $x_2 = t e^{-\delta t}$ , o čemž se můžeme přesvědčit dosazením funkce  $x_2$  a jejích derivací do rovnice 3(2.4). Obecné řešení rovnice 3(2.4) v případě  $\delta = \omega_0$  je pak

$$x = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t} = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t). \quad 3(2.12)$$

Vyšetříme nyní podrobněji všechna řešení rovnice 3(2.4). Vzniklý pohyb je různý podle vzájemného poměru elastické síly  $F_E$  a odporující (tlumící) síly  $F_V$ . Rozdělení provádíme podle konstant  $\delta$  a  $\omega_0$  zavedených v rovnici 3(2.4). Je-li

- a)  $\delta > \omega_0$ , nazýváme pohyb *aperiodickým* ;
- b)  $\delta = \omega_0$ , nazýváme pohyb *mezním aperiodickým* ;
- c)  $\delta < \omega_0$ , nazýváme pohyb *tlumeným harmonickým kmitem* .

a) *Aperiodický pohyb*. Je-li  $\delta > \omega_0$ , je výraz pod odmocninou 3(2.10) kladný a hodnotu odmocniny označíme  $D$

$$D = (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2}. \quad 3(2.13)$$

Hodnoty  $\alpha_1 = -\delta + D$  a  $\alpha_2 = -\delta - D$  jsou pak reálná čísla a rovnici pohybu, tj. výraz 3(2.11), v uvažovaném případě zapišeme ve tvaru

$$x = C_1 e^{(-\delta+D)t} + C_2 e^{(-\delta-D)t}. \quad 3(2.14)$$

Jelikož  $\delta$  jako poměr kladných veličin  $h/2m$  je kladné ( $\delta > 0$ ) a podle 3(2.13) platí  $D > 0$  a  $D < \delta$ , jsou jak  $\alpha_1 = -\delta + D$  tak  $\alpha_2 = -\delta - D$  záporné a výchylka  $x$  v rovnici 3(2.14) konverguje k nule pro rostoucí  $t$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0. \quad 3(2.15)$$

Obdobně jako výchylka  $x$  i rychlost pohybu

$$v = \dot{x} = C_1(-\delta + D) e^{(-\delta+D)t} + C_2(-\delta - D) e^{(-\delta-D)t} \quad 3(2.16)$$

konverguje k nule pro neomezeně rostoucí  $t$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = 0, \quad 3(2.17)$$

Hmotný bod při pohybu popsaném rovnicí 3(2.14) se nakonec vždy zastaví v počátku soustavy souřadnic, tj. v bodu, ke kterému směřuje elastická síla 3(2.1). Nachází-li se hmotný bod v tomto bodě, říkáme, že zaujímá rovnovážnou polohu. Typickou vlastností aperiodického pohybu je, že průchod hmotného bodu rovnovážnou polohou nastává pro konečné hodnoty času  $t$  nejvýše jednou. Položíme-li v rovnici 3(2.14)  $x = 0$ , dostáváme

$$C_1 e^{(-\delta+D)t} + C_2 e^{(-\delta-D)t} = e^{-\delta t}(C_1 e^{+Dt} + C_2 e^{-Dt}) = 0,$$

a protože  $e^{-\delta t} \neq 0$  pro konečná  $t$ , dostáváme

$$C_1 e^{+Dt} + C_2 e^{-Dt} = 0$$

a odtud

$$e^{2Dt} = -C_2/C_1.$$

Poslední rovnice má jedno řešení, je-li  $(C_2/C_1) < 0$  a omezíme-li se na případ  $t > 0$  dokonce jen pro  $(C_2/C_1) < -1$ . Pro  $(C_2/C_1) > 0$  nemá žádné řešení. Je-li jedna z konstant  $C_1, C_2$  kladná a druhá záporná a jejich absolutní hodnoty splňují podmínku  $(|C_2|/|C_1|) > 1$ , projde hmotný bod při aperiodickém pohybu jednou rovnovážnou polohou pro konečné  $t > 0$ , jinak rovnovážnou polohu zaujme až pro  $t \rightarrow \infty$ . Neuvažujeme triviální případ  $C_1 = C_2 = 0$ , kdy hmotný bod je po celou dobu v rovnovážné poloze.

Uvedeme tvar řešení 3(2.14) pro dvojí typickou volbu počátečních podmínek. Nejprve pro počáteční podmínky

$$x = x_0, \quad v = 0 \quad \text{pro } t = 0, \quad 3(2.18)$$

kteřé odpovídají případu, kdy hmotný bod vychýlíme z rovnovážné polohy a volně (bez udělení počáteční rychlosti) jej vypustíme. Potom pro počáteční podmínky

$$x = 0, \quad v = v_0 \quad \text{pro } t = 0, \quad 3(2.19)$$

kteřé odpovídají případu, kdy hmotný bod uvedeme do pohybu tím, že mu v rovnovážné poloze udělíme nenulovou rychlost  $v_0$ .

Z rovnic 3(2.14) a 3(2.16) dostáváme pro počáteční podmínky 3(2.18) soustavu dvou algebraických rovnic

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1(-\delta + D) + C_2(-\delta - D), \end{aligned} \quad 3(2.20)$$

jejichž řešením určíme konstanty  $C_1$  a  $C_2$

$$C_1 = \frac{x_0(\delta + D)}{2D}, \quad C_2 = \frac{x_0(D - \delta)}{2D}.$$

Dosazením těchto konstant do rovnice 3(2.14) dostáváme po úpravě rovnici aperiodického pohybu pro počáteční podmínky 3(2.18)

$$\begin{aligned} x &= e^{-\delta t} (x_0/2D) [(\delta + D)e^{+Dt} + (D - \delta)e^{-Dt}] = \\ &= (x_0/D) e^{-\delta t} [\delta \operatorname{sh} Dt + D \operatorname{ch} Dt]. \end{aligned} \quad 3(2.21)$$

V druhém vyjádření funkce  $x(t)$  jsme užili funkcí hyperbolický sinus (znak sh) a hyperbolický kosinus (znak ch), které jsou definovány vztahy

$$\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}. \quad 3(2.22)$$

Pro počáteční podmínky 3(2.19) dají rovnice 3(2.14) a 3(2.16) pro určení  $C_1$  a  $C_2$  algebraické rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ v_0 &= C_1(-\delta + D) + C_2(-\delta - D), \end{aligned}$$

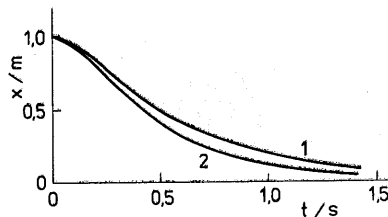
jejichž řešením dostáváme

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{2D},$$

a tedy pro počáteční podmínky 3(2.19) aperiodický pohyb je dán funkcí

$$x = \left(\frac{v_0}{2D}\right) e^{-\delta t} (e^{Dt} - e^{-Dt}) = \left(\frac{v_0}{D}\right) e^{-\delta t} \operatorname{sh} Dt. \quad 3(2.23)$$

Graficky jsou funkce 3(2.21) pro hodnoty  $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 5 \text{ s}^{-1}$  a  $x_0 = 1 \text{ m}$  a 3(2.23) pro hodnoty  $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 5 \text{ s}^{-1}$  a  $v_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$  znázorněny ja-

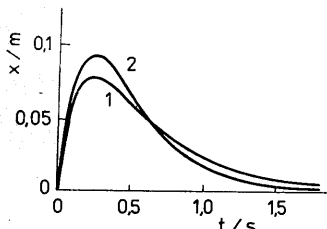


Obr. 3.1 Závislost výchylky  $x$  na čase  $t$  pro aperiodický (křivka 1) a mezní aperiodický (křivka 2) pohyb hmotného bodu volně vypuštěného z nerovnovážné polohy

ko křivky 1 na obrázcích 3.1 a 3.2. Hodnota  $D = (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2}$  je pro obě funkce stejná a rovna  $3 \text{ s}^{-1}$ .

b) *Mezní aperiodický pohyb* je popsán rovnicí 3(2.12)

$$x = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t),$$



Obr. 3.2 Závislost výchylky  $x$  na čase  $t$  pro aperiodický (křivka 1) a mezní aperiodický (křivka 2) pohyb hmotného bodu vypuštěného z rovnovážné polohy nenulovou počáteční rychlostí

jeho rychlost

$$v = \dot{x} = e^{-\delta t}(C_2 - \delta C_1 - \delta C_2 t). \quad 3(2.24)$$

Z těchto rovnic plyne, že vlastnosti 3(2.15) a 3(2.17) jsou splněny i pro mezní aperiodický pohyb. Anulováním rovnice 3(2.12) zjistíme, že pro konečné hodnoty  $t$  zaujme hmotný bod rovnovážnou polohu pouze jednou, a to pro  $t = -C_1/C_2$ . To znamená, že bereme-li v úvahu jen kladná  $t$ , projde hmotný bod rovnovážnou polohou pouze, když  $C_1$  a  $C_2$  mají opačná znaménka. To je důvod, proč i tento pohyb nazýváme aperiodickým.

Při počátečních podmínkách 3(2.18) plyne z rovnice 3(2.12)  $x_0 = C_1$  a z rovnice 3(2.24)  $0 = C_2 - \delta C_1$ , neboli  $C_2 = \delta x_0$ . Po dosazení vypočtených hodnot  $C_1$  a  $C_2$  do 3(2.12) dostáváme

$$x = x_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t). \quad 3(2.25)$$

Pro počáteční podmínky 3(2.19) z rovnic 3(2.12) a 3(2.24) dostáváme přímo hodnoty  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = v_0$ . Pohyb 3(2.12) je pak dán rovnicí

$$x = v_0 t e^{-\delta t}. \quad 3(2.26)$$

Jako křivka označená číslem 2 je na obr. 3.1 znázorněna funkce 3(2.25) se stejnými hodnotami  $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $x_0 = 1 \text{ m}$ , jako má křivka 1, a s hodnotou  $\delta = \omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ , jak odpovídá definici mezního aperiodického pohybu. Podobně křivka 2 na obr. 3.2 odpovídá funkci 3(2.26) se stejnými konstantami  $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ , jako má křivka 1 tohoto obrázku, a s hodnotou  $\delta = \omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ . Rychlejší konvergence křivek 2 k rovnovážné poloze než

křivce 1 je obecnou vlastností mezního aperiodického pohybu ve srovnání s pohybem aperiodickým.

c) *Tlumený harmonický kmit.* Tlumeným harmonickým kmitem nazýváme řešení 3(2.11) rovnice 3(2.4) v případě  $\delta < \omega_0$ . V tomto případě  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  daná rovnicí 3(2.10) jsou komplexně sdružená čísla

$$\alpha_1 = -\delta + i(\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}, \quad \alpha_2 = -\delta - i(\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}. \quad 3(2.27)$$

Rovnici 3(2.11)  $x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$  po dosazení konstant 3(2.27) přepíšeme na tvar

$$x = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}), \quad 3(2.28)$$

kde jsme zavedli označení

$$\omega = (\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}. \quad 3(2.29)$$

Použijeme-li známého Eulerova vztahu  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  ( $\varphi$  reálné číslo), dostaneme z 3(2.28)

$$\begin{aligned} x &= e^{-\delta t}[C_1 \cos \omega t + iC_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - iC_2 \sin \omega t] = \\ &= e^{-\delta t}[(C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t]. \end{aligned} \quad 3(2.30)$$

Řešení 3(2.11) lze pokládat za řešení rovnice 3(2.4) v komplexním oboru a konstanty  $C_1, C_2$  za komplexní čísla. Chceme-li v 3(2.30) získat reálné hodnoty  $x$ , je třeba omezit obor volby komplexních čísel  $C_1$  a  $C_2$  na taková, aby

$$C_1 + C_2 = D_1 \quad \text{a} \quad i(C_1 - C_2) = D_2, \quad 3(2.31)$$

kde  $D_1$  a  $D_2$  jsou reálná čísla. Podmínky 3(2.31) udávají, že  $C_1$  a  $C_2$  musí být komplexně sdružená čísla. Řešení 3(2.30) pro reálná  $x$  lze pak napsat ve tvaru

$$x = e^{-\delta t}(D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t). \quad 3(2.32)$$

Výraz v kulaté závorce je výrazem pro harmonický kmit s frekvencí  $\omega$ . Lze jej přepsat (viz čl. 3.1) na tvar  $A \sin(\omega t + \alpha)$  a rovnici pro tlumený harmonický kmit zapsat v obvyklém tvaru

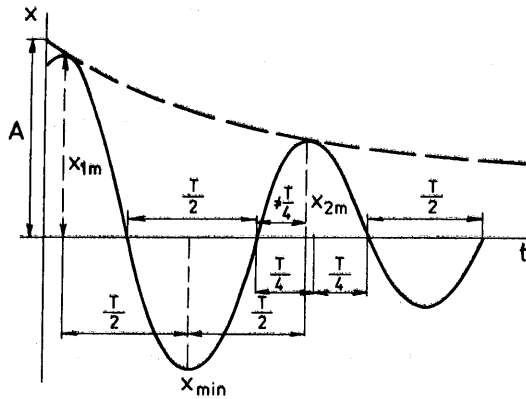
$$x = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha). \quad 3(2.33)$$

Rychlost pohybu 3(2.33) je

$$v = \dot{x} = A e^{-\delta t}[-\delta \sin(\omega t + \alpha) + \omega \cos(\omega t + \alpha)]. \quad 3(2.34)$$

V rovnici 3(2.33)  $A$  a  $\alpha$  jsou reálné konstanty, jejichž hodnoty lze určit z počátečních podmínek pohybu. Z tvaru 3(2.33) je zřejmé, proč právě vyšetřovaný pohyb je nazýván tlumeným harmonickým kmitem, liší se totiž od harmonického pohybu 3(1.1) pouze tím, že amplituda kmitu není konstantní, ale je dána

výrazem  $A e^{-\delta t}$ , jehož velikost se s časem zmenšuje. (Nepřítomnost konstanty  $x_0$  v rovnici 3(2.33) je dána volbou počátku soustavy souřadnic v rovnovážné poloze pohybu.) Z rovnic 3(2.33) a 3(2.34) plyne, že vlastnosti 3(2.15) a 3(2.17)



Obr. 3.3 Tlumený harmonický kmit

jsou splněny i pro tlumený harmonický kmit. Časový průběh pohybu 3(2.33) je znázorněn na obr. 3.3.

Pohyb 3(2.33) není čistě periodickým pohybem, protože všechny polohy hmotného bodu nenásledují po sobě v pravidelných časových intervalech, např. hodnotu maximální výchylky dosažené při jednom výkyvu hmotného bodu z rovnovážné polohy hmotný bod již pro žádný následující čas nedosáhne. Řadu vlastností periodických pohybů však pohyb 3(2.33) zachovává. Průchody hmotného bodu rovnovážnou polohou nastávají v pravidelných intervalech stejně jako průchody maximální výchylkou. Tlumený harmonický kmit 3(2.33) na rozdíl od aperiodických pohybů nabývá hodnoty  $x = 0$  nekonečněkrát, a to vždy, když výraz  $\sin(\omega t + \alpha) = 0$ , tedy když  $\omega t + \alpha = n\pi$ , kde  $n$  je celé číslo. Časový interval  $t_{n+1} - t_n$  mezi dvěma po sobě následujícími průchody rovnovážnou polohou zjistíme odečtením rovnic  $\omega t_{n+1} + \alpha = (n + 1)\pi$  a  $\omega t_n + \alpha = n\pi$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\omega}. \quad 3(2.35)$$

Jako dobu kmitu  $T$  označíme dvojnásobnou hodnotu intervalu 3(2.35), protože teprve při každém druhém průchodu rovnovážnou polohou se hmotný bod pohybuje ve stejném smyslu (viz obr. 3.3), tedy

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad 3(2.36)$$

Porovnáním s rovnicí 3(1.2) vidíme, že je vhodné nazvat  $\omega$  frekvenci, přesněji úhlovou (kruhovou) frekvenci tlumeného harmonického kmitu. Z rovnice 3(2.29), kterou byla hodnota  $\omega$  zavedena, plyne, že frekvence  $\omega$  tlumených kmitů je menší než frekvence  $\omega_0$  jim odpovídajících (stejně  $\omega_0$ , ale  $\delta = 0$ ) netlumených kmitů. Potom také doba kmitu  $T$  tlumeného harmonického kmitu je delší než doba kmitu  $T_0$  jemu odpovídajícího netlumeného harmonického kmitu

$$\omega < \omega_0, \quad T > T_0. \quad 3(2.37)$$

Maxima a minima funkce 3(2.33), tedy krajní výchylky kmitajícího hmotného bodu, nastávají pro ty časy  $t$ , pro které rychlost  $v$  pohybu daná rovnicí 3(2.34) nabývá nulové hodnoty. Pro konečná  $t$  rychlost  $v = 0$ , když

$$-\delta \sin(\omega t + \alpha) + \omega \cos(\omega t + \alpha) = 0,$$

tedy když

$$\operatorname{tg}(\omega t + \alpha) = \frac{\omega}{\delta}. \quad 3(2.38)$$

Rovnice 3(2.38) bude splněna pro taková  $t_n$ , pro která platí

$$(\omega t_n + \alpha) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\delta}\right) + n\pi. \quad 3(2.39)$$

Časový interval mezi dvěma po sobě následujícími časy  $t_n$  a  $t_{n+1}$  splňujícími rovnicí 3(2.38) je

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\omega}.$$

Tento časový interval je stejný jako časový interval mezi nulovými hodnotami funkce a je tedy roven poloviční době kmitu  $T/2$ . Jelikož každý druhý extrém funkce je maximum, časový interval mezi maximy je roven době kmitu  $T$ . Stejný závěr lze vyslovit i pro minima funkce 3(2.33). Podmínka pro čas  $t$ , ve kterém nastává nulová hodnota funkce 3(2.33) je

$$\omega t + \alpha = n\pi.$$

Porovnáme-li ji s podmínkou 3(2.39), vidíme, že vzájemná poloha maxim a nulových hodnot je dána velikostí  $\operatorname{arctg}(\omega/\delta)$ . Porovnáme-li totiž časy  $t_2$  a  $t_1$ , kdy pro stejné  $n$  jsou splněny podmínky

$$\omega t_1 + \alpha = n\pi \quad \text{a} \quad \omega t_2 + \alpha = \operatorname{arctg}(\omega/\delta) + n\pi,$$



dostáváme pro časový interval  $t_2 - t_1$  vyjádření

$$t_2 - t_1 = \left(\frac{1}{\omega}\right) \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\delta}\right). \quad 3(2.40)$$

Pouze v případě  $\delta \rightarrow 0$ , tj. pro netlumený harmonický kmit, je  $\operatorname{arctg}(\omega/\delta) = \pi/2$  a z rovnice 3(2.40) plyne

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2\omega},$$

neboli podle 3(2.36)

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{4}.$$

Pro případ tlumeného harmonického kmitu časový interval mezi maximem a po něm následující nulovou hodnotou funkce 3(2.33) je různý od čtvrtiny doby kmitu  $T/4$ , jak je naznačeno na obr. 3.3. Maxima a minima tlumených harmonických kmitů neleží v poloviční vzdálenosti mezi nulovými hodnotami kmitů. Z rovnice 3(2.40) plyne, že maxima a minima jsou posunuta blíže k časově předcházející nulové hodnotě, protože hodnota  $\operatorname{arctg}(\omega/\delta) < \pi/2$  pro nenulové hodnoty  $\delta$ .

Zavedeme některé konstanty užívané k charakteristice tlumeného harmonického kmitu. Poměr  $x_{1m}/x_{2m}$  dvou po sobě následujících maxim

$$x_{1m} = A e^{-\delta t_1} \sin(\omega t_1 + \alpha),$$

$$x_{2m} = A e^{-\delta(t_1+T)} \sin(\omega[t_1 + T] + \alpha)$$

funkce 3(2.33) je roven

$$\frac{x_{1m}}{x_{2m}} = e^{\delta T}.$$

Zavádíme označení

$$\beta = e^{\delta T} \quad 3(2.41)$$

a veličinu  $\beta$  nazýváme *útlumem kmitů*. Při vyjádření  $x_{1m}$  a  $x_{2m}$  jsme nikde neužili toho, že  $t_1$  je čas odpovídající maximu funkce 3(2.33). Tedy útlum  $\beta$  je poměrem libovolných dvou výchylek  $x$ , které zaujme hmotný bod konající tlumený kmit v časovém odstupu rovném době kmitů  $T$ . Přirozený logaritmus útlumu  $\ln \beta$  se nazývá *logaritmický dekrement* a uijeme pro něj symbol  $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D} = \ln \beta = \delta T. \quad 3(2.42)$$

Vedle logaritmického dekrementu  $\vartheta$  definovaného rovnicí 3(2.42) bývá zaváděn též dekadický logaritmický dekrement  $\vartheta'$  jako dekadický logaritmus útlumu

$$\vartheta' = \log \beta = (\log e) \ln \beta \doteq 0,434\vartheta . \quad 3(2.43)$$

Doba  $\tau$ , za kterou obálka  $x' = A e^{-\delta t}$  kmitu 3(2.33) čárkovaně vyznačená na obr. 3.3 klesne na hodnotu  $A/e$ , se nazývá *relaxační doba*. Z rovnice  $A/e = A/e^{+\delta\tau}$  plyne pro relaxační dobu podmínka  $\delta\tau = 1$  a odtud

$$\tau = \frac{1}{\delta} . \quad 3(2.44)$$

Porovnáním rovnic 3(2.42) a 3(2.44) lze ukázat, že převrácená hodnota logaritmického dekrementu udává počet kmitů, po kterých hodnota maximální výchylky klesne na  $1/e$ -tinu své původní hodnoty.

Tvar rovnice 3(2.33) pro počáteční podmínky 3(2.18) a 3(2.19) dostaneme analogicky jako v aperiodických případech řešením algebraických rovnic po dosazení počátečních podmínek do rovnic 3(2.33) a 3(2.34). Pro počáteční podmínky 3(2.18) dostaneme

$$x = x_0 e^{-\delta t} \left( 1 + \frac{\delta^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \sin \left[ \omega t + \arctg \left( \frac{\omega}{\delta} \right) \right] \quad 3(2.45)$$

a pro počáteční podmínky 3(2.19)

$$x = \left( \frac{v_0}{\omega} \right) e^{-\delta t} \sin \omega t . \quad 3(2.46)$$

Rovnice analogické rovnici 3(2.4) ovládají chování řady důležitých fyzikálních i technických systémů. Např. rovnice pro pohyb galvanometru (viz např. v seznamu literatury uvedenou Brožovu knihu „Základy fyzikálních měření“) nebo rovnice ovládající pohyb pérových vah (porovnej s řešenými úlohami 1 až 3) mají stejný matematický tvar

$$\ddot{x} + K_1 \dot{x} + K_2 x = K_3 \quad 3(2.47)$$

( $K_1, K_2, K_3$  konstanty) jako rovnice 3(2.4), pouze na pravé straně rovnic místo nuly je obecně nenulová konstanta  $K_3$ .

Má-li lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty nenulovou pravou stranu, liší se její obecné řešení od řešení stejné rovnice bez pravé strany pouze tím, že k obecnému řešení rovnice bez pravé strany se přičte jedno

partikulární řešení (tj. řešení bez volitelných konstant) rovnice s pravou stranou. Pro rovnici 3(2.47) je tímto jedním řešením konstantní hodnota

$$x = \frac{K_3}{K_2}, \quad 3(2.48)$$

jak se lze přesvědčit dosazením hodnoty 3(2.48) do rovnice 3(2.47). Obecné řešení rovnice 3(2.47) je součet řešení 3(2.11) rovnice 3(2.4) a jednoho řešení 3(2.48) rovnice 3(2.47), tedy

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{K_3}{K_2}. \quad 3(2.49)$$

V rovnici 3(2.49)  $C_1$  a  $C_2$  jsou volitelné konstanty a

$$\alpha_1 = -\frac{K_1}{2} + \left[ \left( \frac{K_1}{2} \right)^2 - K_2 \right]^{1/2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{K_1}{2} - \left[ \left( \frac{K_1}{2} \right)^2 - K_2 \right]^{1/2}$$

kořeny charakteristické rovnice  $\alpha^2 + K_1 \alpha + K_2 = 0$  příslušné rovnici 3(2.47) bez pravé strany.

Nenulová hodnota pravé strany rovnice 3(2.47) odpovídá v rovnici galvanometru momentu síly způsobenému nenulovým proudem protékajícím cívkou galvanometru, u pérových vah tíže váženého předmětu. Tyto nenulové pravé strany způsobí, že limita řešení 3(2.49) pro  $t \rightarrow \infty$  je rovna konstantě 3(2.48) a není nulová jako limita 3(2.15) řešení 3(2.11) rovnice 3(2.4). Fyzikálně říkáme, že rovnovážná poloha systému popsaného rovnicí 3(2.47) je  $x_r = K_3/K_2$  na rozdíl od nulové rovnovážné polohy  $x_r = 0$  systému popsaného rovnicí 3(2.4). V uvažovaných systémech se zpravidla určuje hodnota  $K_3$  (velikost proudu, tíha předmětu) ze změřené hodnoty  $x_r$  (výchylka galvanometru nebo vah). Způsob, jakým systém zaujímá rovnovážnou polohu, je popsán částí  $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$  řešení 3(2.49), tedy funkcí, jejíž analýzu jsme v tomto článku podrobně provedli. Na velikosti tlumení systému (galvanometru, vah apod.) záleží, zda rovnovážná poloha bude zaujímana pomalu (aperiodický stav), rychle (mezni aperiodický stav) nebo zda bude systém kolem rovnovážné polohy kmitat (tlumený harmonický kmit). U komerčně dodávaných běžných přístrojů, např. u různých ručkových ampérmetrů, voltmetrů, krámských vah, bývá systém tlumen tak, aby v provozních podmínkách byl blízko mezního aperiodického stavu, tj. aby rychle ukázal hodnotu měřené veličiny a nekmital kolem ní. U laboratorně užívaných systémů, např. u zrcátkových galvanometrů, je pro každý pokus nutno vhodné tlumení nastavit. Rozbor řešení 3(2.11) rovnice

3(2.4) provedený v tomto článku je teoretickým základem pro to, abychom takové vhodné nastavení systému mohli provést.

### 3.3 Vynucený harmonický kmit, rezonance, komplexní symbolika

Budeme nyní vyšetřovat případ, kdy na hmotný bod vázaný na přímku působí vedle elastické síly 3(2.1)  $F_E = -kx$  a odporující síly 3(2.2)  $F_V = -hv$  ještě další síla  $F_H$ , jejíž časový průběh je dán harmonickou funkcí

$$F_H = S \sin \Omega t. \quad 3(3.1)$$

Pohybová rovnice hmotného bodu o hmotnosti  $m$  je potom

$$m\ddot{x} = F_E + F_V + F_H = -kx - hv + S \sin \Omega t,$$

což je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty a s nenulovou pravou stranou. Můžeme ji zapsat ve tvaru

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{S}{m} \sin \Omega t. \quad 3(3.2)$$

V rovnici 3(3.2) jsme stejně jako v rovnici 3(2.4) užili označení  $\omega_0^2 = k/m$  a  $2\delta = h/m$ . Podle výkladu z konce minulého článku je obecným řešením rovnice 3(3.2) funkce

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + f(t), \quad 3(3.3)$$

kde  $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$  je řešení rovnice bez pravé strany, tedy řešení rovnice 3(2.4), a  $f(t)$  je jedno řešení celé rovnice 3(3.2). Je-li na pravé straně rovnice 3(3.2) harmonická funkce s frekvencí  $\Omega$ , je řešení  $f(t)$  dáno harmonickou funkcí se stejnou frekvencí  $\Omega$

$$f(t) = A \sin (\Omega t + \alpha). \quad 3(3.4)$$

Dosadíme-li funkci  $x = f(t)$  do rovnice 3(3.2), dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} -A\Omega^2 \sin (\Omega t + \alpha) + 2\delta A\Omega \cos (\Omega t + \alpha) + \omega_0^2 A \sin (\Omega t + \alpha) &= \\ &= \frac{S}{m} \sin \Omega t, \end{aligned}$$

kterou podle vzorců

$$\sin (\Omega t + \alpha) = \sin \Omega t \cos \alpha + \cos \Omega t \sin \alpha$$

a

$$\cos (\Omega t + \alpha) = \cos \Omega t \cos \alpha - \sin \Omega t \sin \alpha$$

lze po úpravě přepsat na tvar

$$\begin{aligned} & A[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \alpha - 2\delta\Omega \sin \alpha] \sin \Omega t + \\ & + A[(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta\Omega \cos \alpha] \cos \Omega t = \\ & = \frac{S}{m} \sin \Omega t . \end{aligned} \quad 3(3.5)$$

Má-li funkce  $f(t)$  být řešením rovnice 3(3.2) pro všechna  $t$ , musí rovnice 3(3.5) být splněna pro všechna  $t$ . Jelikož funkce  $\sin \Omega t$  a  $\cos \Omega t$  jsou lineárně nezávislé, lze rovnici 3(3.5) splnit pro všechna  $t$  pouze tehdy, když se budou rovnat číselné koeficienty u  $\sin \Omega t$  a  $\cos \Omega t$  na obou stranách rovnice 3(3.5). Tak dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} A[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \alpha - 2\delta\Omega \sin \alpha] &= \frac{S}{m}, \\ A[(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta\Omega \cos \alpha] &= 0 . \end{aligned} \quad 3(3.6)$$

Z druhé rovnice systému rovnic 3(3.6) dostáváme, předpokládáme-li  $A \neq 0$ , pro dosud neurčenou fázovou konstantu  $\alpha$  podmínku

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \quad 3(3.7)$$

Umocníme-li obě rovnice systému 3(3.6) na druhou a sečteme je, dostaneme po úpravě pro amplitudu  $A$  vyjádření

$$A = \frac{S}{m} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{-1/2} . \quad 3(3.8)$$

S hodnotami  $A$ ,  $\alpha$  danými rovnicemi 3(3.8) a 3(3.7) lze splnit rovnice 3(3.6), a tedy i rovnici 3(3.5) pro všechna  $t$ . Funkce  $f(t)$ , s amplitudou  $A$  danou rovnicí 3(3.8) a fázovou konstantou určenou rovnicí 3(3.7), je tedy jedním hledaným řešením celé (tj. včetně pravé strany) rovnice 3(3.2). Obecné řešení rovnice 3(3.2) dostaneme dosazením  $f(t)$  do 3(3.3)

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \\ & + \frac{S/m}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{1/2}} \sin \left( \Omega t + \operatorname{arctg} \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \right) . \end{aligned} \quad 3(3.9)$$

Část řešení 3(3.9)  $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$ , která je řešením rovnice 3(2.4), jsme podrobně rozebrali v předcházejícím článku. Tam jsme také ukázali, že tato část řešení konverguje k nule s rostoucím časem  $t$  (viz rovnici 3(2.15)). Po dostatečně

dlouhé době, neboli jak říkáme v ustáleném stavu, lze zanedbat vliv výrazu  $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$  na řešení 3(3.9) a za řešení v ustáleném stavu pokládat pouze funkci

$$x = \frac{S/m}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{1/2}} \sin\left(\Omega t + \arctg \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right). \quad 3(3.10)$$

Zajímá-li nás pohyb hmotného bodu bezprostředně po aplikaci síly 3(3.1), musíme znát jeho stav, tj. nejlépe jeho polohu a rychlost v okamžiku, kdy síla 3(3.1) byla aplikována. Z těchto počátečních podmínek můžeme pak určit konstanty  $C_1$  a  $C_2$  a získat řešení 3(3.9) rovnice 3(3.2) pro daný případ. Najdeme-li takové řešení, které zřejmě pro  $t \rightarrow \infty$  přechází v řešení 3(3.10), říkáme, že jsme našli řešení v přechodovém stavu. Dále se omezíme na vyšetřování pohybu hmotného bodu v ustáleném stavu.

Amplituda  $A$  3(3.8) ustáleného řešení 3(3.10) rovnice 3(3.2) je přímo úměrná výrazu  $S/m$ , tj. amplitudě  $S$  vynucující síly 3(3.1) připadající na jednotku hmotnosti pohybuujícího se hmotného bodu. Budeme-li dále pokládat veličiny  $S$ ,  $m$ ,  $\delta$ ,  $\omega_0$  za konstanty, zjistíme, že amplituda  $A$  podstatným způsobem závisí na frekvenci  $\Omega$ . Již zběžný pohled na rovnici 3(3.8) ukazuje, že při  $\Omega$  blízkém  $\omega_0$  a při malé hodnotě útlumové konstanty  $\delta$  může veličina  $A$  nabývat značných hodnot. Jev, kdy malá budící veličina způsobí velkou odezvu jiné veličiny, nazýváme *rezonanci*. Ve zde uvažovaném případě se jedná o rezonanci výchylky 3(3.10) způsobené budící silou 3(3.1). Rozebereme závislost 3(3.8) amplitudy  $A$  na frekvenci podrobněji. Vyjdeme ze vztahu

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} A = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left(\frac{S}{m}\right) [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{-1/2} = \frac{S}{\omega_0^2 m}. \quad 3(3.11)$$

Hodnota  $S/\omega_0^2 m$ , ke které se blíží amplituda  $A$  pro malé hodnoty budící frekvence  $\Omega$ , je rovna výchylce  $x_s = S/k$ , hmotného bodu z rovnovážné polohy, když na něj působí síla  $S$  stálé velikosti a elastická síla 3(2.1)  $F_E = -kx$ ; nazveme ji tedy *statická výchylka*. Extrém funkce  $A = A(\Omega)$  nastane, když

$$\frac{dA}{d\Omega} = \frac{(S/m) 2\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2)}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{3/2}} = 0. \quad 3(3.12)$$

Uvažujeme-li podle povahy veličiny pouze  $\Omega \geq 0$ , je podmínka 3(3.12) splněna pro

$$\Omega_1 = 0, \quad 3(3.13)$$

$$\Omega_r = (\omega_0^2 - 2\delta^2)^{1/2} \quad 3(3.14)$$

a v limitním případě

$$\Omega_2 \rightarrow \infty . \quad 3(3.15)$$

Frekvencím  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  odpovídá extrémní hodnota vždy. Extrém funkce  $A(\Omega)$  pro hodnotu  $\Omega = \Omega_r$  nastane pouze tehdy, je-li hodnota  $\Omega_r$  reálná, tedy je-li splněna podmínka

$$\omega_0 > \delta\sqrt{2} . \quad 3(3.16)$$

Hodnota  $\Omega_r$  je reálná i pro  $\omega_0 = \delta\sqrt{2}$ , ale v tom případě  $\Omega_r = 0$  splývá s  $\Omega_1$ . Srovnáme-li velikost  $A(\Omega_1)$ , tj. statické výchylky, a  $A(\Omega_r)$ , zjistíme z rovnice 3(3.8), že při splnění podmínky 3(3.16) je

$$A(\Omega_r) > A(\Omega_1) . \quad 3(3.17)$$

Dále z rovnice 3(3.8) plyne

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} A(\Omega) = 0 . \quad 3(3.18)$$

Při splnění podmínky 3(3.16) je tedy extrém funkce  $A(\Omega)$  při hodnotě  $\Omega = \Omega_r$  maximem. Říkáme, že pro  $\Omega = \Omega_r$  nastává *rezonance výchylky* a frekvenci  $\Omega_r$  říkáme *rezonanční frekvence*. Velikost rezonanční amplitudy je větší než statická výchylka.

V případě  $\delta \rightarrow 0$ , a tedy též podle 3(3.14)  $\Omega_r \rightarrow \omega_0$  plyne z rovnice 3(3.8)  $A(\Omega_r) \rightarrow \infty$ . Při malých hodnotách  $\delta$  rezonanční amplituda  $A(\Omega_r)$  značně převyšuje statickou výchylku 3(3.11). Často uvažovaný přibližný vztah, že rezonance nastává, když frekvence vynucující síly  $\Omega$  je rovna frekvenci  $\omega$  (definice 3(2.29)) vlastních kmitů soustavy, a tedy i frekvenci  $\omega_0$  netlumených kmitů, platí v dobrém přiblížení pro malá  $\delta$ , kdy je

$$\omega = (\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2} \doteq \omega_0 ; \quad \Omega_r = (\omega_0^2 - 2\delta^2)^{1/2} \doteq \omega_0 ,$$

a tedy

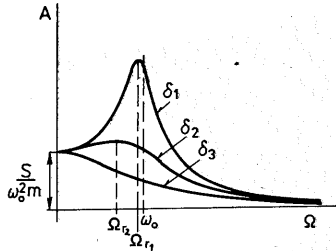
$$\Omega_r \doteq \omega \doteq \omega_0 . \quad 3(3.19)$$

Při přesném výpočtu je si však nutno uvědomit, že podle 3(3.14)

$$\Omega_r < \omega_0 . \quad 3(3.20)$$

Po provedené analýze můžeme zakreslit funkci  $A(\Omega)$  pro případ, kdy je splněna podmínka 3(3.16)  $\omega_0 > \delta\sqrt{2}$ , která je ostřejší než podmínka  $\omega_0 > \delta$  uvedená v minulém článku jako podmínka pro vznik tlumených kmitů. Křivka  $A(\Omega)$  má tvar znázorněný pro dvě hodnoty tlumicí konstanty  $\delta_1 < \delta_2$  na obr. 3.4. Tyto křivky se nazývají rezonančními křivkami výchylky (amplitudy).

Je-li splněna podmínka 3(3.16), má funkce  $A(\Omega)$  pro  $\Omega = 0$  lokální minimum. Není-li splněna podmínka 3(3.16), má funkce  $A(\Omega)$  pro  $\Omega = 0$  maximum, jak je znázorněno na obr. 3.4. křivkou označenou  $\delta_3$  ( $\delta_3\sqrt{2} > \omega_0$ ).



Obr. 3.4 Závislost amplitudy  $A$  vynucených kmitů na frekvenci  $\Omega$  pro tři různé hodnoty tlumící konstanty  $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$

Budeme nyní sledovat, jak závisí fázová konstanta  $\alpha$  stanovená rovnicí 3(3.7)

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

na frekvenci  $\Omega$  při konstantních hodnotách  $\delta$  a  $\omega_0$ . Pro  $\Omega = 0$  plyne z rovnice 3(3.7)  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , a tedy  $\alpha = \pm n\pi$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Přihlédneme-li k rovnicím 3(3.6), ze kterých byla rovnice 3(3.7) odvozena, zjistíme, že lichá  $n$  v rovnici  $\alpha = \pm n\pi$  musíme vypustit, protože první z rovnic 3(3.6) by pro ně přiřazovala kladnému  $S$  záporné  $A$ , což neodpovídá pojetí amplitudy jako kladné veličiny. Hodnota  $n = 0$  a sudé hodnoty  $n$  odpovídají fyzikálně stejnému případu, kdy výchylka

$$x = A \sin (\Omega t + \alpha) \quad 3(3.10)$$

a síla

$$F_H = S \sin \Omega t \quad 3(3.1)$$

jsou ve fázi. V dalším se omezíme na případ  $n = 0$ , tedy pro  $\Omega = 0$  položíme u funkce  $\alpha = \alpha(\Omega) = \operatorname{arctg} [-2\delta\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)]$

$$\alpha(0) = 0. \quad 3(3.21)$$

Pro frekvenci  $\Omega$  z oboru  $0 < \Omega < \omega_0$  je podle 3(3.7)  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ , a tedy vzhledem k volbě 3(3.21) fázová konstanta  $\alpha$  v intervalu  $-\pi/2 < \alpha < 0$ . V tomto oboru leží, je-li splněna podmínka 3(3.16), i rezonanční frekvence  $\Omega_r$ , pro kterou dosazením 3(3.14) do 3(3.7) zjistíme, že  $\operatorname{tg} \alpha = -\Omega_r/\delta$ , tedy

$$\alpha(\Omega_r) = \operatorname{arctg} \left( - \frac{\Omega_r}{\delta} \right). \quad 3(3.22)$$



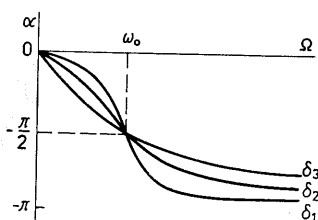
Pro  $\Omega \rightarrow \omega_0$  plyne z 3(3.7)  $\text{tg } \alpha \rightarrow -\infty$ , tedy

$$\alpha(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}. \quad 3(3.23)$$

Pro  $\Omega > \omega_0$  je výraz 3(3.7) kladný. Uvážíme-li volbu oboru (viz 3(3.21)) fázové konstanty  $\alpha$ , musíme hodnotám  $\text{tg } \alpha > 0$  přiřadit  $\alpha$  z intervalu  $-\pi < \alpha < -\pi/2$ . Pro  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $\text{tg } \alpha \rightarrow 0$ , a tedy

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \alpha = -\pi. \quad 3(3.24)$$

Průběh funkce  $\alpha = \alpha(\Omega) = \text{arctg} [-2\delta\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)]$  je znázorněn pro tři různé hodnoty tlumicí konstanty  $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$  na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Frekvenční ( $\Omega$ ) závislost fázového posunutí ( $\alpha$ ) vynucených kmitů oproti vynucující síle pro tři různé hodnoty tlumicí konstanty  $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$

Popíšeme kvalitativně výsledky získané při sledování vztahu mezi vynucující silou  $F_H$  3(3.1) a vynuceným kmitem v ustáleném stavu 3(3.10), je-li tlumení  $\delta$  malé. Při malých frekvencích  $\Omega$  vynucující síly ve srovnání s frekvencí  $\omega_0$  se hmotný bod pohybuje přibližně ve fázi s vynucující silou a amplituda jeho kmitů je blízká statické výchylce 3(3.11). Lze říci, že elastická síla 3(2.1) je rozhodující pro průběh pohybu v tomto oboru frekvencí. V oblasti rezonance, tj. pro frekvence  $\Omega \simeq \omega_0$ , se výchylka fázově zpožďuje o  $\pi/2$  za budící silou  $F_H$ . Budící síla  $F_H$  je přibližně ve fázi s rychlostí pohybu hmotného bodu a urychluje jej v nevhodnější fázi pohybu. Tím lze vysvětlit velké hodnoty amplitudy kmitu při rezonanci. Je-li frekvence  $\Omega$  vysoká ve srovnání s frekvencí  $\omega_0$ , fázové zpoždění výchylky za budící silou se blíží hodnotě  $\pi$  a amplituda kmitů klesá k nule. Velikost zrychlení harmonického kmitu je podle 3(1.8) úměrná  $\Omega^2$  a amplitudě kmitu. Vynucující síla, jejíž amplitudu  $S$  pokládáme za frekvenčně nezávislou, je schopna realizovat jen omezené hodnoty zrychlení hmotného bodu o nenulové hmotnosti  $m$ . Klesání amplitudy  $A$  vynucených kmitů k nule se vzrůstající frekvencí je takto zcela pochopitelné.

Řešení rovnice 3(3.2) v ustáleném stavu lze nalézt rychleji, užijeme-li reprezen-

tace kmitů komplexními čísly. Harmonický kmit  $A \sin(\omega t + \alpha)$  lze reprezentovat komplexním číslem  $A e^{i(\omega t + \alpha)}$ , stručně zapíšeme

$$A \sin(\omega t + \alpha) \rightarrow A e^{i(\omega t + \alpha)}. \quad 3(3.25)$$

Komplexní číslo  $A e^{i(\omega t + \alpha)}$  ( $A$  reálné číslo) má reálnou i imaginární část rovnou harmonickému kmitu

$$A e^{i(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + iA \sin(\omega t + \alpha). \quad 3(3.26)$$

V reprezentaci 3(3.25) můžeme pravou stranu rovnice 3(3.2) ( $S/m$ )  $\sin \Omega t$  nahradit komplexním číslem ( $S/m$ )  $e^{i\Omega t}$

$$\frac{S}{m} \sin \Omega t \rightarrow \frac{S}{m} e^{i\Omega t}. \quad 3(3.27)$$

Ustálené řešení rovnice 3(3.2), které jsme hledali ve tvaru 3(3.4)  $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ , budeme v komplexní reprezentaci hledat ve tvaru  $\mathcal{X} = A e^{i(\Omega t + \alpha)}$  (komplexní čísla budou značena psacím písmem-skriptem)

$$A \sin(\Omega t + \alpha) \rightarrow A e^{i(\Omega t + \alpha)}. \quad 3(3.28)$$

Dosadíme-li komplexní výrazy do rovnice 3(3.2), přičemž zřejmě  $d\mathcal{X}/dt = i\Omega A e^{i(\Omega t + \alpha)}$  a  $d^2\mathcal{X}/dt^2 = -\Omega^2 A e^{i(\Omega t + \alpha)}$ , dostáváme místo rovnice 3(3.5) rovnici

$$-\Omega^2 A e^{i(\Omega t + \alpha)} + i 2\delta\Omega A e^{i(\Omega t + \alpha)} + \omega_0^2 A e^{i(\Omega t + \alpha)} = \frac{S}{m} e^{i\Omega t},$$

která po vydělení nenulovým výrazem  $e^{i(\Omega t + \alpha)}$  a vytknutí  $A$  přejde na tvar

$$A(-\Omega^2 + \omega_0^2 + i 2\delta\Omega) = \frac{S}{m} e^{-i\alpha}. \quad 3(3.29)$$

Komplexní číslo v závorce na levé straně rovnice označíme  $\mathcal{K}$ , tedy

$$\mathcal{K} = \omega_0^2 - \Omega^2 + i 2\delta\Omega, \quad 3(3.30)$$

a užijeme-li zápisu komplexního čísla  $\mathcal{K}$  ve tvaru

$$\mathcal{K} = |\mathcal{K}| e^{i\beta} = K e^{i\beta}, \quad 3(3.31)$$

kde

$$|\mathcal{K}| = K = [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{1/2} \quad 3(3.32)$$

a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad 3(3.33)$$

můžeme rovnici 3(3.29) přepsat na tvar

$$AK e^{i\beta} = \frac{S}{m} e^{-i\alpha} . \quad 3(3.34)$$

Z rovnice 3(3.34), jelikož  $A$ ,  $K$  a  $S/m$  jsou reálná čísla, plyne

$$A = \frac{S}{m} K^{-1} = \frac{S}{m} [\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{-1/2} \quad 3(3.35)$$

a

$$\beta = -\alpha ,$$

odkud

$$\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{tg} \beta = - \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \quad 3(3.36)$$

Rovnice 3(3.36) je shodná s rovnicí 3(3.7) a rovnice 3(3.35) s rovnicí 3(3.8). Tyto rovnice udávají, vrátíme-li se v reprezentaci 3(3.28) zpět k reálné funkci  $x = A \sin (\Omega t + \alpha)$ , hledané hodnoty  $A$  a  $\alpha$ . Uvědomíme-li si, že užité úpravy jsou elementárními postupy algebry komplexních čísel, vidíme, že nalezení hodnot  $A$  a  $\alpha$  je při užití komplexní reprezentace snazší, než při výše uvedeném přímém postupu.

Ustálené řešení rovnice 3(3.2) přiřazuje harmonickému kmitu na pravé straně rovnice harmonický kmit téže frekvence, ale jiné amplitudy a jiné fáze. Vidíme, že při výše prováděných reprezentacích nebyl výraz  $e^{i\Omega t}$  pro hledané řešení podstatný. Máme-li lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou rovnou harmonické funkci  $F(t) = F_0 \sin (\Omega t + \gamma)$ , tj. rovnici typu 3(3.2)

$$\ddot{x} + K_1\dot{x} + K_2x = F_0 \sin (\Omega t + \gamma) , \quad 3(3.2')$$

můžeme ustálené řešení této rovnice hledat tak, že jak funkci  $F_0 \sin (\Omega t + \gamma)$ , tak ustálené řešení, které, jak víme, má tvar  $x = X_0 \sin (\Omega t + \alpha)$ , můžeme reprezentovat časově neproměnnými komplexními čísly  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{X}$  následujícím způsobem

$$F_0 \sin (\Omega t + \gamma) \rightarrow \mathcal{F} = F_0 e^{i\gamma} , \quad 3(3.37)$$

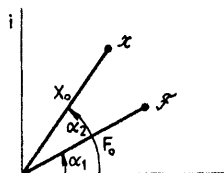
$$X_0 \sin (\Omega t + \alpha) \rightarrow \mathcal{X} = X_0 e^{i\alpha} . \quad 3(3.38)$$

Komplexní čísla  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{X}$  jsou na obr. 3.6 znázorněna v rovině komplexních čísel. Jejich vzájemný vztah lze vyjádřit tak, že pokládáme komplexní číslo  $\mathcal{F}$  za  $\mathcal{L}$ -násobek komplexního čísla  $\mathcal{X}$ ,

$$\mathcal{X}\mathcal{L} = \mathcal{F} . \quad 3(3.39)$$

Hodnotu komplexního čísla  $\mathcal{L} = L_0 e^{i\beta}$  lze získat řešením rovnice 3(3.2'); postupem stejným, jakým bylo určeno komplexní číslo  $\mathcal{X}$  při řešení rovnice 3(3.2), získáme

$$\mathcal{L} = L_0 e^{i\beta} = K_2 - \Omega^2 + i\Omega K_1. \quad 3(3.40)$$



Obr. 3.6 Znárodnění čísel  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{F}$  v rovině komplexních čísel

Hodnota  $\mathcal{L}$  závisí pouze na konstantách  $K_1, K_2$  rovnice 3(3.2') a na frekvenci  $\Omega$ . Z rovnice 3(3.39) lze pak rychle, při známé pravé straně  $F$  rovnice 3(3.2'), určit řešení  $x$  rovnice pro různé frekvence  $\Omega$  a případně hledat, jak řešení závisí na konstantách  $K_1, K_2$ . Někdy též podle rovnice 3(3.39) určíme neznámé  $F$  ke známému  $x$ . Pro konkrétní řešení problémů rozepíšeme rovnici 3(3.39) na rovnici

$$X_0 L_0 = F_0, \quad 3(3.41)$$

kteřá platí mezi absolutními hodnotami komplexních čísel  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{F}$  a na rovnici

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad 3(3.42)$$

kteřá platí mezi jejich argumenty. Hodnotu  $L_0$  v rovnici 3(3.41) získáme jako absolutní hodnotu  $[(K_2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 K_1^2]^{1/2}$  komplexního čísla 3(3.40) a argument  $\beta$  stanovíme z rovnice  $\operatorname{tg} \beta = \Omega K_1 / (K_2 - \Omega^2)$ , kteřá vyjadřuje známou skutečnost, že tangens argumentu komplexního čísla je poměrem jeho imaginární a reálné části.

V konkrétním případě rovnice 3(3.2) je komplexní číslo  $\mathcal{F} = S/m$  reálné, tedy  $\gamma = 0$ . Komplexní číslo  $\mathcal{X} = A e^{+i\alpha}$  a komplexní číslo  $\mathcal{L}$  je rovno číslu  $\mathcal{X}$  zavedenému rovnici 3(3.30). Rovnice 3(3.39) dává v tomto konkrétním případě

$$A e^{+i\alpha} \mathcal{X} = \frac{S}{m}, \quad 3(3.43)$$

což je rovnice shodná s rovnici 3(3.29). Postup, jak z rovnice 3(3.29) byly získány rovnice 3(3.35) pro amplitudu ustálených kmitů a 3(3.36) pro fázové posunutí vynucující síly a vynuceného kmitu, ukazuje, jak se získávají z rovnice 3(3.39) rovnice potřebné pro konkrétní řešení problémů.

Řada fyzikálních problémů vede na řešení rovnice typu 3(3.2'). Máme-li např. obvod střídavého proudu s odpory, indukčnostmi a kapacitami, budící funkci na pravé straně rovnice 3(3.2') je střídavé napětí a na levé straně rovnice místo výchylky  $x$  vystupuje proud protékající obvodem. Hodnoty konstant  $K_1$  a  $K_2$  jsou dány způsobem řazení a velikostmi odporů, indukčností a kapacit. Komplexní číslo  $\mathcal{L}$  se v tomto případě nahradí obdobně zavedenou komplexní impedancí obvodu  $\mathcal{L}$ . Komplexní čísla v charakteristice systémů podrobených harmonické budící funkci se užívají též při řešení viskoelastických problémů, kde zavádíme komplexní elastické moduly, při vyšetřování dielektrických vlastností látek v střídavých elektrických polích, pro jejichž charakteristiku zavádíme komplexní permitivitu, a v řadě dalších případech.

Ve všech uvedených systémech mohou analogicky ke zde podrobně vyšetřenému mechanickému případu nastat rezonanční jevy. Nejznámější jsou rezonanční jevy v elektrických obvodech střídavého proudu, kde při určitém seskupení indukčností a kapacit nastávají při vhodných frekvencích rezonance proudu nebo napětí. Rezananční jevy se projevují také ve složitějších mechanických systémech, než je ten, který je popsán rovnicí 3(3.2'). Máme-li nějakou složitější mechanickou konstrukci, např. dopravní prostředek, může být určitá část této konstrukce vybudena slabou vnější silou vhodné frekvence k velkým výchylkám. Omezit takové, většinou nežádoucí, rezonance je úkolem konstruktérů. Při konstrukci dopravních prostředků, na které z vnějšku i od pohybujících součástí motoru působí budící síly nejrůznějších frekvencí, bývá takový úkol dosti obtížný.

### 3.4 Energie harmonických kmitů, činitel jakosti $Q$

Vypočteme nejprve celkovou mechanickou energii  $W_m$  hmotného bodu o hmotnosti  $m$ , který koná harmonický kmit

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) + x_0. \quad 3(1.1)$$

Uvážíme-li, že rychlost pohybu 3(1.1) je  $v = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$ , dostáváme pro kinetickou energii  $W_k = \frac{1}{2}mv^2$  hmotného bodu vyjádření

$$W_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad 3(4.1)$$

Síla  $F$  působící harmonický pohyb 3(1.1) je rovna  $F = ma$ , kde podle 3(1.9)  $a = -\omega^2(x - x_0)$ , tedy

$$F = -m\omega^2(x - x_0) = -k(x - x_0). \quad 3(4.2)$$

V druhé části rovnice 3(4.2) jsme ve shodě s rovnicí 3(1.13) položili  $k = m\omega^2$ . Použijeme-li rovnice 2(4.10) a 2(3.2) k výpočtu potenciální energie hmotného bodu v místě  $x$  silového pole 3(4.2), dostáváme

$$W_p = \int_0^x k(\xi - x_0) d\xi + W_{p_0} = \frac{1}{2} kx^2 - kx_0x + W_{p_0},$$

kde  $W_{p_0}$  je potenciální energie v místě  $x = 0$ . Integrační proměnnou jsme označili  $\xi$ , aby nedošlo k záměně s výchylkou  $x$  hmotného bodu. Položíme-li  $W_p = 0$  pro  $x = x_0$ , dostáváme  $0 = \frac{1}{2}kx_0^2 - kx_0^2 + W_{p_0}$ , odkud plyne  $W_{p_0} = \frac{1}{2}kx_0^2$ , a tedy

$$W_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad 3(4.3)$$

Výsledek 3(4.3) lze získat rychleji, položíme-li bod, vůči kterému potenciální energii počítáme, do rovnovážné polohy  $x_0$  kmitu 3(1.1) a potenciální energii v tomto bodě pokládáme za nulovou. Potom přímo

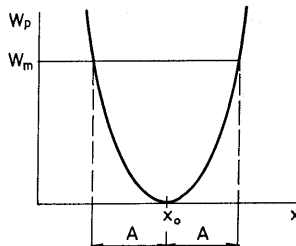
$$W_p = \int_{x_0}^x k(\xi - x_0) d\xi = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

Na obr. 3.7 je znázorněna funkce 3(4.3)  $W_p = W_p(x)$ , tj. závislost potenciální energie příslušné silovému poli 3(4.2), ve kterém hmotný bod koná harmonický kmit. Závislost je kvadratická, grafické znázornění je parabola s vrcholem v bodě  $x = x_0$   $W_p = 0$ . Dosadíme-li do 3(4.3) za  $(x - x_0)$  z 3(1.1), dostaneme

$$W_p = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha). \quad 3(4.4)$$

Uvědomíme-li si, že  $k = m\omega^2$ , a přičteme k  $W_p$  rovnici 3(4.1) dané  $W_k$ , dostáváme pro celkovou mechanickou energii  $W_m$  hmotného bodu konajícího harmonický kmit vyjádření

$$W_m = W_p + W_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad 3(4.5)$$



Obr. 3.7 Potenciální energie  $W_p$  silového pole  $F = -kx$

Pohybuje-li se hmotný bod o známé hmotnosti  $m$  v silovém poli 3(4.2) se zadanou konstantou  $k$ , je rovnicí 3(1.13) určena frekvence  $\omega$  jeho kmitu. Amplituda  $A$  kmitu je dána celkovou mechanickou energií  $W_m$  hmotného bodu. (V případě, že by byla zvolena nenulová potenciální energie  $W_{p_0}$  v rovnovážné poloze kmitu, amplituda by byla určena rozdílem energií  $W_m - W_{p_0}$ ). Udáním potenciální energie silového pole a celkové mechanické energie hmotného bodu je určen harmonický kmit hmotného bodu až na fázovou konstantu  $\alpha$ , která těmito údaji určena není. Na obr. 3.7 je znázorněna celková mechanická energie  $W_m$  hmotného bodu a jí odpovídající amplituda kmitů  $A$ . V okamžiku, kdy je celková energie  $W_m$  rovna potenciální energii  $W_p$ , je kinetická energie, a tím i rychlost hmotného bodu nulová a hmotný bod zaujímá svou maximální výchylku – amplitudu  $A$ .

Z výrazu 3(4.5) je zřejmé, že celková mechanická energie harmonického kmitu je konstantní, na čase nezávislá veličina. Takovýto závěr *nelze* vyslovit pro tlumený harmonický kmit

$$x = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha). \quad 3(2.33)$$

Celkovou mechanickou energii hmotného bodu o hmotnosti  $m$ , který koná tlumený harmonický kmit 3(2.33) kolem rovnovážné polohy  $x_0 = 0$ , zapíšeme

$$W_m = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad 3(4.6)$$

neboť potenciální energie je pro tlumený harmonický kmit též dána vztahem 3(4.3). Vyjádříme časovou změnu energie 3(4.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_m &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right] = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt} = \\ &= \frac{dx}{dt} \left( m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \right). \end{aligned}$$

Výraz  $m(d^2x/dt^2) + kx$  v závorce posledního tvaru úpravy je však podle 3(2.3) roven odporující disipativní síle 3(2.2)  $F_v = -h(dx/dt)$ . Můžeme tedy napsat vztah

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{dx}{dt} F_v = -h \left( \frac{dx}{dt} \right)^2, \quad 3(4.7)$$

který udává rychlost ubývání ( $h > 0$ ) celkové mechanické energie tlumeného kmitu.

Působením disipativní síly  $F_v$  se energie rozptyluje i v případě vynucených harmonických kmitů. V ustáleném stavu je však úbytek energie doplněn prací

vykonanou na hmotný bod vynucující silou 3(3.1) a průměrná energie kmitu během jednoho cyklu je s časem stálá. Vypočteme energii  $\Delta_T W_m$  rozptýlenou během jednoho kmitu působením disipativní síly 3(2.2), když hmotný bod hmotnosti  $m$  koná vynucený kmit 3(3.10)  $x = A \sin(\Omega t + \alpha)$ . Podle 3(4.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta_T W_m &= -h \int_0^T \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt = hA^2\Omega^2 \int_0^T \cos^2(\Omega t + \alpha) dt = \\ &= -hA^2\Omega^2 \frac{T}{2} \end{aligned} \quad 3(4.8)$$

a zavedeme-li vyjádření  $h = 2\delta m$  užitě v rovnici 3(2.4), můžeme dále psát

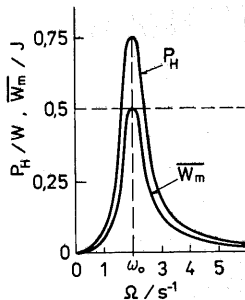
$$\Delta_T W_m = -\delta mA^2\Omega^2 T = -2\pi\delta mA^2\Omega. \quad 3(4.9)$$

Při poslední úpravě jsme pro dobu kmitu  $T$  užili elementární vztah  $T = 2\pi/\Omega$ . Stejně velkou hodnotu energie, ovšem opačného znaménka, bychom získali, kdybychom počítali práci vykonanou během jednoho kmitu vynucující silou 3(3.1) na hmotný bod konající pohyb 3(3.10). Průměrný výkon  $P_V$  disipativní síly  $F_V$  během jednoho kmitu a průměrný výkon  $P_H$  vynucující síly  $F_H$  jsou pak dány vztahy

$$P_H = -P_V = -\frac{\Delta_T W_m}{T} = \delta mA^2\Omega^2. \quad 3(4.10)$$

Dosadíme-li za  $A$  podle 3(3.8), dostáváme závislost  $P_H$  i  $P_V$  na frekvenci  $\Omega$  vynucující síly  $F_H$

$$P_H = -P_V = \frac{S^2\Omega^2\delta}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]}. \quad 3(4.11)$$



Obr. 3.8 Rezonanční křivka průměrného výkonu  $P_H$  vynucující síly, tj. absorbovaného výkonu a průměrné celkové energie  $\overline{W}_m$  vynuceného kmitu. Pro konstrukci křivek bylo užito hodnot  $S = 1 \text{ N}$ ,  $\omega_0 = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 0,75 \text{ s}^{-1}$  a  $m = 1 \text{ kg}$ . Význam symbolů je uveden v textu.



Funkce  $P_H(\Omega) = -P_V(\Omega)$  daná rovnicí 3(4.11) je nulová pro  $\Omega = 0$  a pro  $\Omega \rightarrow \infty$ . Položíme-li derivaci funkce rovnou nule, zjistíme, že další extrém nastane pro  $\Omega = \omega_0$ . Vzhledem k tomu, že funkce 3(4.11) je vždy nezáporná, je tento extrém maximem. Porovnáme-li rovnici 3(4.10) s rovnicí 3(4.5), vidíme, že stejný průběh jako funkce  $P_H(\Omega)$  má i funkce  $\overline{W}_m(\Omega)$ , udávající průměrnou mechanickou energii vynuceného harmonického kmitu. Okamžitá hodnota  $W_m(\Omega)$  při přítomnosti disipativní a vynucující síly kolísá. Funkce  $P_H(\Omega)$  a  $W_m(\Omega)$ , které se nazývají rezonanční křivka absorbovaného výkonu, respektive rezonanční křivka energie kmitu, jsou znázorněny na obr. 3.8. *Rezonance celkové mechanické energie  $\overline{W}_m$  kmitajícího hmotného bodu a rezonance absorbovaného výkonu  $P_H$  nastávají, nezávisle na velikosti tlumení, přesně, když*

$$\Omega = \omega_0, \quad 3(4.12)$$

na rozdíl od rezonance výchylky, která nastává při frekvenci (viz 3(3.14))

$$\Omega_r = (\omega_0^2 - 2\delta^2)^{1/2}, \quad 3(4.13)$$

a je tedy působením tlumení  $\delta$  posunuta od frekvence netlumených kmitů  $\omega_0$  do oblasti nižších frekvencí.

Poměr průměrné energie kmitu  $\overline{W}_m$  při rezonanci k energii rozptýlené během jednoho cyklu  $\Delta_T W_m$  je důležitou charakteristikou rezonujícího systému;  $2\pi$ -násobek tohoto poměru je označován jako *činitel jakosti  $Q$*

$$Q = \frac{2\pi\overline{W}_m}{|\Delta_T W_m|}. \quad 3(4.14)$$

Dosadíme-li za  $\overline{W}_m$  podle 3(4.5)  $\frac{1}{2}m\Omega^2 A^2$  a za  $|\Delta_T W_m|$  podle 3(4.9)  $2\pi\delta m A^2 \Omega$ , dostaneme pro vynucený harmonický kmit při rezonanci energie, tj. podle 3(4.12) při  $\Omega = \omega_0$ , jednoduché vyjádření činitele jakosti

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}, \quad 3(4.15)$$

kteří ukazuje nepřímou úměrnost mezi  $Q$  a tlumením kmitu  $\delta$ . Celkovou mechanickou energii  $\overline{W}_m$  kmitu při rezonanci můžeme podle 3(4.14) zapsat

$$\overline{W}_m = \frac{1}{2\pi} Q |\Delta_T W_m|. \quad 3(4.16)$$

Celková energie  $\overline{W}_m$  kmitu je podle 3(4.16) při velké hodnotě činitele jakosti  $Q$ , která je u řady rezonujících systémů běžná, podstatně větší než energie  $|\Delta_T W_m|$  dodávaná kmitu během jednoho cyklu. Velkou celkovou energii získá kmit

postupně v přechodové době, kdy kmitání dosahuje ustáleného stavu. Možnost udržovat vysokou energii  $\bar{W}_m$  systému kmitajícího v rezonanci malou dodávanou energií  $|\Delta_T \bar{W}_m|$  je často technicky využívána. Další charakteristikou rezonačního děje je šířka rezonanční křivky. Čím užší je rezonanční křivka, tím výraznější je rezonance. Zavedeme-li jako charakteristiku profilu rezonanční křivky (např. křivek z obr. 3.8) její šířku v poloviční výšce, lze ukázat, že tato šířka je nepřímo úměrná činiteli jakosti  $Q$ . Veličina  $Q$  udává též při malém tlumení v dobrém přiblížení poměr amplitudy  $A(\omega_0)$  vynuceného harmonického kmitu (viz 3(3.8)) při rezonanci ku statické výchylce 3(3.11). Z právě uvedeného je zřejmé, proč veličina  $Q$  se nazývá činitelem jakosti kmitajícího systému.

### 3.5 Skládání kmitů

Rovnici 3(3.2) pro vynucený harmonický kmit napíšeme v poněkud pozměněné a obecnější formě

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F(t) . \quad 3(5.1)$$

Na pravé straně rovnice 3(5.1) je obecná funkce  $F(t)$  udávající časový průběh síly a konstanty  $h$  a  $k$  mají obvyklý význam daný rovnicemi 3(2.1) a 3(2.2). Je-li funkce  $x_1(t)$  řešením rovnice 3(5.1) pro zadanou sílu  $F_1(t)$  a funkce  $x_2(t)$  řešením téže rovnice pro sílu  $F_2(t)$ , je funkce  $x_1(t) + x_2(t)$  řešením rovnice 3(5.1) pro zadanou sílu  $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ . Sečteme-li rovnice

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 + kx_1 &= F_1(t) , \\ m\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 + kx_2 &= F_2(t) , \end{aligned}$$

vyjadřující, že  $x_1$ , resp.  $x_2$  jsou pro  $F_1(t)$ , resp.  $F_2(t)$  řešením rovnice 3(5.1), dostaneme

$$m \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + h \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t),$$

a tím je dokázáno shora vyslovené tvrzení. Říkáme, že pro pohyb hmotného bodu, který je popsán rovnicí 3(5.1), platí *princip superpozice*. Princip superpozice je těsně svázán s linearitou rovnice 3(5.1). Nahradíme-li v ní např. člen  $kx$  členem  $kx^2$ , tedy uvažujeme-li rovnici

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx^2 = F(t) , \quad 3(5.2)$$

lze se snadno přesvědčit, že princip superpozice neplatí. Je-li funkce  $x_1(t)$  řešením rovnice 3(5.2) pro sílu  $F_1(t)$  a funkce  $x_2(t)$  řešením téže rovnice pro sílu  $F_2(t)$ , není funkce  $x_1(t) + x_2(t)$  řešením rovnice 3(5.2) pro sílu  $F_1(t) + F_2(t)$ .

Princip superpozice je často užíván v různých oblastech fyziky a vždy úzce souvisí s linearitou sledovaných problémů. Obecně lze jejich obsah vyslovit tak, že dva podněty při společném působení vyvolávají reakci rovnou součtu reakcí, jaké by podněty dávaly při samostatném působení.

Platí-li pro rovnici 3(5.1) princip superpozice, je snadné dokázat, že platí i pro rovnici 3(3.2). Řešením rovnice 3(3.2) v ustáleném případě jsou harmonické kmity. Působí-li na hmotný bod dvě různé vynucující harmonické síly

$$F_{H_1} = S_1 \sin \omega_1 t^\circ$$

a

$$F_{H_2} = S_2 \sin \omega_2 t,$$

které samostatně vyvolávají v ustáleném případě harmonické kmity

$$x_1 = A_1 \sin (\omega_1 t + \alpha_1)$$

a

$$x_2 = A_2 \sin (\omega_2 t + \alpha_2),$$

jejich společným působením vznikne podle principu superpozice pohyb  $x(t)$  daný rovnicí

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin (\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin (\omega_2 t + \alpha_2). \quad 3(5.3)$$

Funkce  $x(t)$  daná rovnicí 3(5.3) vznikne sečtením dvou kmitů probíhajících podél jedné přímky. Říkáme, že rovnice 3(5.3) popisuje *skládání dvou kmitů stejného směru*. S úlohou skládat kmity se nesetkáváme jenom při vyšetřování pohybu hmotného bodu, ale též, když skládáme elektrické kmity, když vyšetřujeme interferenci vlnění v jednom místě prostoru a v řadě dalších případů. I na tyto případy lze aplikovat, ověříme-li platnost příslušných superpozičních principů, výsledky, které dále odvodíme pro skládání kmitů hmotného bodu.

Určíme tvar funkce  $x(t)$  dané rovnicí 3(5.3) pro dva speciální případy. Nejprve složíme dva kmity

$$x_1 = A_1 \sin (\omega t + \alpha_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin (\omega t + \alpha_2),$$

které mají stejnou frekvenci  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , různou amplitudu  $A_1 \neq A_2$  a různou fázi (pro fázové konstanty platí nerovnost  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ). Dostáváme

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin (\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin (\omega t + \alpha_2) = \\ &= A_1 \sin \omega t \cos \alpha_1 + A_1 \cos \omega t \sin \alpha_1 + A_2 \sin \omega t \cos \alpha_2 + \\ &\quad + A_2 \cos \omega t \sin \alpha_2 = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + \\ &\quad + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t, \end{aligned}$$

a tedy podle vztahů 3(1.6)

$$x = A \sin (\omega t + \alpha),$$

kde

$$\begin{aligned} A &= [(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2]^{1/2} = \\ &= [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2} \end{aligned} \quad 3(5.4)$$

a

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad 3(5.5)$$

Složením dvou kmitů stejné frekvence vznikne kmit téže frekvence, jehož amplituda je dána rovnicí 3(5.4) a fázová konstanta rovnicí 3(5.5). Je-li  $\alpha_1 = \alpha_2$ , má výsledný kmit amplitudu rovnou součtu amplitud výchozích kmitů  $A = A_1 + A_2$  a fázovou konstantu  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ , jak plyne v tomto speciálním případě z rovnic 3(5.4) a 3(5.5). Nulovou hodnotu může amplituda  $A$  daná rovnicí 3(5.4) nabýt pouze, když  $\cos (\alpha_2 - \alpha_1) = -1$ , tedy když  $\alpha_2 - \alpha_1 = (2k - 1)\pi$ , kde  $k$  je celé číslo. Skládají-li se dva kmity stejné amplitudy ( $A_1 = A_2$ ) s rozdílem fázových konstant  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  rovným např.  $\pi$ , žádná výchylka nenastane, kmity se vzájemně ruší.

Jako druhý vyšetříme případ skládání dvou kmitů, které nemají stejnou frekvenci. Obecný případ daný rovnicí 3(5.3) zjednodušíme předpokladem o rovnosti amplitud obou kmitů  $A_1 = A_2 = A$ . Potom  $x = A \sin (\omega_1 t + \alpha_1) + A \sin (\omega_2 t + \alpha_2)$  a použijeme-li vzorec pro součet sinů dvou různých úhlů

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

dostáváme

$$x = 2A \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right). \quad 3(5.6)$$

Liší-li se značně  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , je výraz 3(5.6) nepřehledný. Jsou-li však frekvence kmitů  $\omega_1$  a  $\omega_2$  sobě blízké, budeme předpokládat  $\omega_1 > \omega_2$ , je frekvence  $(\omega_1 - \omega_2)/2$  podstatně nižší než frekvence  $(\omega_1 + \omega_2)/2$ . Na výraz 3(5.6) lze pak pohlížet jako na harmonický kmit

$$x = A(t) \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right) \quad 3(5.7)$$

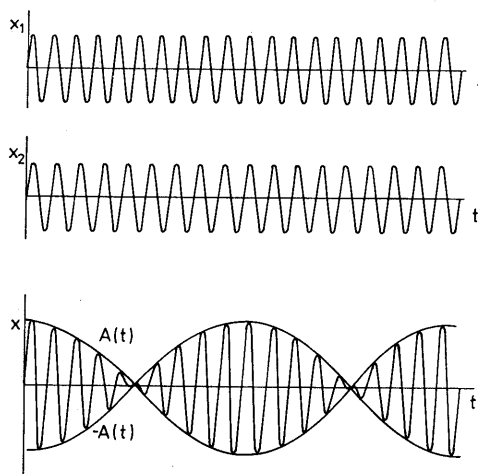
o frekvenci  $(\omega_1 + \omega_2)/2$ , kde místo amplitudy je časově proměnná funkce

$$A(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \alpha\right). \quad 3(5.8)$$

Frekvence  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  je střední frekvence kmitů  $x_1$  a  $x_2$ , jejichž složením pohyb 3(5.7) vznikl, a  $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ . Funkce  $A(t)$  daná rovnicí 3(5.8) je harmonickou funkcí o frekvenci rovné poloviční hodnotě rozdílu frekvencí  $\omega_1$  a  $\omega_2$  kmitů  $x_1$  a  $x_2$ . Na obr. 3.9 jsou znázorněny původní kmitů  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  a výsledná funkce  $x(t)$ . Obálku  $x(t)$  tvoří funkce  $A(t)$  a  $-A(t)$ . Pokládáme-li, jak již bylo výše řečeno, funkci  $x(t)$  přibližně za kmit s proměnnou amplitudou, můžeme vyslovit závěr: *Složením dvou kmitů blízké frekvence vznikne kmit střední frekvence, jehož amplituda se mění s rozdílovou frekvencí*

$$\omega_R = \omega_1 - \omega_2 \quad 3(5.9)$$

obou původních kmitů. Funkce  $A(t)$  na rozdíl od skutečné amplitudy může být kladná i záporná. Maximální amplituda kmitu  $x$  daného rovnicí 3(5.7) nastane v okolí (časovém) jak největší kladné, tak i záporné hodnoty funkce



Obr. 3.9 Skládání kmitů stejného směru a blízkých frekvencí – rázy

3(5.8). Frekvence změny amplitudy kmitu 3(5.7) je tedy  $\omega_1 - \omega_2$ , a ne  $(\omega_1 + \omega_2)/2$ , jak by naznačoval zběžný pohled na rovnici 3(5.8) (viz též obr. 3.9.). Říkáme, že složením dvou kmitů blízké frekvence vznikají *rázy*

o frekvenci rázů dané rovnicí 3(5.9). Pro nominální\*) frekvenci rázů  $\nu_R = \omega_R/2\pi$ , tj. pro počet zesílení a zeslabení kmitu 3(5.7) za jednotku času, platí zřejmě vztah

$$\nu_R = \nu_1 - \nu_2, \quad 3(5.10)$$

kde  $\nu_1$  a  $\nu_2$  jsou nominální frekvence kmitů  $x_1$  a  $x_2$ .

Vznik rázů lze pozorovat např. při současném znění dvou blízkých akustických tónů. Čím bližší tóny, tím je frekvence rázů nižší. Při rovnosti frekvencí obou tónů rázy vymizí. Tohoto jevu se užívá při ladění hudebních nástrojů. Obdobně lze sladovat frekvence dvou generátorů střídavých elektrických napětí. Přivedeme-li např. napětí ze dvou generátorů přibližně stejné frekvence na svislé vychylující destičky osciloskopu, získáme na obrazovce obraz odpovídající funkci  $x(t)$  znázorněné na obr. 3.9. Při sladování frekvence se prodlužují vzdálenosti mezi uzlovými body obálky funkce  $x(t)$ , dalším sladováním dochází již pouze k pomalému pulsování amplitudy kmitů o frekvenci  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  na obrazovce a úplné sladění by se projevilo klidným obrazem kmitu o frekvenci  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

Když jsme ukázali, jak lze skládat kmity působící podél jedné přímky, přistoupíme nyní ke *skládání kmitů vzájemně kolmých*. Koná-li hmotný bod ve směru  $x$ -ové osy kartézské soustavy souřadné kmit

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \quad 3(5.11)$$

a ve směru  $y$ -ové osy kmit

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad 3(5.12)$$

jsou rovnice 3(5.11) a 3(5.12) parametrickými rovnicemi pohybu hmotného bodu, je-li splněn princip superpozice. Princip superpozice v uvažovaném případě musí zabezpečit, aby pohyby hmotného bodu ve směru osy  $x$  podél úseček  $y = C$ ,  $-A_1 \leq x \leq +A_1$  byly stejné pro všechna  $C$  z intervalu  $-A_2 \leq C \leq +A_2$ , tj. aby pohyb podél všech těchto úseček mohl být popsán stejnou rovnicí kmitu 3(5.11). Obdobná podmínka musí být splněna i pro pohyb ve směru osy  $y$  v pásmu  $-A_1 \leq x \leq +A_1$ . Je-li splněn princip superpozice, úloha najít kmit daný složením kmitů 3(5.11) a 3(5.12) se redukuje na úlohu stanovit dráhu parametricky zadaného pohybu, tj. úlohu, která se řešila v 1. kapitole. Aby nedošlo k záměně se skládáním dvou rovnoběžných kmitů  $x_1$  a  $x_2$ , které bylo probráno na začátku tohoto článku, je zde zvoleno označení  $x$  a  $y$  kartézských souřadnic.

\*) V celém výkladu kmitů nazýváme úhlovou frekvenci stručně frekvencí, a proto zde pro odlišení frekvencí  $\nu$  zavedenou rovnicí 3(1.3) označujeme jako nominální frekvenci.

Nejprve složíme dva kmity stejné frekvence  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$x = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$$

a

$$y = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2), \quad 3(5.13)$$

neboli

$$\frac{x}{A_1} = \sin \omega t \cdot \cos \alpha_1 + \cos \omega t \sin \alpha_1,$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin \omega t \cdot \cos \alpha_2 + \cos \omega t \sin \alpha_2.$$

Právě napsané rovnice lze pokládat za dvě rovnice pro neznámé funkce  $\sin \omega t$  a  $\cos \omega t$ . Jejich řešením dostaneme

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{(x/A_1) \sin \alpha_2 - (y/A_2) \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \cos \omega t &= \frac{(y/A_2) \cos \alpha_1 - (x/A_1) \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned} \quad 3(5.14)$$

Je-li  $\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$ , což nastane pro  $\alpha_2 - \alpha_1 = k\pi$ , kde  $k$  je celé číslo, dostáváme přímo z rovnic 3(5.13)

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \quad 3(5.15)$$

pro  $k = 0$  nebo  $k$  sudé a

$$y = \frac{-A_2}{A_1} x, \quad 3(5.16)$$

když  $k$  je liché číslo. Rovnice 3(5.15) a 3(5.16) jsou rovnicemi úseček, neboť  $x$  se v nich mění pouze v intervalu  $-A_1 \leq x \leq +A_1$ .

Pro ostatní hodnoty rozdílu  $\alpha_2 - \alpha_1$  získáme křivku složených kmitů, umocníme-li rovnice 3(5.14) na druhou a sečteme je. Po úpravě dostaneme

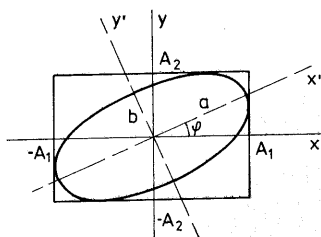
$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0. \quad 3(5.17)$$

Rovnice 3(5.17) je rovnicí kuželosečky a jelikož z rovnice 3(5.13) je zřejmé, že hodnoty  $x$  a  $y$  jsou omezené, jedná se o rovnici elipsy. Elipsa daná rovnicí 3(5.17) je celá obsažena v obdélníku  $-A_1 \leq x \leq +A_1$ ;  $-A_2 \leq y \leq +A_2$ , ale její

osy neleží v osách souřadnic (viz obr. 3.10). Podrobným výpočtem lze získat vztah pro úhel natočení os elipsy vůči osám souřadnic

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{A_1^2 - A_2^2}. \quad (3.5.18)$$

Složením dvou vzájemně kolmých kmitů téže frekvence vznikne elipsa s výjimkou degenerovaných případů 3(5.15) a 3(5.16). Úhel natočení os elipsy vzhledem



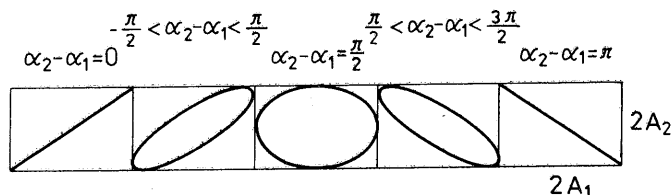
Obr. 3.10 Elipsa vzniklá složením dvou vzájemně kolmých kmitů téže frekvence

ke směru původních kmitů, jak plyne z rovnice 3(5.18), závisí na amplitudách a fázovém posunutí kmitů. Výsledek složení vzájemně kolmých kmitů při konstantních hodnotách amplitud  $A_1$  a  $A_2$  je pro několik hodnot rozdílu fázových konstant  $\alpha_2 - \alpha_1$  znázorněn na obr. 3.11.

V obecném případě, kdy frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_2$  kmitů 3(5.11) a 3(5.12) nejsou stejné, vznikne jejich složením křivka omezená na obdélník  $-A_1 \leq x \leq +A_1$ ;  $-A_2 \leq y \leq +A_2$ . Jsou-li frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_2$  v poměru malých celých čísel  $m$  a  $n$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}, \quad (3.5.19)$$

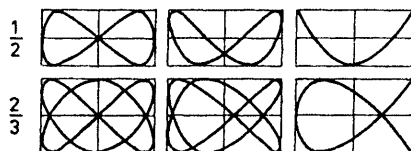
vzniknou uzavřené křivky, které mají pro jednotlivé hodnoty poměru 3(5.19) charakteristický tvar. Tyto křivky nazýváme Lissajousovými obrazci. Na obr. 3.12 jsou nakresleny Lissajousovy obrazce pro hodnoty poměru 3(5.19)  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{2}{3}$ . Pro každý poměr je uvažováno několik hodnot rozdílu fázových kon-



Obr. 3.11 Závislost tvaru elipsy z obr. 3.10 na rozdílu  $\alpha_2 - \alpha_1$  fázových konstant. Amplitudy kmitů jsou  $A_1$  a  $A_2$



stant  $\alpha_2 - \alpha_1$ . Všimněme si, že poměr počtu míst, ve kterých se na vzájemně kolmých stranách Lissajousův obrazec dotýká opsaného obdélníka, odpovídá poměru 3(5.19), který ve znázorněném případě činí  $\frac{1}{2}$ , resp.  $\frac{2}{3}$ .



Obr. 3.12 Lissajousovy obrazce pro poměr frekvencí skládaných kmitů  $1/2$  a  $2/3$ . V každé řádce jsou zakresleny obrazce pro tři různá fázová posunutí skládaných kmitů

### 3.6 Vázané kmity

Mějme dva hmotné body o stejné hmotnosti  $m$ , na které působí elastické síly úměrné výchylce bodu z rovnovážné polohy. Pohybová rovnice každého z hmotných bodů má tvar 3(1.11)

$$m\ddot{x} = -kx. \quad 3(1.11)$$

Jak plyne řešením rovnice 3(1.11), každý z hmotných bodů koná harmonický kmit s frekvencí  $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ . Systém, pro který platí rovnice 3(1.11), bývá nazýván harmonickým oscilátorem.

Budeme nyní sledovat, jak bude ovlivněn pohyb každého z hmotných bodů – každého harmonického oscilátoru – necháme-li mezi nimi působit sílu úměrnou rozdílu mezi skutečnou vzdáleností a vzdáleností rovnovážných poloh obou hmotných bodů. Smysl síly bude takový, aby se snažila udržet rovnovážnou vzdálenost bodů. Popsané silové působení budeme nazývat *pružnou vazbou*. Označíme souřadnici prvního hmotného bodu  $x_1$ , jeho rovnovážná poloha nastane pro  $x_1 = 0$ , a souřadnici druhého hmotného bodu  $x_2$ , rovnovážná poloha tohoto hmotného bodu nastane pro  $x_2 = 0$ . Vazbovou sílu  $F_p$ , kterou působí první hmotný bod na druhý, lze pomocí těchto souřadnic zapsat ve tvaru

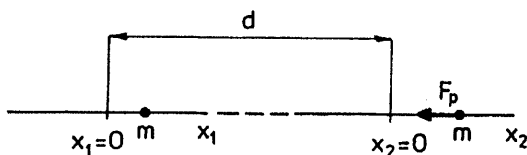
$$F_p = -k_p(x_2 - x_1), \quad 3(6.1)$$

předpokládáme-li, že výchylky oscilátorů s nesouhlasným znaménkem zvětšují odchylku vzdálenosti hmotných bodů od jejich rovnovážné vzdálenosti. Příklad takového uspořádání je na obr. 3.13, na kterém je písmenem  $d$  označena vzdálenost rovnovážných poloh. Konstanta  $k_p$  v rovnici 3(6.1) je kladná. Pohybová rovnice druhého hmotného bodu v přítomnosti síly 3(6.1) má tvar

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_p(x_2 - x_1). \quad 3(6.2)$$

Uvědomíme-li si, že podle principu akce a reakce na první hmotný bod působí síla  $-F_p$ , můžeme napsat jeho pohybovou rovnici

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_p(x_2 - x_1). \quad 3(6.3)$$



Obr. 3.13 Dva vázané oscilátory kmitající v jedné přímce. Pohyb prvního popisujeme v souřadnicové ose  $x_1$ , druhého v souřadnicové ose  $x_2$ . Počátky souřadnicových os jsou v rovnovážných polohách oscilátorů, vzdálenost rovnovážných poloh je  $d$

Rovnice 3(6.2) a 3(6.3) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic pro dvě neznámé funkce  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$ . Jejich sečtením dostáváme rovnici

$$m \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -k(x_1 + x_2) \quad 3(6.4)$$

a odečtením rovnicí

$$m \frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - 2k_p(x_2 - x_1), \quad 3(6.5)$$

což jsou již samostatné diferenciální rovnice neznámých funkcí  $(x_1 + x_2)$  a  $(x_2 - x_1)$ . Obě rovnice mají tvar rovnice 3(1.11) pro harmonické kmity, první s konstantou  $k$  a druhá s konstantou  $k + 2k_p$ . Z rovnice 3(6.4) tedy pro funkci  $x_1 + x_2$  plyne

$$x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1), \quad 3(6.6)$$

kde

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \quad 3(6.7)$$

Řešení rovnice 3(6.5) dává pro funkci  $x_2 - x_1$  vyjádření

$$x_2 - x_1 = A_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_2), \quad 3(6.8)$$

kde

$$\omega_1 = \left(\frac{k + 2k_p}{m}\right)^{1/2}. \quad 3(6.9)$$

Sečtením a odečtením rovnic 3(6.6) a 3(6.8) získáme hledané funkce

$$x_1 = \frac{1}{2} [A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1) - A_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_2)] \quad 3(6.10)$$

a

$$x_2 = \frac{1}{2} [A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_2)] \quad 3(6.11)$$

udávající pohyb jednotlivých hmotných bodů – oscilátorů – vázaných pružnou vazbou 3(6.1). Funkce  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  jsou tvořeny algebraickým sečtením dvou harmonických kmitů, jednoho s původní frekvencí volných kmitů  $\omega_0$  a druhého s frekvencí  $\omega_1$ , jejíž velikost, jak plyne z rovnice 3(6.9), závisí na konstantě  $k_p$ , tj. na velikosti vazby. Přítomnost nové frekvence způsobené vazbou je charakteristická pro vázané oscilátory. V systémech, kde předpokládáme vazbu mnoha oscilátorů, tj. například v systémech, jimiž v teorii pevných látek modelujeme chování krystalových mřížek, je vazeb mnoho, a tím i mnoho možných vibračních frekvencí. Právě probraný systém dvou vázaných oscilátorů, jakožto nejelementárnější model vázaných oscilačních systémů, nám pomůže později pochopit i chování složitějších systémů.

Funkce 3(6.10) a 3(6.11) jsou funkce vzniklé složením dvou harmonických kmitů. Je-li vazba slabá, tj.  $k_p \ll k$ , jsou frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_0$  blízké a funkce  $x_1$  a  $x_2$  mají obdobný tvar (mohou se lišit počáteční podmínky pohybů) jako funkce, s níž jsme se setkali při vyšetřování rázů a která je znázorněna na obr. 3.9. Některé způsoby realizace vázaných kmitů a konkrétní tvar funkcí 3(6.10) a 3(6.11) pro speciálně volené počáteční podmínky jsou uvedeny v citované Brožově učebnici.

## Řešené úlohy

1. Nezatížená pružina má délku  $l$ . Když se na ní zavěsí závaží hmotnosti  $m$ , ustálí se délka pružiny na hodnotě  $l + h$ . Na závaží, které je v klidu, dopadne z výše  $h$  druhé závaží stejné hmotnosti a zůstane na něm. Stanovte, jak se budou pohybovat spojená závaží. Hmotnost pružiny a tlumení pohybu zanedbejte. Pro úlohy 1 až 4 udejte též číselné výsledky pro případ  $h = 0,05$  m a  $m = 0,1$  kg.

Řešení. Po dopadu druhého závaží působí na systém o hmotnosti  $2m$  tíhová síla  $G = 2mg$  a pružná síla  $F = -kx$ ; pohybová rovnice systému má tedy tvar

$$2m\ddot{x} = -kx + 2mg. \quad (1)$$

Její řešení dává

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{2mg}{k}, \quad (2)$$

kde

$$\omega_0 = \left( \frac{k}{2m} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Působením závaží hmotnosti  $m$  se ve statickém případě pružina protáhla o délku  $h$ , tedy

$$mg = hk. \quad (4)$$

Rovnice (4) udává vztah mezi délkou  $h$  a pružinovou konstantou  $k$ . Druhé závaží padá na první z výše  $h$ , jeho rychlost je tedy (viz 4(2.19))  $v_1 = (2gh)^{1/2}$ . Spojení závaží pokládáme za nepružný ráz (viz čl. 6.1) a z rovnice o zachování hybnosti  $mv_1 = 2mv_0$  plyne pro počáteční společnou rychlost  $v_0$  obou závaží vyjádření

$$v_0 = \frac{v_1}{2} = \left( \frac{gh}{2} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Polohu  $x$  měříme od nezatižené délky pružiny s kladnou orientací svisle dolů. Čas počítáme od okamžiku dopadu druhého závaží na první. Potom počáteční podmínky pohybu jsou

$$x_0 = h \quad \text{a} \quad v_0 = \left( \frac{gh}{2} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Z rovnice (2) pak s uvážením (4) dostáváme

$$-h = A \sin \alpha \quad (7)$$

a z časové derivace rovnice (2)

$$\left( \frac{gh}{2} \right)^{1/2} = A\omega_0 \cos \alpha. \quad (8)$$

Uvědomíme-li si, že s užitím (4) lze (3) psát jako

$$\omega_0 = \left( \frac{g}{2h} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

dostáváme z (8)

$$h = A \cos \alpha. \quad (10)$$

Řešením rovnic (7) a (10) získáme dosud neurčené hodnoty konstant  $A$  a  $\alpha$

$$\begin{aligned} A &= h\sqrt{2}, \\ \alpha &= \arctg(-1) = -45^\circ \end{aligned} \quad (11)$$

Hledaný pohyb spojených závaží lze tedy ve zvolené soustavě souřadnic popsat funkcí

$$x = h\sqrt{2} \sin \left[ \left( \frac{g}{2h} \right)^{1/2} t + \arctg(-1) \right] + 2h, \quad (12)$$

číselně

$$x = (0,0707 \sin [9,90t - 0,785] + 0,1) \text{ m}.$$

Kruhová frekvence  $\omega_0 = 9,90 \text{ s}^{-1}$  a doba kmitu  $T = 2\pi/\omega_0 = 0,634 \text{ s}$ .

2. Ke kmitajícímu systému z úlohy 1 přidejte takové tlumení, aby pohyb byl mezní aperiodický. Stanovte rovnici pohybu pro stejný způsob jeho vybuzení jako v úloze 1. Určete relaxační dobu  $\tau_0$ .

Řešení. Pohyb bude mezní aperiodický (viz čl. 3.2), když tlumicí konstanta

$$\delta_0 = \omega_0. \quad (1)$$

Pohybová rovnice je

$$2m\ddot{x} = -kx - 4\delta_0 m\dot{x} + 2mg, \quad (2)$$

kde konstantu u  $\dot{x}$  píšeme ve tvaru  $4\delta_0 m$ , jak odpovídá uvažované kmitající hmotnosti  $2m$  a způsobu zavedení tlumicí konstanty  $\delta_0$ . Řešení rovnice (2) je (srovnej 3(2.12) a 3(2.49))

$$x = e^{-\delta_0 t} (C_1 + C_2 t) + 2h. \quad (3)$$

Po dosazení počátečních podmínek uvedených pod č. (6) v úloze 1 do funkce (3) a její derivace

$$v = e^{-\delta_0 t} (C_2 - \delta_0 C_1 - \delta_0 C_2 t)$$

dostáváme hledanou rovnici pohybu

$$x = h(2 - e^{-\delta_0 t}). \quad (4)$$

S číselnými hodnotami z úlohy 1 je (4) rovno

$$x = 0,05(2 - e^{-9,90t}). \quad (5)$$

Podle 3(2.44) relaxační doba  $\tau_0 = 1/\delta_0$ , tedy  $\tau_0 = 0,101 \text{ s}$ .

3. Jaký pohyb nastane v kmitajícím systému z úlohy 1, když tlumicí konstanta  $\delta_f$  bude mít hodnotu desetkrát menší než v úloze 2;  $\delta_f = \delta_0/10$ . Stanovte logaritmický dekrement pohybu  $\mathcal{D}$  a relaxační dobu  $\tau$ . Porovnejte u pohybů z úloh 2 a 3 čas potřebný k tomu, aby odchylka od konečné hodnoty  $x = 2h$  byla menší než  $h/10$ .

Řešení. Při tlumení menším než  $\delta_0$  nastává tlumený harmonický kmit (srovnej 3(2.33) a 3(2.49))

$$x = A e^{-\delta_f t} \sin(\omega t + \alpha) + 2h, \quad (1)$$

kde frekvence (viz 3(2.29))

$$\omega = (\omega_0^2 - \delta_f^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Uvědomíme-li si, že  $\delta_0 = \omega_0$  a  $\delta_f = \delta_0/10$ , dostáváme v našem případě

$$\omega = \omega_0 \left( \frac{99}{100} \right)^{1/2} = 0,995\omega_0 = 9,855 \text{ s}$$

a doba kmitu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} (100/99)^{1/2} = 0,638 \text{ s}.$$

Dosadíme-li do rovnice (1) a do rovnice

$$v = A e^{-\delta_f t} [\alpha \cos(\omega t + \alpha) - \delta_f \sin(\omega t + \alpha)] \quad (3)$$

pro rychlost tlumeného harmonického kmitu počáteční podmínky (6) z úlohy 1, dostaneme hodnoty konstant:

$$A = h \left( 1 + \frac{81}{99} \right)^{1/2} = 1,348h \quad \text{a} \quad \alpha = \arcsin(-0,742) = -47,87^\circ. \quad (4)$$

Podle 3(2.42) logaritmický dekrement  $\mathcal{D} = \delta T$ , tedy v našem případě

$$\mathcal{D} = \delta_f T = \frac{\delta_0 T}{10} = \frac{2\pi}{10} \left( \frac{100}{99} \right)^{1/2} = 0,631 \text{ s};$$

$1/\mathcal{D} = 1,58$ , a tedy amplituda kmitu klesne na  $1/e$ -tinu své původní hodnoty asi po jednom kmitu. Relaxační doba  $\tau = 1/\delta_f = 10/\omega_0 = 1,01 \text{ s}$ .

Při pohybu z úlohy 2 (viz rov. (4)) se výchylka přiblíží na  $h/10$  ke své mezní hodnotě za čas  $t_2$  daný rovnicí

$$2h - \frac{h}{10} = 2h - h e^{-\delta_0 t_2},$$

tedy

$$t_2 = \frac{\ln 10}{\delta_0} = 0,232 \text{ s} . \quad (5)$$

Tlumený harmonický kmit (1) nahradíme vrchní křivkou jeho obálky

$$x = -A e^{-\delta t} + 2h .$$

Ta dosáhne hledané hodnoty  $x_k = 2h - h/10$  za čas

$$t_3 = \frac{\ln [10A/h]}{\delta_f} ,$$

odkud s přihlédnutím k (4) dostáváme

$$t_3 = \frac{\ln 13,48}{\delta_f} = 2,627 \text{ s} . \quad (6)$$

Pro hledaný poměr porovnáním (5) a (6) dostáváme

$$\begin{aligned} t_3/t_2 &= (\delta_0/\delta_f) (\ln 13,48) / (\ln 10) = \\ &= 10 (\ln 13,48) / (\ln 10) = 11,3 . \end{aligned} \quad (7)$$

4. Na systém z úlohy 3 budeme působit vynucující silou  $F_h = mg \sin \Omega t$ . Při jaké frekvenci  $\Omega_r$  nastane rezonance výchylky? Jaká bude velikost amplitudy  $A_r$  při ustálení rezonančních podmínek? Stanovte činitel jakosti  $Q$  kmitajícího systému.

Řešení. Podle 3(3.14) rezonanční frekvence

$$\Omega_r = (\omega_0^2 - 2\delta_f^2)^{1/2} = \omega_0 \left( \frac{98}{100} \right)^{1/2} = 9,80 \text{ s}^{-1} . \quad (1)$$

Podle 3(3.8)

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{mg/2m}{\left[ \left( \omega_0^2 - \frac{98\omega_0^2}{100} \right)^2 + 4\omega_0^4 98 \cdot 10^{-4} \right]^{1/2}} = \\ &= \frac{50(g/2\omega_0^2)}{(99)^{1/2}} . \end{aligned}$$

Podle rov. (9) úlohy 1 je  $\omega_0^2 = g/2h$ , a tedy

$$A_r = \frac{50h}{\sqrt{99}} \doteq 5h = 0,25 \text{ m} . \quad (2)$$

Podle 3(4.12) činitel jakosti

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta_f} = \frac{10\omega_0}{2\omega_0} = 5 . \quad (3)$$

Amplituda vynucující síly  $mg$  způsobí protažení pružiny, a tedy i statickou výchylku  $A_s$  rovnou  $h$ . Platí tedy  $A_r = Q A_s$ , jak bylo uvedeno na konci čl. 3.4.

5. Vztah mezi proudem charakterizovaným komplexním číslem  $\mathcal{I} = I_0 e^{i\alpha_2}$  a napětím charakterizovaným komplexním číslem  $\mathcal{U} = U_0 e^{i\alpha_1}$  v obvodu střídavého proudu frekvence  $\omega$  je dán rovnicí

$$\mathcal{Z}\mathcal{I} = \mathcal{U} . \quad (1)$$

Rovnice má tvar 3(3.39) a komplexní číslo  $\mathcal{Z}$  se nazývá impedance. V sériovém obvodu sestaveném z odporu  $R$  indukčnosti  $L$  a kapacity  $C$  je impedance dána výrazem

$$\mathcal{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) , \quad (2)$$

- a) Stanovte podmínku pro to, aby proud a napětí byly fázově posunuty o  $90^\circ$ .  
b) Při jaké frekvenci je při pevně daných hodnotách  $R$ ,  $L$ ,  $C$  a  $U_0$  proud v obvodu maximální?

Řešení. a) Z rovnice (1) plyne, že

$$\mathcal{Z} = Z_0 e^{i\alpha} = \frac{U_0}{I_0} e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} .$$

Fázové posunutí  $\alpha_2 - \alpha_1$  mezi proudem a napětím je rovno úhlu  $\alpha$  v zápise  $Z_0 e^{i\alpha}$  impedance  $\mathcal{Z}$ . V případě, že  $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha = 90^\circ$ , dostáváme

$$e^{i\alpha} = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i$$

a impedance  $\mathcal{Z} = Z_0 i$  je čistě imaginární číslo. Porovnáním s (2) zjistíme, že podmínka a) je splněna, když činný odpor obvodu  $R = 0$ .

- b) Z rovnice (1) plyne vztah  $Z_0 I_0 = U_0$  mezi absolutními hodnotami kom-



plexních čísel. Absolutní hodnota  $I_0$ , tj. amplituda proudu, bude maximální, když

$$Z_0 = \left[ R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}$$

bude minimální. Jediná proměnná ve výrazu pro  $Z_0$  je frekvence  $\omega$ ;  $Z_0$  bude minimální, když výraz v kulaté závorce bude nulový, tedy když

$$\omega = \left( \frac{1}{LC} \right)^{1/2}.$$

Poslední výraz je podmínkou pro frekvenci, při které v sériovém  $RLC$  obvodu protéká maximální proud při daném napětí, tj. podmínkou pro rezonanci proudu v tomto obvodu.

6. Jaký výsledný pohyb vznikne superpozicí dvou rovnoběžných harmonických kmitů

a) se stejnými frekvencemi  $\omega$ , amplitudami  $A_1 = 0,01$  m,  $A_2 = 0,1$  m a fázovými konstantami  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$ ?

b) se stejnými amplitudami  $A_1 = A_2 = 10^{-2}$  m a kruhovými frekvencemi  $\omega_1 = 99$  s<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = 100$  s<sup>-1</sup>?

Řešení. a) Vznikne harmonický kmit

$$x = A \sin(\omega t + \alpha),$$

přičemž podle rovnice 3(5.4) amplituda kmitu

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)]^{1/2} = 0,109 \text{ m}$$

a podle 3(5.5) fázová konstanta

$$\alpha = \arctg \left( \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \right) = 57^\circ 22'.$$

b) Vzniknou mechanické rázy 3(5.6) s frekvencí rázů

$$\nu_r = \nu_1 - \nu_2 = \frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} = 0,159 \text{ s}^{-1}.$$

7. Dvě stejná kyvadla kývají v těže svislé rovině. Vlastní doba kmitu kyvadel je  $T = 1$  s. Kyvadla jsou vázána pružnou vazbou. Druhá základní frekvence vázaných kmitů  $\omega_1 = 2,1\pi$  s<sup>-1</sup>. Určete stupeň vazby oscilátorů  $\kappa$ , který je

definován jako  $\kappa = k_p/(k + k_p)$ . Význam symbolů  $\omega_1$ ,  $k$  a  $k_p$  je uveden v čl. 3.6.

Řešení. Z rovnice 3(6.7) a 3(6.9) plyne

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_1^2} = \frac{k_p}{k + k_p} = \kappa .$$

Frekvence  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi \text{ s}^{-1}$  a číselná hodnota  $\omega_1 = 2,1\pi \text{ s}^{-1}$  je přímo v úloze zadána. Po dosazení dostáváme

$$\kappa = \frac{2,1^2 - 2^2}{2^2 + 2,1^2} = 0,0488.$$

## Pohyb v centrálním silovém poli

### 4.1 Obecné vlastnosti pohybu v centrálním poli

Centrálním silovým polem nazýváme takové pole, pro které sílu  $\mathbf{F}$  lze psát ve tvaru

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad 4(1.1)$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor místa, v němž sílu uvažujeme. Při zápisu ve tvaru 4(1.1) je střed centrální síly v počátku soustavy souřadnic. Velikost  $r$  vektoru  $\mathbf{r}$  má význam vzdálenosti od středu centrální síly a síla  $f(r)$  je libovolnou funkcí vzdálenosti  $r$ .

Pro pohyb hmotného bodu v poli centrální síly platí, že moment hybnosti (točivost)  $\mathbf{b}$  hmotného bodu vzhledem ke středu centrální síly, tj. vektor (viz 2(1.7))

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad 4(1.2)$$

je konstantní po celou dobu pohybu. Tedy

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0, \quad 4(1.3)$$

kde  $\mathbf{b}_0$  je konstantní vektor. Tvrzení 4(1.3) plyne bezprostředně z rovnice 2(1.8)

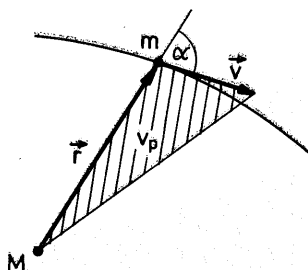
$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}, \quad 2(1.8)$$

uvědomíme-li si, že v případě pohybu v poli centrální síly je moment síly  $\mathbf{M}$  vůči středu centrální síly 4(1.1), jakožto vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů, nulový

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{0}. \quad 4(1.4)$$

Z rovnice 2(1.8) pak plyne, že časová změna vektoru  $\mathbf{b}$  je nulová, a tedy moment hybnosti  $\mathbf{b}$  je roven konstantnímu vektoru, který značíme  $\mathbf{b}_0$ .

Je-li moment hybnosti  $\mathbf{b} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$  roven konstantnímu vektoru  $\mathbf{b}_0$ , musí vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}$ , tj. polohový vektor hmotného bodu a vektor rychlosti hmotného



Obr. 4.1 Znárnění plošné rychlosti hmotného bodu

bodu, ležet stále v rovině kolmé ke směru konstantního vektoru  $\mathbf{b}_0$ . Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli je tedy rovinný. Je-li vektor  $\mathbf{b}_0$  konstantní, je konstantní i jeho velikost  $b_0$

$$|\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = rmv \sin \alpha = b_0. \quad 4(1.5)$$

Úhel  $\alpha$  v rovnici 4(1.5) značí úhel mezi vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}$ . Výraz  $(rv \sin \alpha)/2$  bývá nazýván *plošnou rychlostí*  $v_p$  hmotného bodu, neboť udává velikost plochy vyšrafované na obr. 4.1, která je rovna velikosti plochy opsané průvodičem pohybujícího se bodu za jednotku času. Z rovnice 4(1.5) plyne, že *plošná rychlost*

$$v_p = \frac{rv \sin \alpha}{2} = \frac{b_0}{2m} \quad 4(1.6)$$

hmotného bodu pohybujícího se v centrálním silovém poli je konstantní.

Pohyb v centrálním silovém poli je velmi často uvažovaným druhem pohybu. Je to důsledek toho, že vyšetřování vzájemného pohybu dvou hmotných bodů o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  lze formálně převést na pohyb jednoho myšleného bodu o redukované hmotnosti  $m_r$  v poli centrální síly typu 4(1.1), když síla vzájemného působení mezi hmotnými body  $m_1$  a  $m_2$  závisí pouze na jejich vzdálenosti  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  jsou polohové vektory hmotných bodů  $m_1$  a  $m_2$ , střed centrální síly leží v jejich hmotném středu (těžišti) (srovnej s čl. 5.5)

$$\mathbf{r}_s = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}. \quad 4(1.7)$$

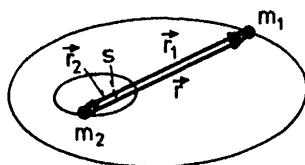
Redukovaná hmotnost  $m_r$  myšleného bodu je dána vztahem

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad 4(1.8)$$

a centrální silové pole má stejnou závislost potenciální energie  $W_p$  na vzdálenosti  $r$  od svého středu, jako je závislost potenciální energie na vzdálenosti  $r$  původních hmotných bodů  $m_1$  a  $m_2$ . Zjistíme-li řešením pohybových rovnic v centrálním silovém poli časovou závislost polohového vektoru  $r$  myšleného bodu o hmotnosti  $m_r$ , získáme časovou závislost polohových vektorů  $r_1$  a  $r_2$  hmotných bodů  $m_1$  a  $m_2$  vůči jejich hmotnému středu 4(1.7) jednoduchými vztahy

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}, \quad r_2 = -\frac{m_1 r}{m_1 + m_2}. \quad 4(1.9)$$

Vzájemná poloha vektorů  $r$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  a příklad možných drah hmotných bodů  $m_1$  a  $m_2$  v soustavě souřadnic spjaté s jejich hmotným středem  $S$  jsou znázorněny na obr. 4.2.



Obr. 4.2 Pohyb dvou hmotných bodů vázaných centrální silou vůči jejich hmotnému středu. Zavedení vektoru jejich vzájemné polohy  $r$

Je-li jedna z hmotností podstatně větší než druhá, např.  $m_2 \gg m_1$ , pak redukovaná hmotnost  $m_r$  je přibližně rovna zbyvajícím hmotnostem, tj.

$$m_r \doteq m_1 \quad 4(1.10)$$

a polohový vektor

$$r_1 \doteq r. \quad 4(1.11)$$

Přibližná rovnost 4(1.10) plyne z rovnice 4(1.8) a přibližná rovnost 4(1.11) z první z rovnic 4(1.9).

Nejčastěji se vyskytujícími silami vzájemného působení – budeme je charakterizovat jejich skalárními tvary  $f(r)$  z rov. 4(1.1) – jsou gravitační síla

$$f(r) = -\frac{k_1 m_1 m_2}{r^2}, \quad 4(1.12)$$

coulombická síla vzájemného působení elektrických nábojů  $Q_1$  a  $Q_2$

$$f(r) = \frac{k_2 Q_1 Q_2}{r^2} \quad 4(1.13)$$

a pružná síla

$$f(r) = -k_3 r. \quad 4(1.14)$$

Symbole  $k_i$  značí kladné konstanty.

Přibližné rovnice 4(1.10) a 4(1.11) umožňují v případě vyšetřování pohybu dvou těles výrazně nestejných hmotností, jakými jsou např. Slunce a planeta, Země a umělá družice, položit počátek soustavy souřadnic do místa těžšího tělesa a pohyb lehčího vyšetřovat jako pohyb hmotného bodu v poli centrální síly 4(1.1). Přitom užitou soustavu souřadnic můžeme v dobrém přiblížení pokládat za soustavu inerciální. Podobně můžeme užít rovnici 4(1.1) se silou  $f(r)$  danou rovnicí 4(1.13) pro vyšetřování pohybu náboje  $Q_2$  v poli náboje  $Q_1$ , předpokládáme-li, že náboj  $Q_1$  je spojen s tělesem o velké hmotnosti (je upevněn) a těleso s nábojem  $Q_2$  má malou hmotnost. V případě pružné síly 4(1.14) také můžeme analogicky předpokládat, že silové centrum je pevné (spojené s velkou hmotností) a hmotný bod se pohybuje v centrálním poli se středem v pevném místě.

Gravitační síla 4(1.12) má vždy přitažlivý charakter a při konstantních hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  ji lze stručně zapsat jako  $f(r) = -k/r^2$ , kde  $k$  je kladná konstanta. Coulombická síla 4(1.13) může být jak přitažlivá, tak odpuzivá, přičemž obdobně jako u gravitační síly její velikost klesá se čtvercem vzdálenosti. Pohybem v gravitačním silovém poli se budeme podrobně zabývat ve zbývajících dvou článcích této kapitoly. Coulombické silové pole je podrobně zkoumáno v elektrostati. Pohyb v poli pružné síly byl probrán v minulé kapitole, kde jsme se však většinou omezili na pohyb hmotného bodu vázaného na přímku. Pouze v článku 3.5 vyšetřovaný pohyb po elipse vzniklé složením dvou vzájemně kolmých kmitů téže frekvence je příkladem rovinného pohybu v poli centrální síly 4(1.1) pružného typu 4(1.14) (viz též řešenou úlohu č. 1).

## 4.2 Gravitační a tíhové pole

Dva hmotné body o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , jejichž vzdálenost je  $r$ , působí na sebe silou o velikosti

$$F = \frac{\kappa m_1 m_2}{r^2}. \quad 4(2.1)$$

Tato síla je přitažlivá a působí ve směru spojnice obou bodů. Nachází-li se první hmotný bod v místě daném polohovým vektorem  $\mathbf{r}_1$  a druhý v místě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}_2$ , platí pro sílu  $\mathbf{F}_{21}$ , kterou působí prvý hmotný bod na druhý, vektorové vyjádření

$$\mathbf{F}_{21} = - \frac{\kappa m_1 m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad 4(2.2)$$

Podle třetího Newtonova zákona pro sílu  $\mathbf{F}_{12}$ , kterou působí druhý bod na první, platí  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ . Rovnice 4(2.2) vyjadřuje *zákon všeobecné gravitace*.

Keplerovy zákony, které tvořily jeden ze základních poznatků pro vyslovení Newtonových zákonů, lze vysvětlit v jejich rámci (viz čl. 4.3), předpokládáme-li, že mezi Sluncem a planetami působí gravitační síly dané rovnicemi 4(2.2). Konstantu  $\kappa$  z rovnic 4(2.1), resp. 4(2.2) je nutno určit experimentálně, neboť jednotky pro sílu, hmotnost a délku jsou v soustavě SI i v dříve užívaných soustavách jednotek voleny nezávisle na všeobecném gravitačním zákonu. Pro gravitační konstantu  $\kappa$  bývá udávána hodnota  $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

Obecně by bylo možné vycházet při budování soustavy jednotek ze všeobecného gravitačního zákona a pokládat v něm konstantu  $\kappa$  za bezrozměrný výraz o velikosti rovné jedné. Pak by obvykle volené základní veličiny hmotnost, délka a čas nebyly nezávislé a počet základních veličin pro mechaniku by se snížil ze tří na dvě. Praktické zavedení takové soustavy jednotek je však stěžejí proveditelné, protože gravitační síly působící mezi hmotnostmi malými ve srovnání s hmotnostmi nebeských těles jsou velmi malé a jejich přesné měření je obtížné. Obtížnou měřitelnost gravitačních sil lze ilustrovat např. tím, že konstanta  $\kappa$ , přestože se jedná o základní fyzikální konstantu a jejímu měření byla věnována značná péče, je stanovena pouze na tři místa, tedy s relativní přesností  $10^{-3}$ . Gravitační konstantu můžeme totiž určit pouze, když změříme gravitační sílu působící mezi tělesy, jejichž hmotnost známe. Taková měření – prováděli je Cavendish torzními vahami, později Eötvös a někteří další – lze provádět pouze s tělesy, jejichž hmotnost je malá ve srovnání s hmotností nebeských těles; gravitační síly jsou pak velmi malé a těžko měřitelné. Lze-li, i při maximální péči, měření gravitačních sil mezi hmotnostmi provádět s relativní přesností pouze  $10^{-3}$ , nelze taková měření postavit do čela prakticky použitelné soustavy jednotek.

Budeme nyní vyšetřovat gravitační silové pole v okolí hmotného bodu o hmotnosti  $M$ . Přitom budeme předpokládat, že hmotnost  $m$  hmotného bodu, který se v silovém poli hmotnosti  $M$  pohybuje, je podstatně menší než hmotnost  $M$ ;  $m \ll M$ . Potom, jak jsme uvedli v předcházejícím článku, lze položit počátek soustavy souřadnic do místa, kde se nachází hmotný bod o hmotnosti  $M$ , a tuto soustavu v dobrém přiblížení pokládat za soustavu inerciální. V této

soustavě napíšeme pro gravitační sílu  $\mathbf{F}$  působící na hmotný bod o hmotnosti  $m$ , který se nachází v místě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}$ , vyjádření

$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad 4(2.3)$$

kteřé má tvar rovnice 4(1.1). Síla  $\mathbf{F}$  je rovnicí 4(2.3) určena pro všechny body, jejichž polohový vektor  $\mathbf{r}$  je různý od nulového vektoru. Rovnicí 4(2.3) je zadáno *gravitační silové pole* bodu o hmotnosti  $M$ . Jeho intenzita je podle definice 2(4.25)

$$\mathbf{l} \equiv \frac{\mathbf{F}}{m} = -\kappa \frac{M\mathbf{r}}{r^3}. \quad 4(2.4)$$

Potenciální energie byla vypočtena v kap. 2 a při běžné volbě nulové hladiny potenciální energie v nekonečně vzdálených ( $r \rightarrow \infty$ ) bodech bylo pro ni získáno vyjádření 2(4.24). Při zde užitých symbolech pro hmotnosti zapíšeme toto vyjádření potenciální energie ve tvaru

$$W_p = -\kappa \frac{Mm}{r}. \quad 4(2.5)$$

Potenciál gravitačního pole bodu o hmotnosti  $M$  je pak podle 2(4.32)

$$U = -\kappa \frac{M}{r}. \quad 4(2.6)$$

V člancích 2.2 a 2.4 jsme užívali (viz rov. 2(2.10)) pro vyjádření gravitačního působení na hmotný bod hmotnosti  $m$  sílu tvaru (v rovnici 2(2.10) byla označena  $G$ )

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \quad 4(2.7)$$

kde vektor tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$  byl pokládán za konstantní vektor. Jak souvisí silové pole 4(2.7) se silovým polem 4(2.3)? Přijmeme bez důkazu tvrzení, že gravitační pole vně Země lze popsat výrazem 4(2.3), položíme-li počátek soustavy souřadnic, tj. bod o polohovém vektoru  $\mathbf{r} = 0$ , do středu Země. V blízkosti Země pak můžeme pokládat výraz  $-\kappa M\mathbf{r}/r^3$  za přibližně stálý a rovný  $-\kappa M\mathbf{r}_0/R_Z^2$ , kde  $R_Z$  je označen poloměr Země a  $\mathbf{r}_0$  je jednotkový vektor v radiálním směru, tedy jednotkový vektor orientovaný svisle vzhůru. Síla  $-\kappa m M\mathbf{r}_0/R_Z^2$  působící na hmotný bod o hmotnosti  $m$  v blízkosti Země je pak již shodná se silou 4(2.7), položíme-li

$$\mathbf{g} = -\kappa \frac{M\mathbf{r}_0}{R_Z^2}. \quad 4(2.8)$$



Pro velikost  $g$  tíhového zrychlení z rovnice 4(2.8) dostáváme

$$g = \kappa \frac{M}{R_Z^2}. \quad 4(2.9)$$

Jednoduché vyjádření gravitačního pole tvarem 4(2.7) lze provést jen pro tak velký prostor u povrchu Země, kde je možné zanedbat změnu velikostí výrazu  $\kappa M/r^2$  s výškou  $h = r - R_Z$  nad povrchem Země a vzájemný úhel svislic v jednotlivých místech uvažovaného prostoru. Pole popsané rovnicí 4(2.9) nazýváme *tíhovým polem* nebo, pro zvýraznění jeho homogenity (srovnej s čl. 2.4), *homogenním gravitačním polem*. V tomto poli, jak bylo ukázáno v čl. 2.4, je rozdíl potenciální energie dvou bodů dán jejich výškovou odlehlostí

$$W_p(h_2) - W_p(h_1) = mg(h_2 - h_1). \quad 4(2.10)$$

Symbolem  $h$  je označena souřadnice rovnoběžná s vektorem tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$ , jejíž kladný smysl je však orientován opačně než kladný smysl vektoru  $\mathbf{g}$ . Souřadnice  $h$  tedy míří svisle vzhůru. Při obvyklé volbě nulové hladiny potenciální energie pro body o souřadnici  $h = 0$  — tuto hladinu často ztotožníme s povrchem Země — dostáváme pro potenciální energii tíhového pole běžné vyjádření (viz též 2(4.19))

$$W_p = mgh. \quad 4(2.11)$$

Potenciál tíhového pole je

$$U = \frac{W_p}{m} = gh \quad 4(2.12)$$

a jeho intenzita

$$\mathbf{l} = - \text{grad } U = \mathbf{g}. \quad 4(2.13)$$

Jak již bylo ukázáno v čl. 2.2, v tíhovém poli koná volný (tj. nepodrobený vazbám) hmotný bod některý z vrhů. Zavedeme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, že její osu  $x_3$  položíme do osy dříve označené  $h$ , leží osy  $x_1$  a  $x_2$  ve vodorovné rovině. Do složek této soustavy souřadnic rozepíšeme pohybovou rovnici

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} \quad 4(2.14)$$

pro pohyb volného hmotného bodu v tíhovém poli. Dostaneme velmi jednoduchou soustavu diferenciálních rovnic

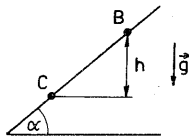
$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= 0, \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= 0, \\ m \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= -mg. \end{aligned} \quad 4(2.15)$$

Řešením, tj. integrací, rovnic 4(2.15) získáme hledané parametrické rovnice  $x_i = x_i(t)$  pohybu hmotného bodu

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 t + d_1, \\ x_2 &= k_2 t + d_2, \\ x_3 &= -\frac{gt^2}{2} + k_3 t + d_3. \end{aligned} \quad 4(2.16)$$

V rovnicích 4(2.16) jsou  $k_1, k_2, k_3$  a  $d_1, d_2, d_3$  libovolné konstanty. Všechna řešení rovnic 4(2.15) lze zapsat ve tvaru 4(2.16)–4(2.16) je obecným řešením rovnic 4(2.15), a tedy rovnice 4(2.16) popisují jakýkoliv pohyb, který volný hmotný bod může v silovém poli 4(2.7) konat. Předpokládáme samozřejmě, že na hmotný bod nepůsobí jiná síla než síla 4(2.7), a protože je volný, ani žádná vazbová síla, která by jej mohla např. udržovat na nakloněné rovině. Podrobnějším pohledem na rovnice 4(2.16) zjistíme, že jsou to *obecné rovnice* všech *vrhů*. Konstanty  $d_1, d_2, d_3$  jsou souřadnicemi bodu  $D[d_1, d_2, d_3]$ , ve kterém se hmotný bod nachází v čase  $t = 0$ , jak snadno zjistíme, dosadíme-li čas  $t = 0$  do rovnic 4(2.16). Derivujeme-li každou z rovnic 4(2.16) podle času  $t$  a do derivovaných rovnic dosadíme čas  $t = 0$ , zjistíme, že konstanty  $k_1, k_2, k_3$  jsou složkami vektoru rychlosti  $\mathbf{v}_0(k_1, k_2, k_3)$ , kterou hmotný bod má v čase  $t = 0$ . Známe-li tedy polohu hmotného bodu  $D$  a jeho rychlost  $\mathbf{v}_0$  v čase  $t = 0$ , je pohyb hmotného bodu rovnicemi 4(2.16) jednoznačně určen. Polohu hmotného bodu a jeho rychlost v čase  $t = 0$  nazýváme *počáteční podmínky pohybu*. Zvolíme-li např. všechny konstanty  $d_i$  a  $k_i$  nulové, dostáváme z rovnic 4(2.16) rovnici volného pádu  $x_3 = -gt^2/2$ . Zvolíme-li jako jedinou nenulovou konstantu  $k_3$ , dostáváme podle znaménka  $k_3$  buď vrh svislý vzhůru, nebo vrh svislý dolů. Volba  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$  odpovídá vodorovným vrhům. Konkrétní volbou  $k_1$  a  $k_2$  je určen směr vrhu. Volba  $k_i$  nenulová,  $d_i$  nulová odpovídá šikmým vrhům. Pro všechny dosud uvažované vrhy jsme volili všechna  $d_i$  nulová, tj. počáteční polohu  $D[0, 0, 0]$  hmotného

bodů v počátku soustavy souřadnic. Volba nenulových hodnot  $d_i$  umožňuje vyšetřovat pohyby bodů, které v čase  $t = 0$  se nenacházejí v počátku soustavy souřadnic, což je zvláště důležité pro vyšetřování vzájemných pohybů dvou a více hmotných bodů v daném silovém poli.

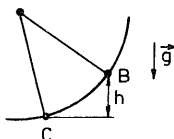


Obr. 4.3 Dvě polohy hmotného bodu na nakloněné rovině

Takto jsme vyšetřili pohyb volného hmotného bodu v tíhovém poli. Jak vypadá pohyb volného hmotného bodu v centrálním gravitačním poli 4(2.3), ukážeme v následujícím článku. Nyní si ještě všimneme jednoduchého důsledku zákona zachování mechanické energie 2(4.13)

$$W_m = W_k + W_p = \text{konst} \quad 4(2.17)$$

pro pohyb v tíhovém poli. Zákon zachování mechanické energie platí v konzervativním silovém poli nejen pro pohyby volných hmotných bodů, ale i pro



Obr. 4.4 Dvě polohy hmotného bodu matematického kyvadla

pohyby hmotných bodů, na které působí vazby (podrobněji viz čl. 5.6) takového druhu, že jim příslušné vazbové síly nekonají na hmotný bod práci. Nejznámějšími takovými pohyby v tíhovém poli jsou pohyb bez tření po nakloněné rovině a pohyb matematického kyvadla. Vazbové síly udržující hmotný bod na nakloněné rovině a vazbové síly udržující hmotný bod matematického kyvadla v pevné vzdálenosti od bodu závěsu jsou kolmé ke směru pohybu, a proto nekonají práci. Vyjdeme-li ze zákona zachování mechanické energie 4(2.17), můžeme snadno určit velikost rychlosti  $v_C$ , kterou hmotný bod o hmotnosti  $m$  vypuštěný s nulovou počáteční rychlostí z bodu  $B$  na nakloněné rovině získá v bodě  $C$  této roviny (viz obr. 4.3). Energie kinetická v bodě  $B$  je  $W_{k,B} = 0$ , energie potenciální  $W_{p,B} = mgx_3(B) + k$  (užíváme stejnou soustavu souřadnic jako při vyšetřování vrhů 4(2.16),  $k$  je libovolná konstanta). V bodě  $C$  je energie kine-

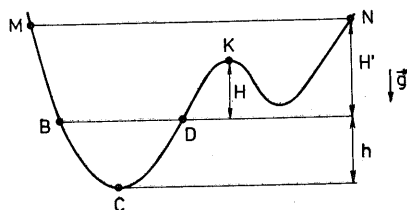
tická  $W_{k,C} = \frac{1}{2}mv_C^2$ , energie potenciální  $W_{p,C} = mgx_3(C) + k$ . Ze zákona 4(2.17) plyne

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgx_3(C) + k = mgx_3(B) + k. \quad 4(2.18)$$

Odtud pro hledanou velikost rychlosti dostáváme

$$v_C = (2g[x_3(B) - x_3(C)])^{1/2} = (2gh)^{1/2}. \quad 4(2.19)$$

V posledním výrazu je  $h$  výšková odlehlost bodů  $B$  a  $C$ . Rychlost 4(2.19) je stejná, jakou by nabyl hmotný bod vypuštěný nulovou počáteční rychlostí volným pádem s výše  $h$  nebo jakou by nabyl v místě  $C$  hmotný bod vázaný vazbou matematického kyvadla vypuštěný nulovou počáteční rychlostí z bodu



Obr. 4.5 Pohyb hmotného bodu po obecné dráze v tíhovém poli

$B$  v případě, že výšková odlehlost míst  $B$  a  $C$  je  $h$  (viz obr. 4.4). V rovnici 4(2.18) není totiž nijak zachycena specifičnost pohybu po nakloněné rovině, vypočtená velikost rychlosti 4(2.19) závisí pouze na výškové odlehlosti bodů  $B$  a  $C$  a není podstatné, jakou cestu mezi body  $B$  a  $C$  hmotný bod v tíhovém poli vykonal. Je-li např. hmotný bod nucen pohybovat se po dráze naznačené na obr. 4.5, opět bude jeho rychlost v bodě  $C$  rovna  $v_C = (2gh)^{1/2}$ , byl-li vypuštěn z bodu  $B$  nulovou počáteční rychlostí. Při takovém vypuštění dosáhne hmotný bod bodu  $D$ , který se nachází v tíhovém poli ve stejné výšce jako bod  $B$ , vrátí se do bodu  $B$  a pohyb se bude stále opakovat, neboť neuvažujeme působení disipativních sil, tj. neuvažujeme vliv tření. Celková energie hmotného bodu v bodě  $B$  je  $W_m = W_k + W_p = W_{p,B} = mgh$ , položíme-li nulovou hladinu potenciální energie do bodu  $C$ . Celková energie  $W_m$  se při pohybu zachovává. Pro body výše položené, než je bod  $D$ , by samotná potenciální energie byla vyšší, než je celková energie hmotného bodu. To je však nemožné, protože kinetická energie  $W_k = \frac{1}{2}mv^2$  je veličina nezáporná. Chceme-li, aby se hmotný bod dostal do bodu  $K$  naznačeného na obr. 4.5, musíme mu v bodě  $B$  udělit rychlost  $v_B$  takovou, aby celková energie hmotného bodu v bodě  $B$  byla nejméně rovna potenciální energii hmotného bodu v bodě  $K$ . Z rovnice 4(2.17) tak dostáváme pro minimální rychlost  $v_B$  podmínku

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = mg(h + H),$$

tedy  $v_B = (2gH)^{1/2}$ . Nezáleží na tom, kterým směrem, zda nahoru nebo dolů, tuto rychlost hmotnému bodu v bodě  $B$  udělíme. Udělíme-li mu rychlost  $v'_B > v_B$ , bude se hmotný bod pohybovat přes obě minima dráhy naznačené na obr. 4.5 až do výšky  $H'$ , určené konkrétní hodnotou  $v'_B = (2gH')^{1/2} > (2gH)^{1/2}$ . Na obr. 4.5 jsou meze pohybu v takovém případě naznačeny body  $M$  a  $N$ .

### 4.3 Keplerova úloha

Vyšetříme pohyb hmotného bodu o hmotnosti  $m$  v gravitačním silovém poli, tj. v silovém poli daném rovnicí 4(2.3)

$$\mathbf{F} = -\kappa Mm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad 4(3.1)$$

Představíme-li si pod bodem o hmotnosti  $M$  Slunce a pod bodem o hmotnosti  $m$  některou z planet, dostaneme vyřešením zadané úlohy řešení Keplerova problému, tj. dostaneme tři Keplerovy zákony o pohybu planet.

Bezprostřední aplikací rovnice 4(1.6) na planetární pohyb je 2. *Keplerův zákon – zákon ploch*, jehož obvyklá formulace zní: *Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.*

Podle článku 2.2 bychom při hledání pohybu hmotného bodu o hmotnosti  $m$  v silovém poli 4(3.1) měli řešit pohybovou rovnici

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\kappa Mm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad 4(3.2)$$

Místo tohoto přímého postupu zvolíme jiný, který vede rychleji k cíli. Využijeme toho, že v gravitačním poli, které je konzervativní a centrální, celková mechanická energie  $W_m$  a moment hybnosti  $\mathbf{b}$  pohybujícího se hmotného bodu jsou konstantní. Konstantní hodnotu mechanické energie označíme  $W_0$  a konstantní hodnotu vektoru momentu hybnosti  $\mathbf{b}_0$ . Jak jsme již uvedli, z rov. 4(1.3) plyne, že pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli je rovinný. K jeho určení tedy stačí znalost časové závislosti dvou souřadnic. Určíme je řešením rovnic

$$W_m = W_0 \quad 4(3.3)$$

a

$$rmv \sin \alpha = b_0, \quad 4(3.4)$$

které vyjadřují zachování celkové mechanické energie a absolutní hodnoty momentu hybnosti (viz rov. 4(1.5)) v průběhu pohybu.

Pro určení pohybu uijeme polární souřadnice  $r, \varphi$  (viz čl. 1 mat. dodatku a čl. 1.2), jejichž vztah ke kartézským souřadnicím  $x_1, x_2$  je dán rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \varphi, \\x_2 &= r \sin \varphi,\end{aligned}\tag{4(3.5)}$$

kde  $r$  je vzdálenost bodu od společného počátku obou soustav a  $\varphi$  úhel, který průvodič bodu svírá s první osou kartézské soustavy souřadnic. Pracujeme-li s polárními souřadnicemi, aniž je vztahujeme k nějaké kartézské soustavě souřadnic, je úhel  $\varphi$  úhlem mezi průvodičem bodu a nějakou v rovině pevně zvolenou přímkou. Rovnice 4(3.3) a 4(3.4) musíme rozepsat tak, aby v nich vystupovaly dosud neznámé parametrické souřadnice  $r = r(t)$  a  $\varphi = \varphi(t)$  pohybu hmotného bodu. V rovnici 4(3.4) výraz  $v \sin \alpha$  (srovnej s obr. 4.1) je transversální (azimutální) složkou  $v_\varphi$  rychlosti  $v$ . Podle 1(2.21) (srovnej též čl. D.1) je transversální složka rychlosti

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

V souřadnicích  $r$  a  $\varphi$  má pak rovnice 4(3.4) tvar

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = b_0.\tag{4(3.6)}$$

Rovnici 4(3.3) rozepíšeme a uijeme vyjádření 4(2.5) pro potenciální energii gravitačního pole, dostaneme

$$W_m = W_k + W_p = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{Mm}{r} = W_0.\tag{4(3.7)}$$

Zavedeme-li ještě radiální složku  $v_r = dr/dt$  (viz 1(2.21)) vektoru rychlosti  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi$ , můžeme pro čtverec velikosti rychlosti psát vyjádření

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.\tag{4(3.8)}$$

Dosazením 4(3.8) do 4(3.7) dostáváme

$$W_0 = \frac{1}{2} m \left[ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] - \kappa \frac{Mm}{r}.\tag{4(3.9)}$$

Rovnice 4(3.6) a 4(3.9) jsou již hledanou soustavou dvou diferenciálních rovnic pro určení dvou neznámých funkcí  $r = r(t)$  a  $\varphi = \varphi(t)$ . Rovnici 4(3.9) upravíme vyjádřením  $d\varphi/dt$  podle rovnice 4(3.6) a zavedením označení

$$\alpha = \varkappa M m \quad 4(3.10)$$

na tvar

$$W_0 = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{b_0^2}{m^2 r^2} \right] - \frac{\alpha}{r} \quad 4(3.11)$$

Z poslední rovnice lze vypočítat

$$\frac{dr}{dt} = \left( \frac{2W_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2 r^2} \right)^{1/2}, \quad 4(3.12)$$

a tedy

$$t = \int \frac{1}{(2W_0/m + 2\alpha/mr - b_0^2/m^2 r^2)^{1/2}} dr. \quad 4(3.13)$$

Rovnicí 4(3.13) je vyjádřena závislost  $t$  na  $r$ , a tím v neexplicitní formě i závislost  $r$  na  $t$ . Po vyjádření této závislosti by bylo možné dosazením  $r = r(t)$  do 4(3.6) vypočítat i  $\varphi = \varphi(t)$ . Při řešení Keplerovy úlohy nás však bude zajímat pouze dráha hmotného bodu, k jejímuž určení stačí najít závislost  $r$  na  $\varphi$ , a není třeba určit časovou závislost obou parametrů  $r$  a  $\varphi$ . Derivaci  $d\varphi/dr$  lze podle pravidla o derivování složených funkcí – předpokládáme  $\varphi(t(r))$  – rozepsat

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr}.$$

Hodnotu  $d\varphi/dt$  lze určit z rovnice 4(3.6) a hodnotu  $dt/dr$  z rovnice 4(3.12); dostáváme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{b_0}{mr^2(2W_0/m + 2\alpha/mr - b_0^2/m^2 r^2)^{1/2}}.$$

Pravá strana rovnice závisí pouze na  $r$ , a proto pro  $\varphi$  lze psát

$$\varphi = \int \frac{b_0}{mr^2(2W_0/m + 2\alpha/mr - b_0^2/m^2 r^2)^{1/2}} dr. \quad 4(3.14)$$

Primitivní funkce k výrazu pod integrálem je

$$\arccos \left( \frac{b_0/r - \alpha m/b_0}{(2mW_0 + \alpha^2 m^2/b_0^2)^{1/2}} \right),$$

o čemž se lze přesvědčit derivováním podle  $r$  právě uvedeného výrazu. Tedy závislost  $\varphi$  na  $r$  je dána vztahem

$$\varphi = \arccos \frac{b_0/r - \alpha m/b_0}{(2mW_0 + \alpha^2 m^2/b_0^2)^{1/2}} + k. \quad 4(3.15)$$

Rovnici 4(3.15) lze přepsat na tvar

$$\frac{b_0}{r} - \frac{\alpha m}{b_0} = \left(2mW_0 + \frac{\alpha^2 m^2}{b_0^2}\right)^{1/2} \cos(\varphi - k),$$

který po vynásobení konstantou  $b_0/\alpha m$  dále upravíme

$$\frac{b_0^2}{\alpha m r} = 1 + \left(\frac{2W_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1\right)^{1/2} \cos(\varphi - k).$$

Poslední rovnice má již tvar polární rovnice kuželosečky (viz řeš. úl. 3 matematického dodatku). Zavedeme-li totiž stručné označení konstant, které se v ní vyskytují, tj.

$$\frac{b_0^2}{\alpha m} = p \quad 4(3.16)$$

a

$$\left(1 + \frac{2W_0 b_0^2}{\alpha^2 m}\right)^{1/2} = \varepsilon, \quad 4(3.17)$$

dostaneme rovnici

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - k),$$

kterou lze již snadno přepsat na obvykle uváděný tvar polární rovnice kuželoseček

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - k)}. \quad 4(3.18)$$

Rovnice 4(3.18) popisuje vztah mezi vzdáleností  $r$  bodu na kuželosečce od jednoho jejího ohniska a úhlem  $(\varphi - k)$ , který průvodič bodu svírá s osou kuželosečky procházející tímto ohniskem. Konstanta  $k$  udává úhel mezi původně libovolně zvoleným směrem v rovině dráhy a směrem výše uvažované osy kuželosečky. Konstanta  $k$  je libovolná a odpovídá natočení kuželosečky ve



vyšetřované rovině; je jí možno určit z počátečních podmínek pohybu. V řeš. úl. 3 matematického dodatku je uvedeno, že pro elipsu a hyperbolu

$$p = \frac{b^2}{a},$$

kde  $a$  je velikost velké poloosy a  $b$  velikost malé poloosy. Pro parabolu parametr  $p$  je roven vzdálenosti  $d$  ohniska od řídicí přímky;  $p = d$ . Pro elipsu a hyperbolu má  $\varepsilon$  význam numerické výstřednosti, tj. poměru délkové výstřednosti  $e$  k velikosti velké poloosy  $a$

$$\varepsilon = \frac{e}{a}. \quad 4(3.19)$$

Je tedy pro elipsu  $\varepsilon < 1$ , pro hyperbolu  $\varepsilon > 1$ , nezávisle lze dokázat, že pro parabolu  $\varepsilon = 1$ . Porovnáme-li právě vyslovené závěry o hodnotách  $\varepsilon$  s rovnicí 4(3.17), dostaneme pro elipsu

$$\left(1 + \frac{2W_0 b_0^2}{\alpha^2 m}\right)^{1/2} < 1.$$

Protože všechny členy obklopující  $W_0$  ve druhém sčítanci pod odmocninou jsou kladné, je posledně uvedenou nerovnost možno splnit pouze tehdy, když celková mechanická energie pohybujícího se hmotného bodu  $W_0 < 0$ . Obdobně lze nalézt vztah mezi  $\varepsilon$  a  $W_0$  pro hyperbolu a parabolu. Pro celkovou energii  $W_0$  hmotných bodů obíhajících kolem centrální hmotnosti  $M$  po různých drahách tak dostáváme podmínky:

eliptická dráha	$\varepsilon < 1$	$W_0 < 0$ ,	
parabolická dráha	$\varepsilon = 1$	$W_0 = 0$ ,	
hyperbolická dráha	$\varepsilon > 1$	$W_0 > 0$ .	4(3.20)

Představíme-li si, že centrální hmotnost  $M$  je hmotnost Slunce a obíhající hmotné body o hmotnosti  $m$  jsou planety – pro ty  $W_0 < 0$  – lze obsah rovnice 4(3.18), která udává tvar dráhy hmotného bodu v silovém poli 4(3.1) vyjádřit větou: *Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku leží Slunce.* To je obvyklá formulace prvního Keplerova zákona.

Předpoklad  $W_0 < 0$  pro dráhy planet je přirozený, protože dráhy hmotných bodů s  $W_0 > 0$ , tj. parabolická a hyperbolická dráha, nejsou uzavřené. Hmotný bod, který po takové dráze do silového pole 4(3.1) vstoupí, projde polem pouze jednou a pak ho opustí, vzdálenost  $r$  není omezená. Předpoklad  $W_0 < 0$  pro uzavřenou dráhu plyne z volby nulové hodnoty potenciální

energie 4(2.5) v nekonečno. Pouze hmotné body, jejichž celková energie je menší než potenciální energie v nekonečně vzdáleném bodě, mohou se stále pohybovat v konečné vzdálenosti od centrální hmotnosti  $M$ . Nejmenší energie, s níž hmotný bod opustí pole 4(3.1), je energie  $W_0 = 0$ , které odpovídá parabolická dráha. Dosadíme-li podmínku  $W_0 = 0$  do rovnice 4(3.7), dostáváme

$$\frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{Mm}{r} = 0.$$

Z poslední rovnice určíme nejmenší rychlost, kterou musí hmotný bod o hmotnosti  $m$  mít ve vzdálenosti  $r$  od středu pole, aby mohl pole 4(3.1) opustit

$$v = \left( \frac{2\kappa M}{r} \right)^{1/2}. \quad 4(3.21)$$

Pokládáme-li hmotnost  $M$  za hmotnost Země a za  $r$  zvolíme poloměr Země  $R_Z$ , dává rovnice 4(3.21) rychlost, jakou musí mít hmotný bod na povrchu Země, aby mohl zemské gravitační pole opustit. Tato rychlost bývá označována jako 2. kosmická rychlost. Pro její velikost dostáváme

$$v_{II} = \left( \frac{2\kappa M}{R_Z} \right)^{1/2} = (2gR_Z)^{1/2} \doteq 11,2 \text{ km/s}. \quad 4(3.22)$$

Při výpočtu rychlosti  $v_{II}$  jsme užili rovnice 4(2.9) pro vyjádření výrazu  $\kappa M/R_Z$  a dosadili jsme přibližné hodnoty  $g \doteq 10 \text{ ms}^{-2}$  a  $R_Z \doteq 6,3 \cdot 10^6 \text{ m}$  pro tíhové zrychlení  $g$  a poloměr Země  $R_Z$ .

Všimneme si nyní pro eliptické dráhy ( $W_0 < 0$ ) vztahu mezi určujícími konstantami  $W_0$ ,  $b_0$  dráhy a poloosami elipsy. Vyjdeme z porovnání vztahů 4(3.17) a 4(3.19)

$$\left( 1 + \frac{2W_0 b_0^2}{\alpha^2 m} \right)^{1/2} = \frac{e}{a}. \quad 4(3.23)$$

Rovnici 4(3.23) umocníme na druhou a pravou stranu upravíme podle vztahu  $e^2 = a^2 - b^2$ , který platí mezi poloosami  $a$ ,  $b$  a výstředností elipsy  $e$ . Dostaneme

$$1 + \frac{2W_0 b_0^2}{\alpha^2 m} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad 4(3.24)$$

Podle 4(3.16) je však výraz  $b_0^2/\alpha m = p$  a pro elipsu  $p = b^2/a$ .

Porovnáním dostáváme

$$\frac{b_0^2}{\alpha m} = \frac{b^2}{a}. \quad 4(3.25)$$

Nahradíme-li podle poslední rovnice v druhém sčítanci na levé straně rovnice 4(3.24)  $b_0^2/\alpha m$  výrazem  $b^2/a$ , můžeme psát

$$1 + \frac{2W_0 b^2}{a\alpha} = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

Odtud již snadno plyne

$$a = - \frac{\alpha}{2W_0}. \quad 4(3.26)$$

Rovnice 4(3.26) ukazuje, že velikost velké poloosy elipsy závisí pouze na celkové energii  $W_0$  hmotného bodu a nezávisí na absolutní hodnotě momentu hybnosti  $b_0$ . Znaménko minus je přirozené, neboť  $W_0 < 0$ .

Dosadíme-li výsledek 4(3.26) do rovnice 4(3.25), dostaneme po snadných úpravách

$$b = \frac{b_0}{(2 |W_0| m)^{1/2}}. \quad 4(3.27)$$

Velikost malé poloosy  $b$  elipsy závisí vedle celkové energie  $W_0$  též na velikosti momentu hybnosti  $b_0$ . Rovnice 4(3.26) a 4(3.27) byly využity v elementární kvantové teorii oběhu elektronů kolem jádra atomu.

Odvodíme nyní vztah mezi dobou oběhu hmotného bodu, který se v poli 4(3.1) pohybuje po eliptické dráze, a velikostí velké poloosy  $a$  tohoto pohybu. Na začátku této kapitoly (viz rov. 4(1.6)) jsme ukázali, že velikost plošné rychlosti  $v_p = b_0/2m$  je při pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli konstantní. Z významu plošné rychlosti plyne, že násobek plošné rychlosti  $v_p$  a doby oběhu  $T$  bodu po uzavřené dráze musí být roven ploše uzavřené touto dráhou. Plocha  $P$  elipsy o poloosách  $a, b$  je  $P = \pi ab$ . Pro uvažovanou eliptickou dráhu musí tedy platit rovnice

$$T v_p = \pi ab.$$

Dosadíme-li  $b_0/2m$  za  $v_p$ , dostáváme

$$T b_0 = 2m\pi ab.$$

Za  $b_0$  dosadíme z 4(3.25) a po elementárních úpravách můžeme psát

$$T = \frac{2\pi m^{1/2} a^{3/2}}{\alpha^{1/2}}.$$

Rozevíšeme ještě  $\alpha$  podle 4(3.10) a získáme hledaný vztah

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}. \quad 4(3.28)$$

Pro stálou centrální hmotnost  $M$  je poměr čtverce doby oběhu  $T^2$  a třetí mocniny  $a^3$  velké poloosy elipsy konstantní. Je-li centrální hmotností Slunce a obíhajícími hmotnými body planety, je rovnice 4(3.28) obsahem tvrzení 3. *Keplerova zákona*, pro který bývá užívána následující formulace: *Poměr druhých mocnin oběžných dob libovolných dvou planet je roven poměru třetích mocnin jejich velkých poloos.*

Elementárně lze dojít k tvrzení analogickému 4(3.28), předpokládáme-li, že hmotné body obíhají kolem centrální hmotnosti  $M$  po kružnicích o poloměru  $r$ . Potom víme, že síla 4(3.1) realizuje dostředivou sílu nutnou pro vznik rovnoměrného kruhového pohybu, tedy

$$-m\omega^2 \mathbf{r} = -\kappa \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3}. \quad 4(3.29)$$

Z vektorové rovnice 4(3.29) plyne skalární rovnice

$$\omega^2 = \kappa \frac{M}{r^3} \quad 4(3.30)$$

a po dosazení známého vztahu 3(1.12)  $\omega = 2\pi/T$  a jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}.$$

Tato rovnice odpovídá rovnici 4(3.28) pro pohyb po kružnici, pro nějž poloměr  $r$  má stejný význam jako velká poloosa u obecného pohybu po elipse.

Rovnice 4(3.30) udává úhlovou rychlost, jakou se pohybuje hmotný bod po kružnici poloměru  $r$  v gravitačním poli 4(3.1). Budeme nyní pokládat centrální hmotnost  $M$  za hmotnost Země a vypočteme rychlost, jakou musí mít hmotný bod, aby obíhal kolem Země v bezprostřední blízkosti Země. Takové rychlosti

– vyjadřuje se zpravidla jako postupná rychlost  $v_I$  – se říká *první kosmická rychlost*. Vypočteme její velikost. Z rovnice 4(3.30) plyne

$$\frac{v_I^2}{R_Z^2} = \frac{\kappa M}{R_Z^3},$$

když úhlovou rychlost vyjádříme pomocí postupné rychlosti a za poloměr  $r$  dosadíme poloměr Země  $R_Z$ . Z právě uvedené rovnice plyne

$$v_I = \left( \frac{\kappa M}{R_Z} \right)^{1/2}. \quad 4(3.31)$$

Dosadíme-li do poslední rovnice podle 4(2.9)  $gR_Z^2$  za  $\kappa M$  a uijeme přibližné číselné hodnoty  $g \doteq 10 \text{ ms}^{-2}$  a  $R_Z \doteq 6,3 \cdot 10^6 \text{ m}$ , dostáváme pro první kosmickou rychlost vyjádření

$$v_I = (gR_Z)^{1/2} \doteq 7,9 \text{ km s}^{-1}. \quad 4(3.32)$$

Rychlost  $v_I$  je přibližně rovna rychlosti, kterou obíhají kolem Země její blízké umělé družice.

## Řešené úlohy

1. Najděte pohyb, který vznikne v poli centrální síly pružného charakteru (viz 4(1.14)), tj. síly 4(1.1)  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}/r$ , kde  $f(r) = -kr$  ( $k > 0$ ).

Řešení. Síla

$$\mathbf{F} = -kr \frac{\mathbf{r}}{r} = -kr. \quad (1)$$

Z rovnice 4(1.3) plyne, že pohyb v poli centrální síly je rovinný. Proto stačí pohybovou rovnici

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -kr \quad (2)$$

rozepsat do dvou složek. Zvolíme rozpis do kartézské soustavy souřadnic ležící v rovině pohybu

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx, \\ m\ddot{y} &= -ky. \end{aligned} \quad (3)$$

Obě rovnice mají tvar rovnice 3(1.11), a proto jejich řešení jsou harmonické funkce

$$x = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \quad (4)$$

a

$$y = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \quad (5)$$

se stejnou frekvencí  $\omega = (k/m)^{1/2}$ . Rovnice (4) a (5) jsou parametrické rovnice hledaného pohybu a jsou totožné s rovnicemi 3(5.11) a 3(5.12), které jsme vyšetřovali při skládání vzájemně kolmých kmitů. Podle výpočtu provedeného v čl. 3.5 je tedy drahou pohybu elipsa 3(5.17)

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Hmotný bod v poli centrální pružné síly (1) se pohybuje po elipse. Tato elipsa má však, na rozdíl od elipsy řešící Keplerovu úlohu, střed a ne ohnisko ve středu centrální síly. Pohyb v poli síly (1) bývá nazýván prostorovým oscilátorem.

2. V jaké výši nad Zemí se musí pohybovat stacionární družice, tj. taková družice, která se nachází stále nad stejným bodem zemského povrchu.

Řešení. Dostředivá síla kruhového pohybu družice je realizována gravitační silou Země, tedy gravitační zrychlení  $\kappa M_Z/r^2$  ( $M_Z$  je hmotnost Země) ve vzdálenosti  $r$  od středu Země se musí rovnat zrychlení kruhového pohybu

$$\frac{\kappa M_Z}{r^2} = r\omega^2. \quad (1)$$

Družice bude stacionární, když její úhlová rychlost  $\omega$  bude shodná s úhlovou rychlostí otáčení Země,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2)$$

Doba oběhu  $T$  v rovnici (2) je hvězdný den, tedy

$$T = (365/366) 24 \text{ hod.} = 86\,164 \text{ s.} \quad (3)$$

Gravitační zrychlení na povrchu Země  $\kappa M_Z/R_Z^2$  ( $R_Z$  je poloměr Země) je rovno tíhovému zrychlení  $g$

$$\kappa M_Z = gR_Z^2. \quad (4)$$

Užijeme-li (2) a (4), dostáváme z (1)

$$r^3 = \frac{\kappa M_Z}{\omega^2} = \frac{gR_Z^2 T^2}{4\pi^2}$$

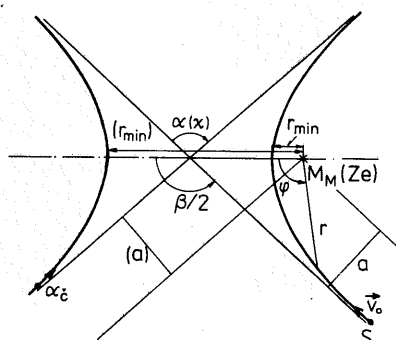
a pro hledanou výšku  $h$  nad povrchem zemským

$$h = \left( \frac{gR_Z^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_Z .$$

Dosadíme-li do poslední rovnice číselné hodnoty ( $R_Z = 6\,370$  km), dostáváme

$$h = 35\,800 \text{ km} .$$

3. Družice obíhá kolem Země po dráze, jejíž nejbližší bod (perigeum) je ve výši  $h_1 = 300$  km a nejvzdálenější bod (apogeum) ve výši  $h_2 = 1\,200$  km nad zemským povrchem. Vypočítejte dobu oběhu družice  $T$ .



Obr. 4.6 Pohyb sondy, která vstupuje rychlostí  $v_0$  do gravitačního pole Marsu (hmotnost  $M_M$ ) a pohyb  $\alpha$  částice ( $\alpha_\epsilon$ ) v poli jádra atomu (náboj  $Ze$ ). Veličiny vztahující se k pohybu  $\alpha$  částice jsou na obrázku uvedeny v závorkách

**Řešení.** Podle výsledků uvedených v čl. 4.3 je dráha družice elipsa s ohniskem ve středu Země (poloměr  $R_Z$ ) a s hlavní osou délky  $2a$  spojující perigeum a apogeum

$$2a = 2R_Z + h_1 + h_2 = 14\,240 \text{ km} . \quad (1)$$

Podle 3. Keplerova zákona 4(3.28) užitého pro pohyb v zemském gravitačním poli je poměr druhých mocnin oběžných dob družic roven poměru třetích mocnin jejich velkých (hlavních) poloos, tedy

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3} . \quad (2)$$

Za porovnávací družici s dobou oběhu  $T_1$  a velkou poloosou  $a_1$  zvolíme stacionární družici z minulé úlohy, která má velkou poloosu  $a_1$  rovnu poloměru kruhové dráhy  $r$ . Pro hledanou dobu oběhu družice tak z (2) dostaneme

$$T = \frac{a^3 T_1^2}{r^3} = 5\,980 \text{ s} = 99 \text{ min } 40 \text{ s}.$$

4. Meziplanetární kosmická sonda hmotnosti  $m$  se blíží k Marsu relativní rychlostí  $v_0 = 3 \text{ km s}^{-1}$  a se záměrnou vzdáleností  $a = 10^4 \text{ km}$ . Záměrná vzdálenost je vzdálenost mezi středem planety a přímkou, po které se sonda blíží k planetě, dokud není pohyb sondy ovlivňován gravitačním působením planety. Stanovte minimální vzdálenost  $r_{\min}$  mezi sondou a planetou a odchytku směru, kterým sonda opustí oblast přitažlivosti Marsu, od jejího původního směru. Hmotnost Marsu  $M_M = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ .

Řešení. Sonda se v gravitačním poli Marsu pohybuje po hyperbolické dráze, neboť přilétá z prostoru mimo pole a má nenulovou kinetickou energii. Ohnisko hyperboly, která je popsána rovnicí 4(3.18) (viz též obr. 4.6)

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (1)$$

leží ve středu Marsu. Uvažujeme pouze větev hyperboly přilehlou k Marsu a polární poloosu, vůči které počítáme úhel  $\varphi$ , volíme ve směru hlavní osy hyperboly s orientací od středu planety k hyperbole (úhel  $k$  z rovnice 4(3.18) je nulový). Vzdálenost mezi sondou a planetou je minimální, když  $\cos \varphi = 1$ , tj. když  $\varphi = 0$ . Potom z (1) dostáváme

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon}. \quad (2)$$

Úhel  $\varphi$  příslušný nekonečně vzdálenému bodu hyperboly je úhlem, který svírá asymptota s polární poloosou. Tento úhel označíme  $\beta/2$ . Z rovnice (1) pro  $r \rightarrow \infty$  plyne  $(1 + \varepsilon \cos \varphi) \rightarrow 0$ , a tedy pro úhel  $\beta/2$  dostáváme vyjádření

$$\cos \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Vzhledem ke způsobu zavedení polární soustavy souřadnic platí mezi úhlem  $\beta$  a hledanou odchylkou  $\alpha$  vztah (srovnej s obr. 4.6)

$$\beta - \pi = \alpha, \quad (4)$$



z něhož dále plyne

$$\sin \frac{\alpha}{2} = -\cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (5)$$

Podle 4(3.16) a 4(3.17) s přihlédnutím k 4(3.10)

$$p = \frac{b_0^2}{\kappa M_M m^2} \quad (6)$$

a

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{2W_0 b_0^2}{\kappa^2 M_M^2 m^3}\right)^{1/2}. \quad (7)$$

Celková mechanická energie sondy je rovna její kinetické energii mimo gravitační pole Marsu

$$W_0 = \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (8)$$

Moment hybnosti  $b_0$  sondy stanovíme z její plošné rychlosti  $v_p$ , kterou určíme jako plochu trojúhelníka při pohybu sondy po asymptotě

$$v_p = \frac{v_0 a}{2}. \quad (9)$$

Podle 4(1.6)  $b_0 = v_p 2m$ , tedy

$$b_0 = v_0 a m. \quad (10)$$

Po dosazení (8) a (10) do (6) a (7) dostáváme

$$p = \frac{v_0^2 a^2}{\kappa M_M} \quad (11)$$

a

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{v_0^4 a^2}{\kappa^2 M_M^2}\right)^{1/2}. \quad (12)$$

Odtud již přímým dosazením do rovnic (2) a (5) lze získat hledané veličiny. Můžeme však ještě využít toho, že z rovnice (5)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{[1 + (v_0^2 a / \kappa M_M)^2]^{1/2}}$$

plyne podle trigonometrického vztahu  $\sin \alpha = 1/(1 + \cotg^2 \alpha)^{1/2}$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\kappa M_M}{v_0^2 a} = 0,476, \quad (13)$$

odkud pro číselnou hodnotu hledané odchylky plyne

$$\alpha = 51^\circ 55'.$$

Obdobně výraz (2) pro  $r_{\min}$  můžeme s užitím rovnic (5), (11) a (13) zapsat jako

$$r_{\min} = \frac{a \cotg(\alpha/2)}{1 + 1/\sin(\alpha/2)} = \frac{a \cos(\alpha/2)}{1 + \sin(\alpha/2)},$$

číselně

$$r_{\min} = 6\,320 \text{ km}.$$

Analogicky se počítá odchylka  $\chi$  elektronu nebo  $\alpha$ -částice v poli jádra atomu (Rutherfordův rozptyl). Je-li pohybující se částice elektron, je coulombická síla 4(1.13) mezi jádrem a elektronem přitažlivá a odchylka  $\chi$  je dána výrazem

$$\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \frac{k_2 Z e^2}{m v_0^2 a}. \quad (14)$$

Výraz (14) plyne z (13), když porovnáme výrazy 4(1.12) pro gravitační a 4(1.13) pro coulombickou sílu

$$-k_1 m_1 m_2 = k_2 Q_1 Q_2, \quad (15)$$

a uvažíme, že  $k_1 = \kappa$ ,  $m_1 = m$  je hmotnost letící částice,  $m_2 = M_M$ ,  $Q_1 = -e$  je náboj elektronu a  $Q_2 = Ze$  ( $Z$ .. celé číslo) je náboj jádra. Při rozptylu  $\alpha$ -částice síla mezi ní a jádrem atomu je odpudivá. Částice se pak pohybuje po vzdálenější větvi hyperboly (na obr. 4.6 je částice označena  $\alpha_e$ ), která má rovnici

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (16)$$

Výraz (14) pro odchylku  $\chi$  zůstává i v tomto případě stejný, pouze doplníme dvojku před  $Z$  vzhledem k dvojnásobnému náboji  $\alpha$ -částice oproti elektronu. I když výrazy (13) a (14) jsou analogické, jejich porovnáním zjistíme, že při coulombickém rozptylu odchylka částice závisí na její hmotnosti, zatímco při gravitačním rozptylu se závislost na hmotnosti částice vyruší.

# Soustava hmotných bodů

## 5.1 Popis soustavy hmotných bodů

V předcházejících kapitolách jsme uvažovali pohyb hmotného bodu. Vzájemné působení ostatních hmotných bodů s uvažovaným hmotným bodem jsme vyjádřili silou nebo potenciální energií. V mnoha případech však tento přístup nemusí být postačující a je vhodné a nutné uvažovat soustavu hmotných bodů. Příkladem může být pohyb molekul plynu v uzavřené nádobě.

Uvažujme soustavu  $N$  hmotných bodů. Poloha  $n$ -tého bodu bude určena polohovým vektorem  $\mathbf{r}_n$ . V kartézské soustavě souřadnic bude platit

$$\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{e}_x + y_n \mathbf{e}_y + z_n \mathbf{e}_z, \quad 5(1.1)$$

což můžeme vyjádřit i zápisem

$$\mathbf{r}_n = x_{1n} \mathbf{e}_1 + x_{2n} \mathbf{e}_2 + x_{3n} \mathbf{e}_3, \quad 5(1.2)$$

resp.

$$\mathbf{r}_n = x_{in} \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad 5(1.3)$$

kde  $x_n, y_n, z_n$  resp.  $x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}$  jsou kartézskými souřadnicemi  $n$ -tého hmotného bodu a  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , resp. v tomto případě i  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  jsou jednotkové vektory v souřadnicových osách po řadě  $x, y, z$ , resp.  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . V rovnici 5(1.3) jsme použili Einsteinova sumačního pravidla. Hmotné body v námi uvažované soustavě nemusí mít stejné hmotnosti. Hmotnost  $n$ -tého hmotného bodu označíme  $m_n$ . Pro hmotnost soustavy hmotných bodů bude platit

$$M = \sum_{n=1}^N m_n. \quad 5(1.4)$$

V další části této kapitoly sumu  $N$  členů budeme uvádět zkráceně pouze symbolem  $\sum$  (např. rovnice 5(1.4) bude psána  $M = \sum m_n$  a budeme sčítat přes všechna  $n$ ). Současně budeme předpokládat, že hmotnosti jednotlivých hmotných bodů se nemění v průběhu sledovaného děje.

Rozlišujeme dva druhy soustav hmotných bodů:

a) Volná soustava hmotných bodů. Polohové vektory  $\mathbf{r}_n$  jsou vzájemně nezávislé. K určení polohy soustavy hmotných bodů je potřeba  $3N$  souřadnic (každý polohový vektor má 3 souřadnice). Říkáme, že volná soustava hmotných bodů má  $3N$  stupňů volnosti.

b) Tuhá soustava hmotných bodů. Je to soustava, kde mezi jednotlivými hmotnými body jsou vzdálenosti neproměnné. Platí tudíž

$$|\mathbf{r}_{mn}| = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m| = \text{konst.} \quad 5(1.5)$$

Rychlosti (zrychlení) jednotlivých hmotných bodů soustavy dostaneme ze znalosti časové závislosti polohového vektoru. V souladu s rovnicemi 1(2.19), 1(2.35), 2(1.1) můžeme pro rychlost, zrychlení a hybnost  $n$ -tého hmotného bodu psát

$$\mathbf{v}_n = \frac{d\mathbf{r}_n}{dt}, \quad 5(1.6)$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{d^2\mathbf{r}_n}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_n}{dt}, \quad 5(1.7)$$

$$\mathbf{p}_n = m_n\mathbf{v}_n. \quad 5(1.8)$$

Hmotný střed soustavy hmotných bodů (někdy se užívá i termín těžiště) definujeme vztahem

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum m_n\mathbf{r}_n}{\sum m_n}. \quad 5(1.9)$$

Použitím 5(1.4) můžeme souřadnice polohového vektoru hmotného středu soustavy hmotných bodů (vektorovou rovnici nahrazujeme třemi skalárními) psát ve tvaru

$$x_s = \frac{\sum m_n x_n}{M}, \quad y_s = \frac{\sum m_n y_n}{M}, \quad z_s = \frac{\sum m_n z_n}{M}. \quad 5(1.10)$$

Souřadnice hmotného středu pro spojitě prostředí můžeme určit podle vztahů

$$x_s = \frac{1}{M} \int x \varrho \, dV, \quad y_s = \frac{1}{M} \int y \varrho \, dV, \quad z_s = \frac{1}{M} \int z \varrho \, dV, \quad 5(1.10a)$$

kde  $\varrho$  je hustota a integrujeme přes celý objem tělesa.

Nemění-li se hmotnost jednotlivých hmotných bodů s časem, dostaneme z rovnic 5(1.9) a 5(1.10) vztahy pro rychlost hmotného středu soustavy  $\mathbf{v}_s$

$$\mathbf{v}_s = \frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \frac{1}{M} \left[ \sum \left( m_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \right) \right] = \frac{\sum m_n \mathbf{v}_n}{M}, \quad 5(1.11)$$

nebo též

$$\mathbf{v}_s = \frac{\sum \mathbf{p}_n}{M} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad 5(1.12)$$

kde  $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_n$  je celková hybnost soustavy hmotných bodů. Rovnici 5(1.12) je možno přepsat na tvar

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_s. \quad 5(1.13)$$

Tato rovnice je matematický zápis fyzikální skutečnosti, že celková hybnost soustavy hmotných bodů je stejná jako hybnost bodu, který má hmotnost  $M$  a rychlost  $\mathbf{v}_s$ . Je vhodné poznamenat, že hmotný střed soustavy hmotných bodů nemusí být žádný hmotný bod. Může být pouze geometrickým bodem, v němž žádná skutečná hmota není. Tak např. hmotný střed dvou hmotných bodů leží uprostřed nich.

## 5.2 Pohybové rovnice soustavy hmotných bodů

Přejdeme k popisu pohybu soustavy hmotných bodů. Uvažujeme soustavu hmotných bodů, která není izolovaná. To znamená, že hmotné body budou v interakci s jinými hmotnými body, které nepatří do naší uvažované soustavy hmotných bodů.

Potom sílu  $\mathbf{F}_n$ , která působí na  $n$ -tý hmotný bod v naší soustavě hmotných bodů, si můžeme představit složenou ze dvou výslednic:

a) výslednice sil, kterými na  $n$ -tý hmotný bod působí hmotné body z naší soustavy hmotných bodů. Je to výslednice všech vnitřních (interních) sil a označíme ji  $\mathbf{F}_{In}$ ;

b) výslednice sil, kterými na  $n$ -tý hmotný bod působí hmotné body ležící mimo naší soustavu. Výslednici těchto vnějších (externích) sil označíme  $\mathbf{F}_{En}$ .

To znamená, že na  $n$ -tý hmotný bod bude působit síla

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{In} + \mathbf{F}_{En}. \quad 5(2.1)$$

Pro výslednici vnitřních sil platí

$$\mathbf{F}_{In} = \sum'_{m=1}^N \mathbf{F}_{nm}, \quad 5(2.2)$$

kde  $\mathbf{F}_{nm}$  je síla, kterou působí  $m$ -tý hmotný bod na  $n$ -tý hmotný bod. Symbol  $\sum'_{m=1}^N$  znamená, že sčítáme přes všechna  $m = 1$  až  $N$  kromě  $m = n$ . V dalším podle předcházející domluvy budeme uvádět pouze symbol  $\sum'$ .

Podle třetího Newtonova zákona platí, že síla, kterou působí  $n$ -tý hmotný bod na  $m$ -tý hmotný bod, je stejně velká, ale opačného smyslu jako síla, kterou působí  $m$ -tý hmotný bod na  $n$ -tý. Lze psát

$$\mathbf{F}_{nm} = -\mathbf{F}_{mn} . \quad 5(2.3)$$

Podle druhého Newtonova zákona můžeme pro  $n$ -tý hmotný bod psát pohybovou rovnici ve tvaru

$$m_n \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \mathbf{F}_{\text{En}} + \sum' \mathbf{F}_{nm} . \quad 5(2.4)$$

Pro celou soustavu hmotných bodů pak bude platit

$$\sum m_n \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = \sum \frac{d}{dt} (m_n \mathbf{v}_n) = \sum \mathbf{F}_{\text{En}} + \sum \sum' \mathbf{F}_{nm} . \quad 5(2.5)$$

Označme výslednici všech vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů  $\mathbf{F}$ , tj.

$$\sum \mathbf{F}_{\text{En}} = \mathbf{F} . \quad 5(2.6)$$

Protože platí

$$\sum_n \sum'_m \mathbf{F}_{nm} = 0 , \quad 5(2.7)$$

jak se lehce přesvědčíme použitím vztahu 5(2.3), můžeme pohybovou rovnici pro soustavu hmotných bodů psát v následujících tvarech

$$\sum m_n \mathbf{a}_n = \mathbf{F} , \quad 5(2.8)$$

nebo

$$\sum \frac{d}{dt} (m_n \mathbf{v}_n) = \frac{d}{dt} (\sum m_n \mathbf{v}_n) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} . \quad 5(2.9)$$

Rovnice 5(2.9) bývá označována jako věta o hybnosti soustavy hmotných bodů nebo též první impulsová věta. Pro konečný časový interval  $(t_1, t_2)$  totiž dostaneme integraci

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt , \quad 5(2.10)$$

kde  $\mathbf{P}_1$ , resp.  $\mathbf{P}_2$  jsou celkové hybnosti soustavy hmotných bodů v čase  $t_1$ , resp.  $t_2$  a integrál na pravé straně je impuls.

Rovnice 5(2.9) je analogií druhého Newtonova zákona pro případ soustavy hmotných bodů: Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovná výslednici vnějších sil působících na tuto soustavu a má s ní stejný směr.

K úplnému popisu pohybu soustavy hmotných bodů nestačí první impulsová věta. Všimněme si účinku momentů sil působících na jednotlivé body soustavy hmotných bodů.

Bude-li na  $n$ -tý hmotný bod působit síla  $\mathbf{F}_n$ , pak moment síly  $\mathbf{M}_n$  vzhledem k počátku soustavy souřadnic je

$$\mathbf{M}_n = [\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n]. \quad 5(2.11)$$

Nechť celkový moment sil  $\mathbf{M}$  vůči počátku souřadnic je  $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_n$ . Pak bude platit

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_n = \sum [\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n] = \sum [\mathbf{r}_n \times (\mathbf{F}_{In} + \mathbf{F}_{En})], \quad 5(2.12)$$

resp.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_E, \quad 5(2.13)$$

kde

$$\mathbf{M}_I = \sum [\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{In}] = \sum \mathbf{M}_{In} \quad 5(2.14)$$

a

$$\mathbf{M}_E = \sum [\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{En}] = \sum \mathbf{M}_{En}. \quad 5(2.15)$$

Pro  $\mathbf{M}_I$  platí

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_I &= \sum [\mathbf{r}_n \times \sum' \mathbf{F}_{nm}] = \sum \sum' [\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nm}] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \sum'_m ([\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nm}] + [\mathbf{r}_m \times \mathbf{F}_{mn}]) = \\ &= \frac{1}{2} \sum \sum' [(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m) \times \mathbf{F}_{nm}] = 0, \end{aligned} \quad 5(2.16)$$

protože síla  $\mathbf{F}_{nm}$  a vektor  $\mathbf{r}_{nm} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m$  jsou rovnoběžné. Výsledný moment vnitřních sil  $\mathbf{M}_I$  je roven nule. To znamená, že celkový moment sil  $\mathbf{M}$  bude roven výslednici momentů vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů.

V kapitole 2 jsme odvodili vztah mezi momentem hybnosti a momentem síly (vztah 2(1.8)). Tak pro  $n$ -tý hmotný bod můžeme psát (vůči počátku souřadnic)

$$\frac{d\mathbf{b}_n}{dt} = \frac{d}{dt} ([\mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n]) = \frac{d}{dt} ([\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n]) = \mathbf{M}_n. \quad 5(2.17)$$

Pro celou soustavu dostaneme sčítáním rovnice 5(2.17) pro všechny body soustavy

$$\sum \frac{d\mathbf{b}_n}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{b}_n = \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \sum \mathbf{M}_n = \mathbf{M},$$

tj.

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{M}, \quad 5(2.18)$$

kde

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{b}_n = \sum [\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n]. \quad 5(2.19)$$

Rovnici 5(2.18) integrací upravíme na tvar

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt, \quad 5(2.20)$$

kde  $\mathbf{B}_2$ , resp.  $\mathbf{B}_1$  je celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů v čase  $t_2$ , resp.  $t_1$  a integrál na pravé straně je impuls momentu síly. Rovnice 5(2.18) resp. 5(2.20) se nazývá druhá impulsová věta. Přitom se předpokládá, že moment síly i moment hybnosti se vztahují k témuž bodu.

Z rovnice 5(2.18) vyplývá, že součet momentů vnějších sil působících na jednotlivé hmotné body soustavy hmotných bodů je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy.

Předcházející vztahy jsme odvodili pro libovolně zvolenou inerciální soustavu souřadnic. Soustavu můžeme zvolit pevně spojenou s laboratoří a nazvat laboratorní (budeme předpokládat, že soustava souřadnic spojená s naší Zemí je inerciální).

Co se stane, když za počátek soustavy souřadnic zvolíme hmotný střed soustavy hmotných bodů? Jak se změní jednotlivé vztahy?

Především v tomto případě

$$\mathbf{v}_s = 0 \quad 5(2.21)$$

(protože rychlost hmotného středu vůči hmotnému středu je nulová). Z toho dále plyne, že v této soustavě souřadnic – zvané též soustava hmotného středu (těžišťová), protože počátek soustavy souřadnic je totožný s hmotným středem – je celková hybnost soustavy nulová

$$\mathbf{P}_s = 0. \quad 5(2.22)$$

Použili jsme index  $s$ , abychom zdůraznili, že uvažujeme hybnost soustavy hmotných bodů v soustavě souřadnic s počátkem v hmotném středu. Někdy se užívá



index  $c$  a označení  $C$ -soustava z anglického Centre of mass system (soustava hmotného středu). S touto soustavou se blíže seznámíme v kapitole 6 věnované srážkám částic.

K stejnému závěru dospějeme i tehdy, když použijeme Galileiův princip relativity. Rychlost  $n$ -tého hmotného bodu vůči hmotnému středu (podle 2(1.14)) můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{v}_{sn} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s. \quad 5(2.23)$$

Rovnici 5(2.23) vynásobíme  $m_n$  a sčítáme přes všechna  $n$ . Součin

$$m_n \mathbf{v}_{sn} = \mathbf{p}_{sn} \quad 5(2.24)$$

udává hybnost  $n$ -tého hmotného bodu v soustavě souřadnic s počátkem v hmotném středu. Provedením uvedených matematických operací a využitím rovnic 5(1.4) a 5(1.13) obdržíme

$$\begin{aligned} \sum m_n \mathbf{v}_{sn} &= \sum m_n \mathbf{v}_n - \sum m_n \mathbf{v}_s, \\ \sum \mathbf{p}_{sn} &= \sum \mathbf{p}_n - M \mathbf{v}_s, \\ \mathbf{P}_s &= \mathbf{P} - M \mathbf{v}_s = 0, \end{aligned}$$

což odpovídá rovnici 5(2.22).

Výraz pro moment hybnosti soustavy můžeme upravit

$$\mathbf{B} = \sum m_n [\mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n] = \sum m_n [(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_s) \times \mathbf{v}_n] + \sum m_n [\mathbf{r}_s \times \mathbf{v}_n], \quad 5(2.25)$$

nebo

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_s + [\mathbf{r}_s \times \mathbf{P}] = \mathbf{B}_s + [\mathbf{r}_s \times M \mathbf{v}_s], \quad 5(2.26)$$

kde  $\mathbf{P} = \sum m_n \mathbf{v}_n$  je, jak již bylo uvedeno, celková hybnost soustavy a

$$\mathbf{B}_s = \sum [(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_s) \times m_n \mathbf{v}_n] = \sum [\mathbf{r}_{sn} \times \mathbf{p}_n] = \sum [\mathbf{r}_{sn} \times \mathbf{p}_{sn}] \quad 5(2.27)$$

je moment hybnosti soustavy vzhledem k hmotnému středu.  $\mathbf{B}_s$  je nezávislý na výběru počátku soustavy souřadnic, jak se můžeme přesvědčit výpočtem. Rovnice 5(2.26) vyjadřuje vztah mezi momentem hybnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k soustavě souřadnic spojené s hmotným středem soustavy hmotných bodů a momentem hybnosti vzhledem k soustavě souřadnic spojené s laboratoří.

Rovněž můžeme vyjádřit vztah mezi celkovým momentem sil  $\mathbf{M}$  vzhledem k laboratorní soustavě a v soustavě souřadnic s počátkem v hmotném středu soustavy hmotných bodů. Vyjdeme ze vztahu 5(2.12) a použijeme 5(2.15) a 5(2.16). Dostaneme tak

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_{En} = \sum [\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{En}],$$

což můžeme napsat

$$\mathbf{M} = \sum [(\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_{sn}) \times \mathbf{F}_{En}], \quad 5(2.28)$$

kde  $\mathbf{r}_{sn}$  je polohový vektor  $n$ -tého hmotného bodu vůči hmotnému středu. Provedme matematické úkony na pravé straně rovnice 5(2.28) a obdržíme

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_{En}] + \sum [\mathbf{r}_{sn} \times \mathbf{F}_{En}],$$

resp. s použitím 5(2.6)

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}] + \mathbf{M}_{Es}, \quad 5(2.29)$$

kde

$$\mathbf{M}_{Es} = \sum [\mathbf{r}_{sn} \times \mathbf{F}_{En}] \quad 5(2.30)$$

je výsledný moment vnějších sil vzhledem k hmotnému středu soustavy hmotných bodů. První člen na pravé straně rovnice 5(2.29) udává moment výslednice vnějších sil působících na hmotný střed vzhledem k počátku laboratorní soustavy.

Mezi momentem hybnosti a momentem sil platí v laboratorní (inerciální) soustavě vztah, který je matematicky vyjádřen druhou impulsovou větou — 5(2.18). Do této rovnice dosadíme vztahy 5(2.26) a 5(2.29), čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \mathbf{M}, \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{B}_s + [\mathbf{r}_s \times \mathbf{P}]) &= \mathbf{M}_{Es} + [\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}], \\ \frac{d\mathbf{B}_s}{dt} + [\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}] &= \mathbf{M}_{Es} + [\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}], \\ \frac{d\mathbf{B}_s}{dt} &= \mathbf{M}_{Es}. \end{aligned} \quad 5(2.31)$$

Tato rovnice je analogická rovnici 5(2.18). Obě totiž udávají vztah mezi součtem momentů vnějších sil a časovou změnou momentu hybnosti soustavy hmotných bodů. Je však mezi nimi i rozdíl. Rovnice 5(2.18), druhá impulsová věta, platí jen tehdy, když momenty sil i moment hybnosti jsou určeny vzhledem k pevnému (nepohyblivému) bodu, obvykle počátku inerciální soustavy souřadnic. Rovnice 5(2.31) platí, jestliže momenty vnějších sil i moment hybnosti jsou spočítány vůči hmotnému středu, a to i v tom případě, když hmotný střed není v klidu v inerciální soustavě. Tato rovnice má důležitý význam při diskusi pohybu tuhého tělesa.

Odvozené rovnice umožňují popsat translační pohyb soustavy, jestliže známe (celkovou) hmotnost soustavy (nemusíme znát hmotnosti jednotlivých bodů) a výslednici vnějších sil. Potom translační pohyb soustavy hmotných bodů můžeme popsat jako pohyb hmotného středu soustavy, jehož hmotnost je rovna hmotnosti celé soustavy. Můžeme použít rovnice 5(1.13) a 5(2.16) nebo při konstantnosti hmotnosti soustavy (což předpokládáme) i rovnice

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_s . \quad 5(2.32)$$

### 5.3 Kinetická a potenciální energie soustavy hmotných bodů

Síly působící na soustavu hmotných bodů vyvolávají změny pohybového stavu hmotných bodů. Budeme předpokládat, že silové pole působící na hmotné body bude nezávislé na čase. Pak, podobně jako v kapitole 2, můžeme spočítat pro každý  $n$ -tý hmotný bod elementární práci silového pole při elementárním posuvu bodu o  $d\mathbf{r}_n$ . Výsledná práce silového pole příslušná posuvu po určité dráze je pak dána rovnicí 2(3.2). Předpokládejme, že soustava hmotných bodů v důsledku působení sil  $\mathbf{F}_1$  až  $\mathbf{F}_n$  přejde z určitého počátečního stavu do určitého konečného stavu. Počáteční stav soustavy označme písmenem (A) a konečný stav soustavy písmenem (B). Potom práce silového pole při takovém posuvu jednotlivých hmotných bodů, že soustava hmotných bodů přejde ze stavu (konfigurace) A do stavu (konfigurace) B je dána rovnicí

$$A = A_{BA} = \sum \int_{(A)}^{(B)} (\mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}_n) . \quad 5(3.1)$$

Práce na soustavu vykonaná je rovna přírůstku kinetické energie soustavy. Označíme-li kinetickou energii soustavy hmotných bodů v počátečním stavu  $W_k(A)$  a v konečném  $W_k(B)$ , můžeme psát

$$A = A_{BA} = W_k(B) - W_k(A) = \Delta W_k . \quad 5(3.2)$$

Kinetickou energií soustavy rozumíme součet kinetických energií jednotlivých hmotných bodů dané soustavy. Platí

$$W_k = \sum \frac{1}{2} m_n v_n^2 . \quad 5(3.3)$$

Protože máme

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{In} + \mathbf{F}_{En} = \sum \mathbf{F}_{nm} + \mathbf{F}_{En} ,$$

dostaneme

$$A = \sum \int_{(A)}^{(B)} (\mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}_n) = \sum \int_{(A)}^{(B)} (\mathbf{F}_{In} \cdot d\mathbf{r}_n) + \sum \int_{(A)}^{(B)} (\mathbf{F}_{En} \cdot d\mathbf{r}_n).$$

Označíme-li práci vykonanou vnitřními silami

$$A_I = \sum \int_{(A)}^{(B)} (\mathbf{F}_{In} \cdot d\mathbf{r}_n) = \sum \sum' \int_{(A)}^{(B)} (\mathbf{F}_{mn} \cdot d\mathbf{r}_n) \quad 5(3.4)$$

a vnějšími silami

$$A_E = \sum \int_{(A)}^{(B)} (\mathbf{F}_{En} \cdot d\mathbf{r}_n), \quad 5(3.5)$$

obdržíme pro celkovou práci

$$A = A_I + A_E. \quad 5(3.6)$$

Použitím rovnic 5(3.2) a 5(3.6) dostaneme

$$A_I + A_E = W_k(B) - W_k(A). \quad 5(3.7)$$

Poslední rovnice udává, že změna kinetické energie soustavy hmotných bodů je rovna práci vykonané vnějšími a vnitřními silami. To znamená, že kinetickou energii soustavy hmotných bodů ovlivňují vnější i vnitřní síly. Vnitřní síly ovlivňují změnu kinetické energie jen u volné soustavy; v tuhé soustavě hmotných bodů vnitřní síly práci nekonají, protože vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body soustavy se nemění. U volné soustavy může dojít ke změně kinetické energie i v případě, kdy na soustavu nepůsobí žádné vnější síly.

Uvažujeme-li dvě kartézské soustavy souřadnic, laboratorní a těžišťovou, můžeme použitím Galileiovy transformace — 5(2.23) — rovnicí 5(3.3) pro kinetickou energii soustavy hmotných bodů upravit:

$$\begin{aligned} W_k &= \sum \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum \frac{1}{2} m_n (\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{sn}) \cdot (\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{sn}) = \\ &= \frac{1}{2} v_s^2 \sum m_n + \mathbf{v}_s \cdot (\sum m_n \mathbf{v}_{sn}) + \sum \frac{1}{2} m_n v_{sn}^2, \end{aligned} \quad 5(3.8)$$

$$W_k = \frac{1}{2} M v_s^2 + W_{kI}. \quad 5(3.9)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice 5(3.8) je v důsledku vztahu 5(2.22) roven nule.

Výraz

$$W_{kI} = \sum \frac{1}{2} m_n v_{sn}^2 \quad 5(3.10)$$

se nazývá vnitřní kinetická energie soustavy hmotných bodů; udává kinetickou energii soustavy hmotných bodů v soustavě souřadnic, jejíž počátek je totožný s hmotným středem.

Rovnice 5(3.9) je Königova věta. Tvrdí, že celková kinetická energie soustavy hmotných bodů je rovna součtu kinetické energie bodu o hmotnosti rovné hmotnosti soustavy pohybujícího se rychlostí  $v_s$  hmotného středu soustavy a vnitřní kinetické energie.

Uvažujme opět soustavu  $N$  hmotných bodů o hmotnostech  $m_1, m_2$  až  $m_N$ . Jejich polohy vůči počátku inerciální soustavy souřadnic jsou určeny polohovými vektory  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  až  $\mathbf{r}_N$ . Tyto hmotné body působí vzájemně na sebe. Předpokládejme, že působí na sebe pouze gravitačními silami. To znamená, že gravitační pole vytvořené hmotným bodem o hmotnosti  $m_n$  bude působit na hmotný bod o hmotnosti  $m_m$ , který je ve vzdálenosti  $r_{nm}$ , silou danou vztahem

$$\mathbf{F}_{mn} = -\kappa \frac{m_n m_m}{r_{nm}^3} \mathbf{r}_{nm}. \quad 5(3.11)$$

Takovéto silové pole, které je centrálním silovým polem, vytváří každý hmotný bod naší soustavy hmotných bodů. Výsledné silové pole, které je superpozicí dílčích polí, je konzervativní (viz odstavec 2.4). Přejde-li soustava hmotných bodů ze stavu (A) do stavu (B), vykoná se práce (označíme  $A_I$ , protože se jedná o práci v silovém poli vnitřních sil), pro kterou lze psát

$$A_I = \frac{1}{2}\kappa \sum_n \sum'_m m_n m_m \left( \frac{1}{r_{nm}(\text{B})} - \frac{1}{r_{nm}(\text{A})} \right), \quad 5(3.12)$$

kde  $r_{nm}(\text{B})$ , resp.  $r_{nm}(\text{A})$  je vzdálenost hmotných bodů o hmotnosti  $m_m$  a  $m_n$ , když soustava je ve stavu B (konečný stav), resp. ve stavu A (počáteční stav).

Vykonanou práci možno vyjádřit jako úbytek potenciální energie. Zřejmě platí

$$A_I = W_{\text{pl}}(\text{A}) - W_{\text{pl}}(\text{B}), \quad 5(3.13)$$

kde vnitřní potenciální energii soustavy hmotných bodů v počátečním stavu jsme označili  $W_{\text{pl}}(\text{A})$  a v konečném stavu  $W_{\text{pl}}(\text{B})$ .

Pro potenciální energii soustavy hmotných bodů interagujících podle gravitačního zákona dostaneme

$$W_{\text{pl}} = -\frac{1}{2}\kappa \sum_n \sum'_m \frac{m_n m_m}{r_{nm}}. \quad 5(3.14)$$

Potenciální energii můžeme vyjádřit i pomocí potenciálu. V analogii s potenciálem hmotného bodu (vztah 2(4.32)) platí

$$U_{nl} = -\kappa \sum'_m \frac{m_m}{r_{nm}}. \quad 5(3.15)$$

$U_{nI}$  je potenciál vytvořený v místě  $n$ -tého hmotného bodu všemi ostatními. Potom potenciální energie

$$W_{pI} = \frac{1}{2} \sum_n m_n U_{nI} . \quad 5(3.16)$$

## 5.4 Izolovaná soustava hmotných bodů

Izolovanou soustavou hmotných bodů (těles) rozumíme takovou skupinu, která není vystavena působení sil z vnějšku. Můžeme tudíž uvažovat, jak se změní pohybové rovnice za podmínek, kdy pro každé  $n$  platí

$$\mathbf{F}_{En} = 0 . \quad 5(4.1)$$

Pohyb každého hmotného bodu soustavy bude potom ovlivněn pouze jeho interakcí s ostatními hmotnými body soustavy.

V tomto případě platí zákony zachování hybnosti, momentu hybnosti a energie soustavy.

Zákon zachování hybnosti izolované soustavy tvrdí, že hybnost soustavy je konstantní.

Z rovnice 5(2.9) za použití 5(4.1) totiž plyne

$$\mathbf{P} = \text{konst} , \quad 5(4.2)$$

nebo též

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n + \dots + \mathbf{p}_N = \text{konst} , \quad 5(4.3)$$

kde  $\mathbf{p}_n$  jsou hybnosti jednotlivých hmotných bodů vzhledem k laboratorní soustavě. Zřejmě platí

$$\mathbf{p}_1(t_1) + \mathbf{p}_2(t_1) + \dots + \mathbf{p}_n(t_1) = \mathbf{p}_1(t_2) + \mathbf{p}_2(t_2) + \dots + \mathbf{p}_n(t_2) ,$$

kde  $\mathbf{p}_n(t_1)$  resp.  $\mathbf{p}_n(t_2)$  jsou hybnosti  $n$ -tého hmotného bodu v čase  $t_1$ , resp.  $t_2$ .

Současně v případě izolované soustavy

$$M\mathbf{v}_s = \text{konst} . \quad 5(4.4)$$

Protože však předpokládáme, že hmotnost soustavy hmotných bodů se nemění, tj.  $M = \sum m_n = \text{konst}$ , je též

$$\mathbf{v}_s = \text{konst} . \quad 5(4.5)$$

Poslední rovnice udává, že hmotný střed izolované soustavy hmotných bodů se pohybuje konstantní rychlostí v každé inerciální soustavě souřadnic.

Ilustrujme odvozené zákonitosti na případě dvou hmotných bodů (těles), které budou tvořit izolovanou soustavu. Můžeme například uvažovat pohyb

umělé družice kolem Země s tím, že pro tento výpočet zanedbáme silové působení Slunce a dalších planet sluneční soustavy i dalších objektů vesmíru.

Pro síly vnitřní platí

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},$$

kde  $\mathbf{F}_{12}$  je síla, kterou působí těleso 2 na těleso 1. Polohový vektor tělesa 1 o hmotnosti  $m_1$  označme  $\mathbf{r}_1$ , jeho rychlost  $\mathbf{v}_1$ . Podobně označme veličiny charakterizující těleso 2.

Vektor  $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  je polohový vektor tělesa 1 vůči tělesu 2. Derivací polohových vektorů podle času dostaneme rychlosti

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

a

$$\mathbf{v}_{21} = \frac{d\mathbf{r}_{21}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

Rychlost  $\mathbf{v}_{21}$  je relativní rychlost tělesa 1 vůči tělesu 2.

Platí vztahy (hmotnosti obou těles pokládáme za konstantní)

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}$$

a

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}.$$

Podělením první rovnice  $m_1$ , druhé  $m_2$  a odečtením druhé rovnice od první obdržíme

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}.$$

Použitím výše uvedených vztahů dostaneme

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_1} + \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2},$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{21}}{dt} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}$$

a formálně též

$$\mu \frac{d\mathbf{v}_{21}}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \quad 5(4.6)$$

kde

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad 5(4.7)$$

resp.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad 5(4.8)$$

$\mu$  se nazývá redukovaná hmotnost soustavy.

Rovnice 5(4.6) je pohybovou rovnicí jednoho hmotného bodu vůči druhému. Relativní pohyb dvou hmotných bodů (v inerciální soustavě souřadnic) podrobených jen jejich vzájemnému působení je možné popsat pohybem hmotného bodu o hmotnosti rovné redukované hmotnosti za účinku síly, která je rovna vzájemné interakci uvažovaných dvou hmotných bodů.

V mnoha případech – příkladem může být pohyb Měsíce kolem Země, pohyb družice kolem Země atd. – je hmotnost tělesa 1 mnohem menší než hmotnost tělesa 2, tj.  $m_1 \ll m_2$ .

Potom

$$\mu = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1$$

a rovnici 5(4.6) lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_{12} \approx m_1 \frac{d\mathbf{v}_{21}}{dt}. \quad 5(4.9)$$

Pohybové rovnice pro obě částice můžeme však psát i ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12},$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}.$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0,$$



resp.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0.$$

Odtud plyne

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{konst.}$$

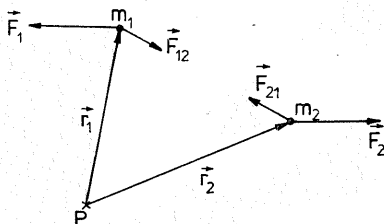
Zákon zachování momentu hybnosti dostaneme z rovnice 5(2.18) za předpokladu  $\mathbf{M} = 0$ . Jeho matematický zápis je

$$\mathbf{B} = \text{konst.}, \quad 5(4.10)$$

resp.

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n + \dots + \mathbf{b}_N = \text{konst.}, \quad 5(4.11)$$

kde  $\mathbf{b}_n$  jsou momenty hybnosti jednotlivých hmotných bodů soustavy.



Obr. 5.1

Zákon zachování momentu hybnosti tvrdí, že celkový moment hybnosti izolované soustavy hmotných bodů je konstantní.

Podobně jako pro hybnost můžeme i zákon zachování momentu hybnosti vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{b}_1(t_1) + \dots + \mathbf{b}_n(t_1) + \dots + \mathbf{b}_N(t_1) = \mathbf{b}_1(t_2) + \dots + \mathbf{b}_N(t_2),$$

kde  $\mathbf{b}_n(t_1)$ , resp.  $\mathbf{b}_n(t_2)$  jsou momenty hybnosti  $n$ -tého bodu v čase  $t_1$ , resp.  $t_2$ .

V soustavě hmotných bodů ( $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_{En} = 0$ ) však může být celkový moment vnějších sil vůči počátku soustavy souřadnic nenulový, tj.  $\mathbf{M} \neq 0$ . Jako typický příklad se uvádí působení tzv. dvojice sil na soustavu hmotných bodů. Na první hmotný bod působí vnější síla  $\mathbf{F}_1$  a na druhý hmotný bod síla  $\mathbf{F}_2$ , přičemž obě síly jsou rovnoběžné, opačně orientované a neleží v jedné přímce, jak je znázorněno na obr. 5.1.

Platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 ,$$

$$\mathbf{M}_1 = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1] , \quad \mathbf{M}_2 = [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2] ,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2] ,$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}_1)] ,$$

$$\mathbf{M} = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1] = [\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}_1] \neq 0 ,$$

protože jak  $\mathbf{r}_{21}$ , tak  $\mathbf{F}_1$  jsou různé od nuly a nejsou navzájem rovnoběžné, jako v případě vnitřních sil

Pro izolovanou soustavu hmotných bodů platí i zákon zachování mechanické energie.

Protože  $\mathbf{F}_{En} = 0$ , je i práce vnějších sil rovna nule, tj.  $A_E = 0$ . Potom odečtením rovnice 5(3.13) od rovnice 5(3.7) dostaneme

$$W_k(\mathbf{B}) - W_k(\mathbf{A}) = -W_{pl}(\mathbf{B}) + W_{pl}(\mathbf{A}) ,$$

a tudíž

$$W_k(\mathbf{B}) + W_{pl}(\mathbf{B}) = W_k(\mathbf{A}) + W_{pl}(\mathbf{A}) . \quad 5(4.12)$$

Pro mechanickou energii  $W_m$  izolované soustavy hmotných bodů tudíž platí

$$W_m = W_k + W_{pl} = \text{konst} . \quad 5(4.13)$$

Zákon zachování mechanické energie se dá zobecnit na zákon zachování energie. Při všech dějích probíhajících v přírodě se mění pouze formy energie, ale její celková hodnota zůstává zachována.

V případě, že vnější síly jsou nenulové (soustava není izolovaná), ale konzervativní, můžeme práci v poli vnějších sil  $A_E$  vyjádřit pomocí potenciální energie. Bude platit

$$A_E = W_{pE}(\mathbf{A}) - W_{pE}(\mathbf{B}) , \quad 5(4.14)$$

kde výrazem  $W_{pE}(\mathbf{A})$ , resp.  $W_{pE}(\mathbf{B})$  jsme označili potenciální energii, kterou soustava získá v poli vnějších sil (proto index E), když soustava se nachází v počátečním, resp. konečném stavu. Jednoduchou úpravou rovnic 5(3.7), 5(3.13) a 5(4.14) dostaneme

$$W_k + W_{pl} + W_{pE} = W = \text{konst} . \quad 5(4.15)$$

Veličinu  $W$  nazveme celkovou energií soustavy hmotných bodů.

Je vhodné si uvědomit, že kinetická energie závisí na rychlosti, a tak vlastně závisí i na tom, v jaké soustavě souřadnic uvažujeme pohyb soustavy hmotných

bodů. Vnitřní kinetická energie  $W_{ki}$  je kinetická energie soustavy hmotných bodů v soustavě souřadnic, jejíž počátek je totožný s hmotným středem soustavy.

Vnitřní potenciální energie závisí pouze na vzájemné poloze hmotných bodů, což znamená, že v každé soustavě souřadnic má stejnou hodnotu.

Veličinu

$$W_{ki} + W_{pi} = W_i \quad 5(4.16)$$

nazýváme vnitřní energie soustavy hmotných bodů. Velmi často se při diskusi pohybu a stavu soustavy hmotných bodů uvažuje pouze vnitřní energie, i když při diskusi se neuvádí index  $I$ , jak jsme prováděli v této kapitole.

Pro izolovanou soustavu hmotných bodů platí tři zákony zachování

1. zákon zachování hybnosti

$$\mathbf{P} = \text{konst} , \quad 5(4.2)$$

2. zákon zachování momentu hybnosti

$$\mathbf{B} = \text{konst} , \quad 5(4.10)$$

3. zákon zachování energie

$$W_m = \text{konst} . \quad 5(4.13)$$

Tyto zákony mají základní význam v celé fyzice. Udávají nám 7 mechanických veličin:

3 složky vektoru hybnosti,

3 složky momentu hybnosti a energii.

## 5.5 Konfigurační, impulsový a fázový prostor

Při popisu soustavy hmotných bodů se často používá geometrická interpretace a terminologie.

Místo toho, abychom říkali, že první hmotný bod má souřadnice  $x_1, y_1, z_1$ , druhý hmotný bod souřadnice  $x_2, y_2, z_2, \dots$ ,  $N$ -tý hmotný bod souřadnice  $x_N, y_N, z_N$ , zavádíme  $3N$ -rozměrný (ortogonální) *konfigurační prostor*, v němž jsou polohy (konfigurace) soustavy  $N$  hmotných bodů zobrazeny *jediným* (tzv. *konfiguračním*) bodem  $R_N$ . Objemový element konfiguračního prostoru

$$d\Phi_q = dx_1 dy_1 dz_1 \dots dx_N dy_N dz_N \quad 5(5.1)$$

vyjadřuje, že souřadnice hmotných bodů leží v intervalech

$$dx_1, dy_1, dz_1, \dots, dx_N, dy_N, dz_N .$$

V předešlém výkladu jsme užívali kartézské souřadnice  $x, y, z$ . Obdobně postupujeme i při použití křivočarých souřadnic  $q_K$ . Nechť soustava hmotných bodů má  $f$  stupňů volnosti. Souřadnice hmotných bodů nechť jsou  $q_K, K = 1, 2, \dots, f$ . Pro soustavu hmotných bodů nepodrobenou vazbám je  $f = 3N$ . V případě vazeb (viz následující článek 5.6) se tato hodnota ( $3N$ ) zmenší o počet vazebních podmínek. Konfiguraci soustavy hmotných bodů opět zobrazíme bodem v  $f$ -rozměrném konfiguračním prostoru; souřadnice tohoto bodu jsou  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Objemovým elementem konfiguračního prostoru rozumíme veličinu

$$d\Phi_q = dq_1 dq_2 \dots dq_f. \quad 5(5.2)$$

Obdobně popíšeme i hybnosti  $p_1, p_2, \dots, p_f$  soustavy hmotných bodů (o  $f$  stupních volnosti) tak, že zavedeme  $f$ -rozměrný *prostor hybností* neboli *impulsový prostor*. Objemový element prostoru hybností

$$d\Phi_p = dp_1 dp_2 \dots dp_f \quad 5(5.3)$$

vyjadřuje, že hybnosti hmotných bodů leží v intervalech  $dp_1, dp_2, \dots, dp_f$ .

V klasické mechanice je pohybový stav hmotného bodu určen jeho polohou a hybností. Stav soustavy hmotných bodů o  $f$  stupních volnosti lze geometricky znázornit bodem v  $2f$ -rozměrném ortogonálním prostoru, jehož osami jsou zobecněné (křivočaré) souřadnice  $q_1, q_2, \dots, q_f$  a příslušné hybnosti  $p_1, p_2, \dots, p_f$ . Tento prostor nazýváme *fázovým prostorem*. Tyto body, jimiž geometricky znázorňujeme (reprezentujeme) stav soustavy hmotných bodů v každém časovém okamžiku, nazýváme *reprezentativními* (neboli též *fázovými*) *body*. Změnu stavu, tj. vývoj soustavy, lze pak zobrazit pohybem reprezentativního bodu ve fázovém prostoru; příslušnou křivku opisovanou tímto bodem nazýváme *reprezentativní* neboli *fázovou trajektorií*. Pohyb reprezentativního bodu je určen pohybovými rovnicemi soustavy hmotných bodů; veličiny  $\dot{q}_K, \dot{p}_K$  ( $K = 1, 2, \dots, f$ ) jsou komponentami  $2f$ -rozměrného vektoru rychlosti reprezentativního bodu. Je-li známa poloha reprezentativního bodu v jistém časovém okamžiku  $t_0$ , pak z pohybových rovnic lze určit jeho polohu v libovolném jiném minulém nebo budoucím čase  $t$ .

Objemový element fázového prostoru

$$d\Phi \equiv d\Phi_q d\Phi_p = dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f \quad 5(5.4)$$

vyjadřuje „rozmazání“ souřadnic v intervalech  $dq_1 \dots dq_f$  a hybností v intervalech  $dp_1 \dots dp_f$ .

Reprezentativní trajektorie *konzervativního* systému leží na energetické nadploše

$$W(q, p) \equiv W(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) = W_0. \quad 5(5.5)$$

Fázový objem  $\Phi$  příslušný stavům (soustavy hmotných bodů), jejichž energie nepřevyšuje  $W_0$ , je určen vztahem

$$\Phi = \int_{W \leq W_0} d\Phi. \quad 5(5.6)$$

V obecném případě je výpočet fázového objemu velmi složitým úkolem, jelikož se jedná o výpočet komplikovaných mnohonásobných integrálů. Jednoduché ilustrace takových výpočtů najde čtenář v přiložených úlohách.

Dá se dokázat, že fázový objem konzervativního systému se zachovává: při vývoji systému se může měnit pouze tvar fázového objemu, avšak velikost fázového objemu se nemění. Důkaz tohoto tvrzení, zvaného Liouvilleův teorem, jakož i souvislosti fázového objemu s termodynamickými veličinami patří do samostatného předmětu – statistické fyziky\*).

## 5.6 Vazby. Lagrangeovy rovnice prvního druhu

Často se setkáváme se situací, že pohyb částic je omezen jistými *dodatečnými podmínkami* – tzv. *vazbami*. Tyto vazby mohou být zadány nejrůznějšími způsoby: funkcemi souřadnic a času, diferenciálními rovnicemi apod. Zde probereme pouze nejjednodušší případ, kdy je pohyb hmotného bodu vázán na plochu

$$f(\mathbf{r}) \equiv f(x, y, z) = 0. \quad 5(6.1)$$

Příkladem může být pohyb částice po nakloněné rovině, kdy částice pohybující se pod vlivem tíže je vázána na tuto rovinu. Místo 5(6.1) můžeme mít podmínku  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ , což značí plochu měnící se s časem. Jiným příkladem může být soustava hmotných bodů s neměnnými i vzájemnými vzdálenostmi. Takovou soustavu nazýváme *dokonale tuhým tělesem* (viz kapitolu 7). Zde se však omezíme na vazby typu 5(6.1).

*Virtuálním\*) posunutím  $d\mathbf{r}$*  nazveme každou malou změnu polohy hmotného bodu, která je možná při existujících vazbách. Pro jistotu ještě zdůrazníme, že se jedná o možnou, ne nutně realizovanou změnu polohy.

Při virtuálním posunutí  $\delta\mathbf{r}$  zůstane hmotný bod na ploše 5(6.1), proto bude platit (viz matematický dodatek D.5)

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0,$$

\*) Viz např. KVASNICA J.: Statistická fyzika, Academia Praha 1983.

\*) Z latinského virtualis = ctící, respektující.

resp.

$$\delta \mathbf{r} \cdot \nabla f = 0 . \quad 5(6.2)$$

Při poslední úpravě jsme užili zápisu D(5.9).

Vztah mezi hnací silou  $\mathbf{F}$  a zrychlením  $\mathbf{a}$  zapíšeme ve tvaru  $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$ , resp.

$$(\mathbf{F} - m\mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 . \quad 5(6.3)$$

K této rovnici přičteme  $\lambda$ -násobek rovnice 5(6.2), což dá

$$(\mathbf{F} + \lambda \nabla f - m\mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0 . \quad 5(6.4)$$

Zde  $\delta \mathbf{r}$  značí *virtuální, nikoli libovolnou* změnu polohy, proto z 5(6.4) nelze usoudit, že  $\mathbf{F} + \lambda \nabla f - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Můžeme však zvolit (zatím libovolný) parametr  $\lambda$  tak, aby rovnice 5(6.4) platila pro libovolnou změnu polohy  $\delta \mathbf{r}$ . Při takto zvoleném  $\lambda$  bude

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda \nabla f . \quad 5(6.5)$$

Vzniklá rovnice je speciálním případem *Lagrangeových rovnic prvního druhu*, jež určují pohyb částic podrobených vazbám (J. L. LAGRANGE, 1775). Veličinu

$$\mathbf{F}^* \equiv \lambda \nabla f \quad 5(6.6)$$

nazýváme *vazební silou*. Z 5(6.2) plyne, že práce  $\delta A^* = \mathbf{F}^* \cdot \delta \mathbf{r}$  při *virtuálním posunutí* je rovna nule

$$\delta A^* = \mathbf{F}^* \cdot \delta \mathbf{r} = \lambda \delta \mathbf{r} \cdot \nabla f = 0 , \quad 5(6.7)$$

což je speciálním případem tzv. *d'Alembertova principu virtuálních prací* (J. d'ALEMBERT, 1770), jež se podrobně probírá v analytické mechanice.

Rovnicím 5(6.5) a 5(6.6) lze dát jednoduchou interpretaci. Necht  $\mathbf{F}$  je konzervativní síla, tj.  $\mathbf{F} = -\nabla W_p$ . Rovnici 5(6.5) lze pak zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F} = -\nabla W_p' ,$$

kde  $W_p' = W_p - \lambda f$ . Veličina  $-\lambda f$  tedy vystupuje v roli *dodatečné potenciální energie*, kterou je hmotný bod připoután na plochu  $f(\mathbf{r}) = 0$ .

Rovnice 5(6.5) se vztahuje na jediný hmotný bod podrobený hnací síle  $\mathbf{F}$  a jediné vazbě  $f(\mathbf{r}) = 0$ , popř.  $f(\mathbf{r}, t) = 0$ . Zobecnění na soustavu  $N$  hmotných bodů podrobených hnacím silám  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N$  a  $M$  vazbám

$$f_K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad K = 1, 2, \dots, M \quad 5(6.8)$$

je nasnadě. Místo 5(6.2) a 5(6.3) budeme mít

$$\sum_{L=1}^N \delta \mathbf{r}_L \cdot \nabla_L f_K = 0, \quad \sum_{L=1}^N (\mathbf{F}_L - m_L \mathbf{a}_L) \delta \mathbf{r}_L = 0.$$

Zde symbol  $\nabla_L$  označuje vektor o složkách  $\partial f/\partial x_L$ ,  $\partial f/\partial y_L$ ,  $\partial f/\partial z_L$ . Stejným postupem jako při odvozování 5(6.5) dospějeme k odpovídajícím Lagrangeovým rovnicím prvního druhu

$$m_L \mathbf{a}_L = \mathbf{F}_L + \sum_{K=1}^M \lambda_K \nabla_L f_K. \quad 5(6.9)$$

Soustava  $N$  hmotných bodů nepodrobených vazbám má  $3N$  stupňů volnosti. V případě  $M$  vazeb je počet stupňů volnosti  $f = 3N - M$ .

## 5.7 Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Hamiltonovy kanonické rovnice

Newtonovy pohybové rovnice lze různě upravovat a dát jim jiný tvar, který je vhodnější pro obecné teoretické úvahy.

Abychom zbytečně nekomplikovali jednoduchou ideu, začneme jednorozměrným pohybem, kdy pohybová rovnice zní

$$\frac{d}{dt} (mv) = - \frac{\partial W_p}{\partial x}.$$

Zavedeme kinetickou energii  $W_k = mv^2/2$ , odkud plyne  $mv = \partial W_k/\partial v$ , takže je

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k}{\partial v} \right) + \frac{\partial W_p}{\partial x} = 0.$$

Rovnici lze převést na symetričtější tvar tak, že zavedeme *Lagrangeovu funkci (lagrangián)*  $L = W_k - W_p$ . Jelikož je

$$\frac{\partial W_k}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = - \frac{\partial L}{\partial x},$$

platí také

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad 5(7.1)$$

Zobecnění na soustavu  $N$  částic je přímočaré. Místo souřadnic  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$  zavedeme označení  $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ , takže je

$$W_k = \sum_K \frac{1}{2} m_K v_K^2, \quad W_p \equiv W_p(q_1, q_2, \dots, q_{3N}). \quad 5(7.2)$$

Zde  $v_K \equiv \dot{q}_K \equiv (dq_K/dt)$  jsou složky rychlostí částic. Zavedeme *Lagrangeovu funkci* jako rozdíl kinetické a potenciální energie

$$L = W_k - W_p = \sum_K \frac{1}{2} m_K v_K^2 - W_p. \quad 5(7.3)$$

Místo 5(7.1) budeme mít *Lagrangeovy rovnice druhého druhu*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_K} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_K} = 0. \quad 5(7.4)$$

Snadno se přesvědčíme, že tyto rovnice jsou ekvivalentní Newtonovým pohybovým rovnicím  $(dp_K/dt) = -(\partial W_p/\partial q_K)$ .

Veličiny

$$p_K = \frac{\partial L}{\partial v_K} \quad 5(7.5)$$

jsou *složky hybnosti* sdružené se souřadnicí  $q_K$ .

Najdeme časovou derivaci Lagrangeovy funkce  $L \equiv L(q_K, v_K)$ . Podle pravidel o derivování složené funkce máme

$$\frac{dL}{dt} = \sum_K \left( \frac{\partial L}{\partial q_K} \frac{dq_K}{dt} + \frac{\partial L}{\partial v_K} \frac{dv_K}{dt} \right).$$

S ohledem na 5(7.4) a 5(7.5) můžeme vyjádřit

$$\frac{dL}{dt} = \sum_K \left( v_K \frac{dp_K}{dt} + p_K \frac{dv_K}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_K p_K v_K \right),$$

takže je

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad 5(7.6)$$

Zde jsme symbolem  $H$  označili *Hamiltonovu funkci (hamiltonián)*

$$H = \sum_K p_K v_K - L. \quad 5(7.7)$$



Jelikož  $(dH/dt) = 0$ , funkce  $H$  se při vývoji systému *nemění, zachovává se*. Fyzikální význam najdeme tak, že v 5(7.7) zavedeme  $p_K = m_K v_K$  a užijeme 5(7.3). Výsledkem je vztah

$$H = W_k + W_p, \quad 5(7.8)$$

z něhož je vidět, že hamiltonián představuje *celkovou energii soustavy*. Rovnice 5(7.6) tak vyjadřuje *zákon zachování celkové energie*.

S ohledem na pozdější reference uvedeme hamiltonián jedné částice (hmotného bodu)

$$H = \mathbf{p}\mathbf{v} - L. \quad 5(7.9)$$

Hamiltonián  $H$  snadno vyjádříme jako funkci souřadnic  $q_K$  a hybností  $p_K$ , a sice

$$H \equiv H(p_K, q_K) = \sum_K \frac{p_K^2}{2m_K} + W_p(q_1, q_2, \dots, q_{3N}). \quad 5(7.10)$$

Pro úplný diferenciál máme vyjádření

$$dH = \sum_K \left( \frac{\partial H}{\partial p_K} dp_K + \frac{\partial H}{\partial q_K} dq_K \right). \quad 5(7.11)$$

Jiné vyjádření dostaneme z 5(7.7)

$$dH = \sum_K \left( v_K dp_K + p_K dv_K \right) - dL.$$

Poněvadž

$$dL = \sum_K \left( \frac{\partial L}{\partial v_K} dv_K + \frac{\partial L}{\partial q_K} dq_K \right) = \sum_K \left( p_K dv_K + \frac{dp_K}{dt} dq_K \right),$$

je také

$$dH = \sum_K \left( \frac{dq_K}{dt} dp_K - \frac{dp_K}{dt} dq_K \right). \quad 5(7.12)$$

Srovnáním 5(7.11) a 5(7.12) dostaneme *Hamiltonovy kanonické rovnice* (W. R. HAMILTON, 1850)

$$\frac{dq_K}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_K}, \quad \frac{dp_K}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_K}. \quad 5(7.13)$$

Zdůrazněme, že se jedná o soustavu diferenciálních rovnic *prvního řádu*.

Při odvozování Lagrangeových rovnic druhého druhu 5(7.4) a Hamiltonových kanonických rovnic 5(7.13) jsme užili kartézské soustavy souřadnic  $q_K \equiv (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$ . V analytické mechanice se dokazuje, že tyto rovnice si zachovají svůj tvar i v libovolné *křivočaré* soustavě souřadnic  $q_K$ .

## Řešené úlohy

1. Najděte fázovou trajektorii lineárního harmonického oscilátoru.

Řešení. Z výrazu pro energii lineárního harmonického oscilátoru

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = W$$

je vidět, že se jedná o elipsu s poloosami  $a = (2mW)^{1/2}$ ,  $b = (2W/m\omega^2)^{1/2}$ .

2. Najděte fázový objem lineárního harmonického oscilátoru. Řešení. Podle předešlé úlohy je to plocha elipsy s poloosami  $a = (2mW)^{1/2}$ ,  $b = (2mW/m\omega^2)^{1/2}$ , tj.  $\Phi = \pi ab = 2\pi W/\omega$ .

3. Určete fázový objem volné částice (hmotného bodu) pohybující se v objemu  $V$ .

Řešení. Jelikož  $W = p^2/2m$ , jedná se o výpočet integrálu

$$\Phi = \int dx dy dz \int dp_x dp_y dp_z.$$

Integrál přes prostorové souřadnice dá objem  $V$ . Integrace přes hybnosti se provádí v oblasti

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 2mW,$$

což je objem koule o poloměru  $r = (2mW)^{1/2}$ . Je tedy

$$\Phi = \frac{4}{3}\pi r^3 V = \frac{4}{3}\pi V(2mW)^{3/2}.$$

4. Vypočítejte fázový objem soustavy  $N$  stejných hmotných bodů pohybujících se v objemu  $V$ .

Řešení. Integrace přes prostorové souřadnice každé z částic dá objem  $V$ , takže konfigurační objem  $\Phi_q = V^N$ . Objem  $\Phi_p$  prostoru hybnosti je objem  $3N$ -rozměrné koule

$$p_1^2 + \dots + p_N^2 = p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2 + \dots + p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2 = 2mW$$

o poloměru  $r = (2mW)^{1/2}$ . Objem  $f$ -rozměrné koule je úměrný  $r^f$ , tj.  $\Phi_p = Cr^f$ . Multiplikační konstanta  $C$  se určí úplnou indukci. Pro sudé  $f$  je  $C = \pi^{f/2}/(f/2)!$ . Je tedy

$$\Phi = \frac{(2\pi mW)^{3N/2} V^N}{(3N/2)!}. \quad (1)$$

5. Ideální plyn lze pokládat za soustavu volných hmotných bodů pohybujících se v objemu  $V$ . Určete fázový objem plynu.

Řešení. Jedná se o vhodnou úpravu vzorce (1) předešlého příkladu pro  $N \gg 1$ . Přibližný vzorec pro  $f!$  při  $f \gg 1$  lze odvodit takto

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln f \cong \int_1^f \ln x \, dx = \ln(f/e)^f.$$

Je tedy  $f! \cong (f/e)^f$ , což dá

$$\Phi(W, V) = \left( \frac{4\pi emW}{3N} \right)^{3N/2} V^N.$$

Velmi silná závislost fázového objemu na energii vede k tomu, že prakticky celý fázový objem je tvořen úzkou energetickou vrstvou  $\Delta W$ . Nejlépe je to vidět, vypočteme-li rozdíl fázových objemů

$$\Delta\Phi = \Phi(W, V) - \Phi(W - \Delta W, V) = \Phi(W, V) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\Delta W}{W} \right)^{3N/2} \right].$$

Zavedeme střední energii jedné částice  $\varepsilon \equiv W/N$ ; při  $N \gg 1$  lze položit

$$\left( 1 - \frac{\Delta W}{N\varepsilon} \right)^{3N/2} \cong \exp \left( -3 \frac{\Delta W}{2\varepsilon} \right),$$

takže je

$$\Delta\Phi \cong \Phi \cdot \left[ 1 - \exp \left( -\frac{3}{2} \frac{\Delta W}{\varepsilon} \right) \right].$$

Odtud je vidět, že už při tloušťce  $\Delta W$  energetické vrstvy  $\Delta W \cong \varepsilon$  je  $\Delta\Phi$  srovnatelné s celým fázovým objemem  $\Phi$ .

6. Vyšetřete pohyb hmotného bodu po nakloněné rovině v homogenním tíhovém poli pomocí Lagrangeových rovnic prvního druhu. Nakloněná rovina je v klidu.

Řešení. Pohyb bodu je vázán na rovinu, jejíž rovnici vezmeme ve tvaru

$$f(x, y, z) = y - kx - q = 0, \quad (1)$$

kde  $k = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha$  je úhel sklonu nakloněné roviny. V pohybové rovnici 5(6.5) položíme  $F_x = 0$ ,  $F_y = -mg$ ,  $F_z = 0$  a pro  $f(x, y, z)$  uijeme (1). Dostaneme tak

$$-m\ddot{x} = \lambda \operatorname{tg} \alpha, \quad m\ddot{y} = -mg + \lambda.$$

Při počátečních podmínkách  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = q$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$  mají tyto rovnice řešení

$$-x = \frac{\lambda t^2}{2m} \operatorname{tg} \alpha, \quad y = q + \frac{1}{2m} (\lambda - mg)t^2. \quad (2)$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnice (1) nakloněné roviny dostaneme pro  $\lambda$  podmínku  $\lambda - mg + \lambda \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$ , tj.  $\lambda = mg \cos^2 \alpha$ . Řešení (2) pak zní

$$-x = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad y = q - \frac{1}{2} gt^2 \sin^2 \alpha.$$

Délka proběhnuté dráhy

$$s = [x^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha.$$

# Ráz těles

### 6.1 Klasifikace srážek

V běžném životě je pojem srážky (kolize) spojen s přímým kontaktem zúčastněných těles. Částice (tělesa) se však ovlivňují prostřednictvím vzájemného působení, aniž by při tom došlo k jejich přímému dotyku.

*Ve fyzice nazýváme srážkou částic výsledek procesu vzájemného působení zúčastněných částic.*

Při experimentálním i teoretickém studiu srážek obvykle postupujeme následujícím způsobem. Zjistíme, popř. zadáme počáteční stav zúčastněných částic, tj. stav částic při jejich nekonečných vzájemných vzdálenostech, kdy je interakce částic nulová. Takto zvolený počáteční stav tedy odpovídá *volným částicím*. Z hlediska časového vývoje tomu obvykle připisujeme čas  $t = -\infty$ . V teorii srážek se počáteční stav obvykle označuje jako *vstupní kanál*.

Částice při svém pohybu vstoupí do oblasti silového působení, dojde k procesu srážky. Při daném počátečním stavu může být výsledek srážky (koncový stav odpovídající času  $t = +\infty$ ) různý. Tyto různé možnosti nazýváme *výstupními kanály* nebo *kanály reakce*. Srážky částic klasifikujeme podle výstupního kanálu.

Vysvětlíme si to na příkladě srážky dvou atomů. Dva atomy se mohou při srážce pouze vychýlit ze svých trajektorií, aniž by při tom došlo k jakýmkoliv jiným změnám ve stavu obou atomů anebo vzniku nových částic. Takové srážky, při nichž nedochází ani ke změně vnitřního stavu původních částic, ani ke vzniku anebo zániku částic, jsou tzv. *pružné (elastické) srážky* neboli *pružný (elastický) rozptyl*. Při srážce atomů může (za vhodných okolností) dojít také ke změně jejich vnitřního stavu (změně elektronové konfigurace, excitaci). Takové procesy, při nichž nevznikají nové částice, avšak mění se vnitřní stav zúčastněných částic, označujeme jako *nepružný* neboli *neelastický rozptyl*. V makroskopické fyzice je příkladem nepružného rozptylu nepružná deformace těles při jejich vzájemné srážce. Nepružný i pružný rozptyl odpovídají tzv. *infinitnímu pohybu*: částice se mohou vyskytovat po celou dobu v libovolně velkých vzájemných vzdálenostech. Výsledkem interakce obou atomů může být

např. vznik dvouatomové molekuly. Mechanickou analogií je slinutí (spojení) dvou těles při jejich srážce.

Procesy spojené se vznikem nebo zánikem částic, popř. se změnou počtu částic nazýváme *reakce*. Připomeneme několik známých procesů tohoto druhu. Při srážce elektronu s pozitronem dojde k jejich zániku a ke vzniku fotonů. Srážka neutronu s jádrem uranu vyvolá tzv. štěpnou reakci, při níž se jádro uranu rozdělí na několik lehčích fragmentů. Mechanickou analogií reakce je rozbití kolidujících těles na řadu úlomků. Při srážkách částic vysokých energií se část energie těchto částic zužitkuje na produkci nových částic. O těchto otázkách pojednáme v kapitole věnované relativistické mechanice. Zvláštním typem reakcí jsou *samovolné* neboli *spontánní rozpady*, kdy daná částice se samovolně, tj. bez jakéhokoliv vnějšího zásahu rozpadne na jiné částice, popř. emituje částice. Mechanickým příkladem může být exploze časovaného granátu, který se tím rozdělí na řadu úlomků. Termínem rozpad však nesmíme rozumět pouze mechanické rozdělení na části, z nichž je původní systém složen. Různé typy rozpadu atomových jader a tzv. elementárních částic ukazují, že při těchto procesech se jedná o vzájemnou přeměnu zúčastněných částic.

Nepružný rozptyl a reakce mohou obvykle probíhat pouze tehdy, když energie kolidujících částic překročí jistou mez zvanou *práh reakce*. Vysvětlíme si to opět na srážce dvou atomů. Čtenář ví, že energetické hladiny atomů jsou diskrétní, že např. první excitovaná hladina leží o jistou konečnou hodnotu  $\delta$  nad základním stavem. Dokud energie kolidujících atomů nedosáhne alespoň této hodnoty  $\delta$ , nemůže dojít k excitaci atomů, a tedy ani k nepružnému rozptylu. Naproti tomu přeměna páru elektron + pozitron na fotony může nastat při libovolné energii elektronu a pozitronu, a je tedy příkladem bezprahové reakce. Různá omezení na prahovou energii pro produkci nových částic přináší Einsteinův vztah mezi hmotností a energií, jak o tom pojednáme v kapitole 12 o relativistické mechanice.

Průběh a výsledek srážky závisí na interakci zúčastněných částic. V oblasti mikrosvěta je nutno respektovat kvantové vlastnosti částic. Řadu obecných výsledků lze však získat pouze na základě *zákonů zachování*, jež nakládají jisté *omezení na možné typy a průběh procesů*.

Proilustrujeme to na případě samovolného rozpadu klidové částice. Počáteční energie klidové částice je rovna její vnitřní energii, kterou označíme  $\varepsilon$ . Vzniklé částice s hmotnostmi  $m_1$ ,  $m_2$  mají vnitřní energie  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  a kinetické energie  $p_1^2/(2m_1)$ ,  $p_2^2/(2m_2)$ . Ze zákona zachování energie pak plyne

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{p_1^2}{2m_1} + \varepsilon_2 + \frac{p_2^2}{2m_2}. \quad 6(1.1)$$

Poněvadž částice byla před rozpadem v klidu (měla nulovou hybnost), ze zákona zachování hybnosti plyne, že i celková hybnost produktů rozpadu je

nulová  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ . Při rozpadu se obě částice rozletí se stejně velkými, avšak opačnými hybnostmi, tj.  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ . Je tedy  $p_1^2 = p_2^2 \equiv p^2$ , což po dosazení do 6(1.1) dá

$$p^2 = 2m\Delta, \quad 6(1.2)$$

kde  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  je redukovaná hmotnost soustavy,

$$\Delta = \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad 6(1.3)$$

je *energetická diference* vnitřních stavů. Poněvadž hybnost je reálnou veličinou, podmínkou samovolného rozpadu je  $\Delta \geq 0$ . Rovnicí 6(1.2) je určena hybnost a rychlosti  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1/m_1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_2/m_2$  produktů rozpadu. Zákon zachování momentu hybnosti  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = 0$  dá po dosazení  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$  podmínku  $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = 0$ . Odtud plyne triviální výsledek, že vektor vzájemné polohy  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  je rovnoběžný s vektorem hybnosti vzniklých částic.

Poznámka. V mechanice uvažujeme zpravidla pouze „mechanické“ zákony zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti. Ve skutečnosti jsou i další omezení. Ze zákona zachování elektrického náboje plyne, že celkový elektrický náboj koncových částic musí být roven celkovému elektrickému náboji počátečních částic. V oblasti mikrosvěta nutno respektovat zachování baryonového čísla, tj. rozdílu počtu baryonů a antibaryonů. (Připomeňme si, že termínem baryony označujeme nukleony a částice s větší hmotností.) V dalších úvahách budeme předpokládat, že při studovaných procesech jsou plněny všechny zákony zachování.

Zákony zachování představují jistá omezení neboli výběrová pravidla pro možné typy rozpadů nebo reakcí. Zákony zachování energie, hybnosti, momentu hybnosti a elektrického náboje by např. dovolovaly samovolný rozpad protonu na pozitron a neutrální mezon  $\pi_0$  (s hmotností kolem 260 hmotností elektronu,  $m_\pi \cong 260m_e$ ), a přesto takový proces nenastává, poněvadž by byl při něm narušen zákon zachování baryonového čísla.

## 6.2 Soustava laboratorní a soustava hmotného středu

Při experimentálním studiu srážek se zpravidla setkáváme s případem, že jedna z částic – tzv. terčík – je před srážkou vůči pozorovateli (laboratoři) v klidu a druhá částice nalétává na tuto částici. Takové referenční soustavě říkáme laboratorní, zkráceně L–soustava. Veličiny (hybnost, energie, úhel rozptylu) v této soustavě budeme označovat indexem L. Teoretické studium srážek se obvykle s výhodou provádí v souřadnicové soustavě, v níž je v klidu hmotný střed kolidujících částic. Tuto souřadnicovou soustavu nazveme soustavou

hmotného středu, zkráceně C-soustavou (z anglického centre of mass system). Veličiny v této soustavě budeme označovat indexem C. Přejdeme k odvození vztahů mezi veličinami v obou soustavách. Zde budeme všude předpokládat, že rychlosti všech zúčastněných částic jsou velmi malé ve srovnání s rychlostí světla, takže lze užít nerelativistickou Newtonovu mechaniku. Zobecnění na relativistickou oblast rychlostí provedeme v kapitole 12.

Částice budeme označovat indexy 1 a 2. Rychlost  $\mathbf{V}$  hmotného středu vůči dané (laboratorní) referenční soustavě je určena známým vztahem

$$(m_1 + m_2) \mathbf{V} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 .$$

V laboratorní soustavě je před srážkou  $\mathbf{v}_2 = 0$ , a tudíž

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}_{1L}}{m_1 + m_2} . \quad 6(2.1)$$

Rychlost  $\mathbf{v}_C$  částice v C-soustavě je

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_L - \mathbf{V} , \quad 6(2.2)$$

odkud plyne pro hybnosti částic v C-soustavě před srážkou

$$\mathbf{p}_{1C} = m_1 \mathbf{v}_{1C} = m_1 (\mathbf{v}_{1L} - \mathbf{V}), \quad \mathbf{p}_{2C} = m_2 \mathbf{v}_{2C} = m_2 (\mathbf{v}_{2L} - \mathbf{V}),$$

tj.

$$\mathbf{p}_{1C} = \mathbf{p}_{1L} - m_1 \mathbf{V} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_{1L} , \quad 6(2.3)$$

$$\mathbf{p}_{2C} = \mathbf{p}_{2L} - m_2 \mathbf{V} = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{p}_{1L} . \quad 6(2.4)$$

V C-soustavě je celková hybnost kolidujících částic rovna nule

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} = 0 , \quad \mathbf{p}_{2C} = - \mathbf{p}_{1C} . \quad 6(2.5)$$

Zatímco v L-soustavě jedna (terčíková) částice je v klidu, v C-soustavě se obě částice pohybují proti sobě *se stejně velikými, ale opačnými hybnostmi*.

Zákon zachování hybnosti vede ke vztahům

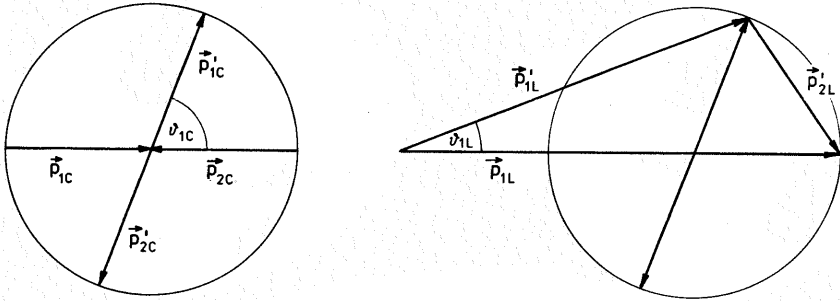
$$\mathbf{p}_{1L} + \mathbf{p}_{2L} = \mathbf{p}'_{1L} + \mathbf{p}'_{2L}, \quad \mathbf{p}'_{1L} + \mathbf{p}'_{2L} = (m_1 + m_2) \mathbf{V} , \quad 6(2.6)$$

kde čárkou nad symbolem označujeme příslušnou veličinu *po srážce*. V C-soustavě je zákon zachování hybnosti vyjádřen vztahy

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} = 0 = \mathbf{p}'_{1C} + \mathbf{p}'_{2C} = 0 , \quad \mathbf{p}'_{2C} = - \mathbf{p}'_{1C} . \quad 6(2.7)$$



Odtud je vidět jednu z výhod C-soustavy. Částice v C-soustavě se i po srážce pohybují stejně velikými, ale opačnými hybnostmi. (Hybnosti po srážce jsou však vůči původním hybnostem před srážkou obecně *pootočený*.)



Obr. 6.1 Pružný rozptyl v C a L soustavě

Označíme-li  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2$  vnitřní energie částic před srážkou a po srážce, pak zákon zachování energie vede k podmínce

$$\varepsilon_1 + \frac{p_{1C}^2}{2m_1} + \varepsilon_2 + \frac{p_{2C}^2}{2m_2} = \varepsilon'_1 + \frac{p_{1C}'^2}{2m_1} + \varepsilon'_2 + \frac{p_{2C}'^2}{2m_2}. \quad (6.2.8)$$

jež s ohledem na 6(2.5) a 6(2.7) poskytne vztah mezi hybností (první) částice v C-soustavě před srážkou a po srážce

$$p_{1C}'^2 = p_{1C}^2 - 2m\Delta. \quad (6.2.9)$$

Zde  $m$  je redukovaná hmotnost soustavy kolidujících částic a

$$\Delta \equiv \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (6.2.10)$$

je změna vnitřní energie částic při rozptylu. Podmínkou možnosti nepružného rozptylu je  $p_{1C}^2 - 2m\Delta \geq 0$ , resp.

$$p_{1L}^2 \geq \frac{2m_1(m_1 + m_2)\Delta}{m_2}. \quad (6.2.11)$$

V posledním vztahu jsme vyjádřili  $p_{1C}$  pomocí 6(2.3). Je-li  $\Delta > 0$ , pak 6(2.11) určuje prahovou (kinetickou) energii pro vznik nepružného rozptylu.

V dalším se budeme zabývat pružným rozptylem, kdy  $\Delta = 0$ . V takovém případě z 6(2.9) a 6(2.7) plyne

$$p_{2C}'^2 = p_{1C}'^2 = p_{1C}^2 = p_{2C}^2. \quad (6.2.12)$$

Při pružném, rozptylu se v C-soustavě absolutní hodnota hybnosti nemění, hybnost rozptýlené částice mění pouze svůj směr. Hybnost  $\mathbf{p}'_{1C}$  rozptýlené částice leží tedy na povrchu koule o poloměru  $p_{1C}$ . V řezu je situace znázorněna na obr. 6.1., na němž je pro srovnání uvedena také situace v L-soustavě. Symboly  $\vartheta_{1L}$ ,  $\vartheta_{1C}$  označují rozptylové úhly první částice v obou soustavách.

Najdeme nyní vztahy mezi veličinami v obou soustavách. Při pružném rozptylu je

$$W_L = \frac{p_{1L}^2}{2m_1}, \quad W_C = \frac{p_{1C}^2}{2m_1} + \frac{p_{2C}^2}{2m_2} = \frac{p_{1C}^2}{2m}. \quad (6.2.13)$$

Po dosazení za  $\mathbf{p}_{1C}$  z 6(2.3) dostaneme vztah mezi energiemi v obou soustavách

$$W_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W_L. \quad (6.2.14)$$

Rozdíl energie  $W_L - W_C = m_1 W_L / (m_1 + m_2)$  připadá na pohyb hmotného středu.

Vztahy mezi  $\mathbf{p}_{1L}$ ,  $\mathbf{p}'_{1L}$ ,  $\mathbf{p}'_{2L}$  a vztahy mezi rozptylovými úhly najdeme takto: Jelikož rychlost hmotného středu je konstantní, hybnosti částic po rozptylu budou

$$\mathbf{p}'_{1C} = \mathbf{p}'_{1L} - m_1 \mathbf{V}, \quad \mathbf{p}'_{2C} = \mathbf{p}'_{2L} - m_2 \mathbf{V}. \quad (6.2.15)$$

Ze 6(2.3) a 6(2.15) plyne pro změnu hybnosti nalétávající částice

$$\mathbf{p}_{1C} - \mathbf{p}'_{1C} = \mathbf{p}_{1L} - \mathbf{p}'_{1L}. \quad (6.2.16)$$

Povýšíme na druhou a uvážíme, že  $p'_{1C} = p_{1C}$ . Máme tak

$$2p_{1C}^2 (1 - \cos \vartheta_{1C}) = p_{1L}^2 + p_{1L}'^2 - 2p_{1L}p_{1L}' \cos \vartheta_{1L}.$$

Po dosazení za  $p_{1C}$  ze 6(2.3) dostaneme

$$\frac{2m_2^2 p_{1L}^2 (1 - \cos \vartheta_{1C})}{(m_1 + m_2)^2} = p_{1L}^2 + p_{1L}'^2 - 2p_{1L}p_{1L}' \cos \vartheta_{1L}. \quad (6.2.17)$$

Ze zákona zachování energie

$$\frac{p_{1L}^2}{2m_1} = \frac{p_{1L}'^2}{2m_1} + \frac{p_{2L}'^2}{2m_2} \quad (6.2.18)$$

po dosazení  $\mathbf{p}'_{2L} = \mathbf{p}_{1L} - \mathbf{p}'_{1L}$  a jednoduché úpravě dostaneme

$$p_{1L}^2 + p_{1L}'^2 - 2p_{1L}p_{1L}' \cos \vartheta_{1L} = \frac{m_2}{m_1} (p_{1L}^2 - p_{1L}'^2). \quad (6.2.19)$$

Srovnání této rovnice s 6(2.17) poskytne hledaný vztah

$$p'_{1L} = \frac{p_{1L}}{m_1 + m_2} (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \vartheta_{1C})^{1/2}. \quad 6(2.20)$$

Toto vyjádření  $p'_{1L}$  dosadíme do 6(2.19), čímž získáme vztah mezi rozptylovými úhly v obou soustavách

$$\cos \vartheta_{1L} = \frac{m_1 + m_2 \cos \vartheta_{1C}}{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \vartheta_{1C})^{1/2}}. \quad 6(2.21)$$

Pomocí vztahu  $\operatorname{tg} \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^{1/2} / \cos \alpha$  dostaneme

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1L} = \frac{m_2 \sin \vartheta_{1C}}{m_1 + m_2 \cos \vartheta_{1C}}. \quad 6(2.22)$$

Spojením 6(2.18) s 6(2.20) dostaneme pro hybnost  $p'_{2L}$  vyjádření

$$p'_{2L} = \frac{2m_2 p_{1L}}{m_1 + m_2} \sin \frac{\vartheta_{1C}}{2}. \quad 6(2.23)$$

Úhel rozptylu druhé částice najdeme obdobně. V C-soustavě je

$$\vartheta_{1C} + \vartheta_{2C} = \pi. \quad 6(2.24)$$

Z 6(2.3) a 6(2.15) plyne  $\mathbf{p}_{1C} - \mathbf{p}'_{2C} = \mathbf{p}_{1L} - \mathbf{p}'_{2L}$ , popř.  $\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}'_{1C} = \mathbf{p}_{1L} + \mathbf{p}'_{1L}$ . Povýšením na druhou plyne

$$\frac{2m_2^2 p_{1L}^2 (1 - \cos \vartheta_{1C})}{(m_1 + m_2)^2} = p_{1L}^2 + p'_{2L}{}^2 - 2p_{1L} p'_{2L} \cos \vartheta_{2L},$$

kde  $\vartheta_{2L}$  je úhel mezi  $\mathbf{p}'_{2L}$  a  $\mathbf{p}_{1L}$ , tj. úhel rozptylu (odrazu) druhé částice, jež byla na počátku v klidu. V 6(2.18) dosadíme  $\mathbf{p}'_{1L} = \mathbf{p}_{1L} - \mathbf{p}'_{2L}$ , čímž dostaneme

$$p_{1L}^2 + p'_{2L}{}^2 - 2p_{1L} p'_{2L} \cos \vartheta_{2L} = p_{1L}^2 - \frac{m_1}{m_2} p'_{2L}{}^2,$$

odkud plyne hledaný vztah

$$p'_{2L} = \frac{2m_2 p_{1L}}{m_1 + m_2} \cos \vartheta_{2L}. \quad 6(2.25)$$

Srovnání s 6(2.23) poskytne vztah

$$\vartheta_{2L} = \frac{1}{2} (\pi - \vartheta_{1C}), \quad 6(2.26)$$

který lze získat i jednoduchou geometrickou úvahou z obr. 6.1. Z posledního vztahu plyne

$$\operatorname{tg} \vartheta_{2L} = \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{2} \vartheta_{1C} \right). \quad 6(2.27)$$

Pomocí známého vzorce  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)/(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$  po jednoduchých trigonometrických úpravách dostaneme pro úhel rozletu  $\vartheta \equiv \vartheta_{1L} + \vartheta_{2L}$  obou částic

$$\operatorname{tg}(\vartheta_{1L} + \vartheta_{2L}) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{2} \vartheta_{1C} \right). \quad 6(2.28)$$

Podle toho, zdali je  $\operatorname{tg} \vartheta > 0$  nebo  $\operatorname{tg} \vartheta < 0$ , je úhel rozletu  $\vartheta < \pi/2$  nebo  $\vartheta > \pi/2$ . Z 6(2.28) pak plyne, že

$$\begin{aligned} \vartheta_{1L} + \vartheta_{2L} < \pi/2 & \quad \text{při} \quad m_1 > m_2, \\ \vartheta_{1L} + \vartheta_{2L} > \pi/2 & \quad \text{při} \quad m_1 < m_2, \\ \vartheta_{1L} + \vartheta_{2L} = \pi/2 & \quad \text{při} \quad m_1 = m_2. \end{aligned} \quad 6(2.29)$$

Poslední vztah okamžitě plyne také ze zákona zachování energie 6(2.18), jenž při  $m_2 = m_1$  dá  $p_{1L}^2 = p'_{1L}{}^2 + p'_{2L}{}^2$ , což je Pythagorova věta pro příslušný pravouhlý trojúhelník.

Pro účely reference uvedeme tři speciální případy vztahu mezi rozptylovými úhly, jež okamžitě plynou z 6(2.22), a to

$$\begin{aligned} \vartheta_{1L} &\cong \vartheta_{1C} & \text{při} & \quad m_1 \ll m_2, \\ \vartheta_{1L} &= \frac{1}{2} \vartheta_{1C} & \text{při} & \quad m_1 = m_2, \\ \vartheta_{1L} &\cong 0 & \text{při} & \quad m_1 \gg m_2. \end{aligned} \quad 6(2.30)$$

### 6.3 Rozptyl na centrálním poli

K určení výsledku srážky dvou částic (např. rozptylového úhlu  $\vartheta$ ) je nutno znát interakční zákon těchto částic a řešení odpovídajících pohybových rovnic.

Nechť interakce obou částic závisí pouze na jejich vzájemné vzdálenosti  $r \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ , takže potenciální energie  $W_p$  odpovídá centrálnímu poli

$$W_p \equiv W_p(r). \quad 6(3.1)$$

V C-soustavě je  $p_{1C} = p_{2C} \equiv p$ , takže celková energie

$$W = \frac{p_{1C}^2}{2m_1} + \frac{p_{2C}^2}{2m_2} + W_p(r)$$

bude

$$W = \frac{p^2}{2m} + W_p(r), \quad 6(3.2)$$

kde  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  je redukovaná hmotnost soustavy. Vzájemný pohyb dvou částic lze tedy nahradit pohybem jedné částice (s redukovanou hmotností  $m$ ) v daném potenciálovém poli  $W(r)$ . Index C označující soustavu hmotného středu budeme pro stručnost *vynechávat*, poněvadž jinou soustavu zde užívat nebudeme.

Ze čtvrté kapitoly víme, že v centrálním poli je trajektorie rovinnou křivkou. Zavedeme-li v rovině dráhy polární souřadnice  $r, \varphi$ , pak energii  $W$  lze vyjádřit rovnicí

$$W = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + W_p(r). \quad 6(3.3)$$

Celková energie  $W$  je podél trajektorie konstantní. Zákon zachování plošné rychlosti souvisí se zákonem zachování momentu hybnosti známým vztahem

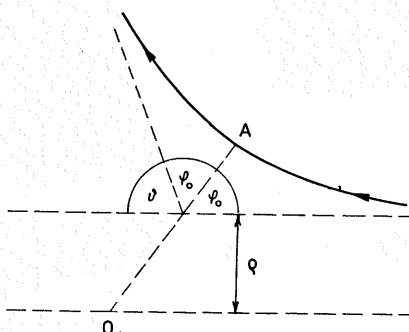
$$b = mr^2 \dot{\varphi} \equiv mr^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad 6(3.4)$$

Po vyloučení  $d\varphi/dt$  dostaneme pro energii vyjádření

$$W = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{b^2}{m^2 r^2} \right] + W_p(r),$$

odkud plyne

$$dt = \frac{dr}{[2m^{-1}(W - W_p) - b^2 m^{-2} r^{-2}]^{1/2}}.$$



Obr. 6.2 Rozptyl na centrálním poli

Z 6(3.4) vyjádříme  $dt = mr^2 b^{-1} d\varphi$ , což po dosazení do předchozí rovnice dá

$$d\varphi = \frac{br^{-2} dr}{[2m(W - W_p) - b^2 r^{-2}]^{1/2}}. \quad 6(3.5)$$

V centrálním poli je trajektorie částice symetrická vzhledem k úsečce vedené z centra k nejbližšímu bodu na trajektorii. Na obr. 6.2 tomu odpovídá úsečka  $OA$ . Obě asymptoty trajektorie protínají tuto úsečku pod stejným úhlem, jenž je na obr. 6.2 označen  $\varphi_0$ . Označíme-li  $r_0$  kořen rovnice

$$2m [W - W_p(r)] - b^2 r^{-2} = 0,$$

pak integrací rovnice 6(3.5) získáme pro úhel  $\varphi_0$  vyjádření

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{br^{-2} dr}{[2m(W - W_p) - b^2 r^{-2}]^{1/2}}. \quad 6(3.6)$$

Zde pro jednoduchost předpokládáme, že  $r_0$  je jediným kořenem uvedené rovnice, což skutečně nastává pro některé důležité potenciály. V případě většího počtu kořenů  $r_0$  je nutno některé další úvahy přiměřeně modifikovat, což s ohledem na učiněný předpoklad dělat nebudeme.

Z obr. 6.2 je vidět, že rozptylový úhel  $\vartheta \equiv \vartheta_{1C}$  souvisí s úhlem  $\varphi_0$  vztahem  $\varphi_0 + \varphi_0 + \vartheta = \pi$ , tj.

$$\vartheta = |\pi - 2\varphi_0|. \quad 6(3.7)$$

Absolutní hodnotu  $|\pi - 2\varphi_0|$  píšeme proto, že úhel rozptylu bereme vždy nezáporný. Upozorňujeme též na souvislost 6(3.7) s 6(2.26).

Rozptyl je *infinitní* pohyb: částice se k sobě přiblíží z nekonečna, jsou vychýleny a opět se vzdálí do nekonečna. Označme  $\mathbf{v}_0$  (relativní) rychlost částic v nekonečnu. Energii  $W$  lze (s ohledem na zákon zachování) zapsat jako  $mv_0^2/2$ . Dále zavedeme *srážkový parametr*  $q$  jako vzdálenost, na níž by částice proletěla od silového centra (tj. druhé částice) v tom případě, kdyby nebylo silového působení. Je to tedy délka kolmice vedené ze silového centra  $O$  na směr  $\mathbf{v}_0$  (viz obr. 6.2). Moment hybnosti  $b$  je pak  $b = mv_0 q$ . Pro účely referencí uvedeme oba vztahy

$$W = W_0 \equiv \frac{1}{2} mv_0^2, \quad b = b_0 \equiv mv_0 q. \quad 6(3.8)$$

Po dosazení těchto vztahů do 6(3.6) dostaneme

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{qr^{-2} dr}{[1 - q^2 r^{-2} - 2(mv_0^2)^{-1} W_p(r)]^{1/2}}. \quad 6(3.9)$$

Připomeňme si, že  $r_0$  je kořenem rovnice

$$1 - \varrho^2 r^{-2} - 2(mv_0^2)^{-1} W_p(r) = 0. \quad 6(3.10)$$

Rovnice 6(3.9) určuje závislost  $\varphi_0$  na srážkovém parametru  $\varphi_0 \equiv \varphi_0(\varrho)$  a pak ve spojitosti s 6(3.7) závislost rozptylového úhlu na srážkovém parametru  $\vartheta \equiv \vartheta(\varrho)$ , popř. obrácenou závislost  $\varrho \equiv \varrho(\vartheta)$ .

Při experimentálním studiu rozptylu se zpravidla nesleduje individuální rozptyl jedné částice, ale rozptyl *svazku* stejných částic dopadajících na silové centrum (terčík) se stejnou rychlostí  $v_0$ . Proudovou hustotou  $j$  svazku rozumíme počet částic dopadajících za jednotku času (1 s) na jednotkovou plochu (1 m<sup>2</sup>) postavenou kolmo k dopadajícímu svazku. Svazek má jistou konečnou tloušťku (průřez), proto různým částím tohoto svazku přísluší různý srážkový parametr  $\varrho$ , a tudíž i různý rozptylový úhel  $\vartheta$ . Symbolem  $dN$  označíme počet částic rozptýlených za jednotku času (jedním) silovým centrem do úhlu mezi  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$ . Tato veličina je přímo úměrná intenzitě (proudové hustotě) dopadajícího svazku, poněvadž každá částice je rozptylována (vychylována) nezávisle.

Veličinou charakterizující intenzitu rozptylového procesu je podíl

$$d\sigma = \frac{dN}{j} \quad 6(3.11)$$

zvaný *diferenciální účinný průřez*. Termín diferenciální obráží tu skutečnost, že se jedná o *charakteristiku rozptylu* do úhlu  $d\vartheta$ . Název průřez souvisí s tím, že  $dN$  má rozměr s<sup>-1</sup>,  $j$  má rozměr m<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup>, takže podíl  $dN/j$  má rozměr m<sup>2</sup>, tj. plochy. Ze způsobu zavedení  $d\sigma$  je zřejmé, že účinný průřez charakterizuje *interakci částic, nikoli jejich geometrické rozměry*. S ohledem na závažnost a časté použití pojmu účinného průřezu uvedeme ještě jeho slovní formulaci.

Diferenciální účinný průřez  $d\sigma$  pro rozptyl udává počet částic rozptýlených jedním silovým centrem (jednou terčíkovou částicí) za jednotku času do úhlu mezi  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$  při jednotkové proudové hustotě dopadajícího svazku. (Jednotkové proudové hustotě odpovídá dopad jedné částice za 1 s na 1 m<sup>2</sup>.) Celkový počet  $dv$  částic rozptýlených za čas  $\Delta t$  do úhlu  $d\vartheta$  tedy dostaneme tak, že  $d\sigma$  vynásobíme počtem rozptylových center, časovým intervalem  $\Delta t$  a proudovou hustotou  $j$  dopadajícího svazku. Touto „zpětnou rekonstrukcí“ se účinný průřez určuje experimentálně. Pozoruje se počet  $dv$  částic rozptýlených do úhlu  $d\vartheta$  na  $n$  terčíkových částicích za čas  $\Delta t$  při dopadající proudové hustotě  $j$ . Diferenciální účinný průřez  $d\sigma$  dostaneme tak, že  $dv$  vydělíme časem  $\Delta t$ , proudovou hustotou  $j$  a počtem rozptylových center postavených do cesty svazku.

Zde jsme pro konkrétnost ve vyjadřování mluvili o diferenciálním účinném průřezu pro (elastický) rozptyl. Definice diferenciálního účinného průřezu pro jiné typy procesů (nepružný rozptyl, reakce) je obdobná.

Integrací diferenciálního účinného průřezu přes celou oblast rozptylových úhlů  $\vartheta$  dostaneme *celkový* neboli *totální účinný průřez* daného procesu.

Po těchto vsuvkách a vysvětlivkách přejdeme k odvození vztahu mezi diferenciálním účinným průřezem a srážkovým parametrem  $\varrho$ . Rozptylový úhel  $\vartheta$  bývá monotónně klesající funkcí srážkového parametru  $\varrho$ ; v takovém případě je vztah mezi  $\varrho$  a  $\vartheta$  vzájemně jednoznačný. Do úhlů mezi  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$  budou pak rozptýleny pouze ty částice, jež nalétávají se srážkovým parametrem mezi  $\varrho(\vartheta)$  a  $\varrho(\vartheta) + d\varrho(\vartheta)$ . (Připomeňme si, že různým částicím svazku přísluší různé srážkové parametry, a tudíž i různé rozptylové úhly.) Počet těchto rozptýlených částic je roven součinu proudové hustoty  $j$  dopadajících částic a plošky mezikruží s poloměry  $\varrho$  a  $\varrho + d\varrho$ , tj.  $dN = j \cdot 2\pi\varrho d\varrho$ . S ohledem na definici 6(3.11) odtud plyne hledaný vztah pro diferenciální účinný průřez

$$d\sigma = 2\pi\varrho d\varrho. \quad 6(3.12)$$

Závislost diferenciálního účinného průřezu  $d\sigma$  na rozptylovém úhlu  $\vartheta$  najdeme takto: Ze závislosti  $\varrho \equiv \varrho(\vartheta)$  vyjádříme  $d\varrho = (d\varrho/d\vartheta) d\vartheta$ . Derivace  $d\varrho/d\vartheta$  bývá zpravidla zápornou (uvidíme to\* na příkladech), avšak  $d\sigma$  je podle definice veličinou *nezápornou*, proto položíme

$$d\sigma = 2\pi\varrho \left| \frac{d\varrho}{d\vartheta} \right| d\vartheta. \quad 6(3.13)$$

Připomeňme si ještě, že zde  $\vartheta$  značí rozptylový úhel  $\vartheta_{1C}$  v C-soustavě. Přejchod k laboratorní soustavě se provede pomocí vzorců 6(2.21) nebo 6(2.22).

Diferenciální účinný průřez  $d\sigma$  se obvykle vyjadřuje pomocí prostorového úhlu  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  (viz matematický dodatek D.1). Po integraci přes azimutální úhel dostaneme  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ , takže je

$$d\sigma = \frac{\varrho(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{d\varrho}{d\vartheta} \right| d\Omega. \quad 6(3.14)$$

Celkový účinný průřez  $\sigma$  daného procesu dostaneme integrací přes celý prostorový úhel, tj.

$$\sigma = \int_{\Omega} d\sigma. \quad 6(3.15)$$

Tím je úloha nalezení účinného průřezu elastického rozptylu částic *v principu* řešena. Postup je tento. Při zadané interakci  $W_p(r)$  najdeme z 6(3.10) vzdálenost  $r_0$ . Integrací 6(3.9) dostaneme závislost  $\varphi_0(\varrho)$  a z ní pomocí 6(3.7) závislost  $\vartheta \equiv \vartheta(\varrho)$ , resp.  $\varrho \equiv \varrho(\vartheta)$ . Tuto výslednou závislost  $\varrho \equiv \varrho(\vartheta)$  dosadíme do



6(3.13) nebo 6(3.14). S konkrétním výpočtem účinného průřezu elastického rozptylu pro dva důležité případy se seznámíme v následujících člancích.

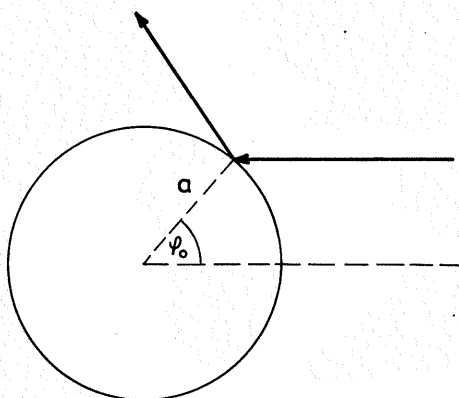
Poznámka. Zde jsme předpokládali známou závislost interakčního zákona  $W_p \equiv W_p(r)$  a pomocí tohoto jsme určili účinný průřez  $d\sigma$ . Je možno řešit také *obrácenou úlohu teorie rozptylu*: určit interakční zákon  $W_p(r)$  na základě (experimentálně) známé závislosti diferenciálního účinného průřezu  $d\sigma$  na rozptylovém úhlu  $\vartheta$ . Řešení této inverzní úlohy (O. B. FIRSOV, 1953) však přesahuje rámec této úvodní učebnice. Pro mimořádnou krásu řešení této inverzní úlohy uvádíme Firsovův postup v řešených úlohách jako *lahůdku pro náročné čtenáře*.

## 6.4 Rozptyl na absolutně tvrdé sféře

Absolutně tvrdou sférou rozumíme nedeformovatelnou kouli (o poloměru  $a$ ). Žádná částice se nemůže přiblížit k této sféře na vzdálenost  $r < a$ . Tomu odpovídá nekonečně vysoká potenciálová odpudivá bariéra

$$\begin{aligned} W_p &= +\infty && \text{při } r < a, \\ W_p &= 0 && \text{při } r > a. \end{aligned} \quad 6(4.1)$$

V takovém potenciálovém poli se částice vně sféry ( $r > a$ ) pohybuje volně. Trajektorie částice kolidující s danou sférou se skládá ze dvou přímek (viz obr. 6.3) rozložených symetricky vzhledem k úsečce (poloměru) vedené ze středu sféry k nejbližšímu bodu na trajektorii. Tento nejbližší bod trajektorie kolidující částice zřejmě leží na povrchu sféry.



Obr. 6.3 Rozptyl na absolutně tvrdé sféře

Srážkový parametr  $\varrho$  souvisí s úhlem  $\varphi_0$  očividným vztahem  $\varrho = a \sin \varphi_0$ . Jelikož  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$ , je podle 6(3.7)  $\vartheta \equiv \vartheta_{1C} = \pi - 2\varphi_0$ , tj.

$$\varrho = a \cos \frac{\vartheta_{1C}}{2}. \quad 6(4.2)$$

Zde  $\vartheta_{1C}$  je úhel rozptylu dopadající částice v C-soustavě.

Diferenciální účinný průřez  $d\sigma$  rozptylu pak vypočteme pomocí 6(3.13), což dá vztah

$$d\sigma = \frac{1}{2}\pi a^2 \sin \vartheta_{1C} d\vartheta_{1C}. \quad 6(4.3)$$

Zavedeme-li element prostorového úhlu v C-soustavě

$$d\Omega_{1C} \equiv 2\pi \sin \vartheta_{1C} d\vartheta_{1C}, \quad 6(4.4)$$

je

$$d\sigma = \frac{1}{4} a^2 d\Omega_{1C}. \quad 6(4.5)$$

Diferenciální účinný průřez nezávisí na energii nalétávajících částic, a  $(d\sigma/d\Omega_{1C}) = a^2/4$  nezávisí na rozptylovém úhlu, rozptyl je tedy *izotropní*. Integrací přes  $\Omega_{1C}$  v intervalu  $0 \leq \Omega_{1C} \leq 4\pi$  získáme celkový účinný průřez rozptylu na absolutně tvrdé sféře

$$\sigma = \pi a^2. \quad 6(4.6)$$

To odpovídá plošce kružnice, do níž se musí nalétávající částice trefit, aby došlo k rozptylu.

Transformaci úhlového rozdělení 6(4.3) z C-soustavy do laboratorní soustavy provedeme takto: V 6(6.21) položíme

$$\mu \equiv \frac{m_1}{m_2} \quad 6(4.7)$$

a vzniklou rovnicí

$$\cos \vartheta_{1L} = \frac{\mu + \cos \vartheta_{1C}}{(1 + \mu^2 + 2\mu \cos \vartheta_{1C})^{1/2}}$$

povýšíme na druhou, čímž dostaneme kvadratickou rovnici pro  $\cos \vartheta_{1C}$

$$\cos^2 \vartheta_{1C} + 2\mu \sin^2 \vartheta_{1L} \cos \vartheta_{1C} - \cos^2 \vartheta_{1L} + \mu^2 \sin^2 \vartheta_{1L} = 0.$$

V řešení

$$\cos \vartheta_{1C} = -\mu \sin^2 \vartheta_{1L} \pm (1 - \mu^2 \sin^2 \vartheta_{1L})^{1/2} \cos \vartheta_{1L} \quad 6(4.8)$$

vybereme znaménko tak, aby bylo  $|\cos \vartheta_{1C}| \leq 1$ , což závisí na hodnotě  $\mu$ . Při  $\mu < 1$ ,  $\vartheta_{1L} = 0$  musí být také  $\vartheta_{1C} = 0$ , což značí, že v 6(4.8) nutno vzít znaménko plus. Diferencováním rovnice

$$\cos \vartheta_{1C} = -\mu \sin^2 \vartheta_{1L} + (1 - \mu^2 \sin^2 \vartheta_{1L})^{1/2} \cos \vartheta_{1L}$$

dostaneme

$$\sin \vartheta_{1C} d\vartheta_{1C} = \left[ 2\mu \cos \vartheta_{1L} + \frac{1 + \mu^2 \cos 2\vartheta_{1L}}{(1 - \mu^2 \sin^2 \vartheta_{1L})^{1/2}} \right] \sin \vartheta_{1L} d\vartheta_{1L}.$$

Označíme-li  $d\Omega_{1L}$  element prostorového úhlu, do něhož je rozptýlena první částice v L-soustavě

$$d\Omega_{1L} \equiv 2\pi \sin \vartheta_{1L} d\vartheta_{1L}, \quad 6(4.9)$$

transformace 6(4.5) do laboratorní soustavy bude

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} \left[ 2\mu \cos \vartheta_{1L} + \frac{1 + \mu^2 \cos 2\vartheta_{1L}}{(1 - \mu^2 \sin^2 \vartheta_{1L})^{1/2}} \right] d\Omega_{1L}. \quad 6(4.10)$$

Obdobně dostaneme při  $\mu > 1$ , kdy je nutno v 6(4.8) vzít součet obou výrazů pro  $d \cos \vartheta_{1C}$ , tj.

$$d\sigma = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \mu^2 \cos 2\vartheta_{1L}}{(1 - \mu^2 \sin^2 \vartheta_{1L})^{1/2}} d\Omega_{1L}. \quad 6(4.11)$$

Při  $m_1 = m_2$  je výpočet prostý. Podle 6(2.30) v tomto případě je  $\vartheta_{1C} = 2\vartheta_{1L}$ , takže  $\sin \vartheta_{1C} = 2 \cos \vartheta_{1L} \sin \vartheta_{1L}$ . V případě  $\mu = 1$  tak máme

$$d\sigma = a^2 |\cos \vartheta_{1L}| d\Omega_{1L}. \quad 6(4.12)$$

Úhlové rozdělení  $d\sigma_2$  odražené neproniknutelné sféry dostaneme tak, že v 6(4.3), popř. 6(4.5) použijeme 6(2.26). Výsledkem elementárních úprav je úhlové rozdělení

$$d\sigma_2 = a^2 |\cos \vartheta_{2L}| d\Omega_{2L}, \quad 6(4.13)$$

kde

$$d\Omega_{2L} \equiv 2\pi \sin \vartheta_{2L} d\vartheta_{2L}. \quad 6(4.14)$$

Zde  $\vartheta_{2L}$  značí rozptylový úhel terčikové částice (neproniknutelné sféry) v laboratorní soustavě.

## 6.5 Rutherfordův vzorec

Interakční energie dvou gravitujících částic s hmotnostmi  $m_1$ ,  $m_2$  je  $W_p = \kappa m_1 m_2 / r$ , kde  $\kappa$  je Newtonova gravitační konstanta. Obdobným výrazem je určena interakční energie dvou nábojů  $Q_1$ ,  $Q_2$ , kdy je  $W_p = Q_1 Q_2 / (4\pi\epsilon_0 r)$ ; symbol  $\epsilon_0$  označuje univerzální konstantu zvanou permitivita vakua. Oba případy shrneme do rovnice

$$W_p(r) = \frac{\alpha}{r}. \quad (6.5.1)$$

Nejdříve najdeme kořen  $r_0$  rovnice 6(3.10). Po dosazení 6(5.1) do 6(3.10) dostaneme kvadratickou rovnici

$$r^2 - \frac{2\alpha r}{mv_0^2} - \varrho^2 = 0,$$

kteřá má řešení

$$r_0 = \frac{\alpha}{mv_0^2} + \left[ \left( \frac{\alpha}{mv_0^2} \right)^2 + \varrho^2 \right]^{1/2}. \quad (6.5.2)$$

Druhé řešení se znaménkem minus nevyhovuje, jelikož by bylo  $r_0 < 0$ . Nyní dosadíme 6(5.1) do 6(3.9), čímž získáme pro úhel  $\varphi_0$  vyjádření

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\varrho r^{-2} dr}{[1 - \varrho^2 r^{-2} - 2\alpha(mv_0^2 r)^{-1}]^{1/2}}.$$

Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že primitivní funkce je

$$\arccos \frac{\varrho r^{-1} + \alpha(mv_0^2 \varrho)^{-1}}{[1 + \alpha^2(mv_0^2 \varrho)^{-2}]^{1/2}}.$$

Po dosazení mezi  $r_0$ ,  $\infty$  dostaneme pro  $\varphi_0$  vyjádření

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\alpha(mv_0^2 \varrho)^{-1}}{[1 + \alpha^2(mv_0^2 \varrho)^{-2}]^{1/2}},$$

resp.

$$\frac{\alpha(mv_0^2 \varrho)^{-1}}{[1 + \alpha^2(mv_0^2 \varrho)^{-2}]^{1/2}} = \cos \varphi_0.$$

Odtud plyne pro  $\varrho$  vyjádření

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_0^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0. \quad (6.5.3)$$

Po zavedení rozptylového úhlu  $\vartheta_{1C}$  vztahem  $\varphi_0 = (\pi - \vartheta_{1C})/2$  dostaneme

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_0^4} \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{1}{2} \vartheta_{1C} \right). \quad 6(5.4)$$

Diferencováním tohoto vztahu dostaneme  $2\varrho d\varrho$ , což ve spojitosti se 6(3.13) dá diferenciální účinný průřez

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{m v_0^2} \right)^2 \frac{\cos \left( \frac{1}{2} \vartheta_{1C} \right)}{\sin^3 \left( \frac{1}{2} \vartheta_{1C} \right)} d\vartheta_{1C}. \quad 6(5.5)$$

Zavedeme-li element prostorového úhlu  $d\Omega_{1C} \equiv 2\pi \sin \vartheta_{1C} d\vartheta_{1C}$ , pak dostaneme slavný *Rutherfordův vzorec* (E. RUTHERFORD, 1911)

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2m v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega_{1C}}{\sin^4 \left( \frac{1}{2} \vartheta_{1C} \right)}, \quad 6(5.6)$$

resp.

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{4W} \right)^2 \frac{d\Omega_{1C}}{\sin^4 \left( \frac{1}{2} \vartheta_{1C} \right)}, \quad 6(5.7)$$

kde  $W = m v_0^2/2$  je energie relativního pohybu obou částic. Transformaci do L-soustavy provedeme pomocí vzorců odvozených v článku 6.4.

Všimněme si některých zvláštností a charakteristických rysů pružného rozptylu v Coulombově poli (Rutherfordova rozptylu). Diferenciální účinný průřez 6(5.7) je nepřímo úměrný druhé mocnině energie částic, takže s rostoucí energií silně klesá. To je způsobeno relativní slabostí Coulombovy interakce: při vysoké energii nalétávající částice představuje Coulombova interakce pouze malou poruchu, která příliš neovlivní pohyb částice. V Coulombově poli převládá rozptyl na malé úhly  $\vartheta_{1C} \rightarrow 0$ , kdy je diferenciální účinný průřez veliký. Tato závislost je charakteristická pro Coulombovo pole a podobně pomaľu se vzdáleností ubývající (tzv. dalekodosařové) potenciály.

Čtenář zajisté ví, že ve slavných Rutherfordových pokusech s rozptylem alfa částic na atomech byly pozorovány také případy rozptylu na velké úhly, z čehož Rutherford usoudil na existenci centrální části atomu, atomového jádra, v němž je soustředěna převážná část hmotnosti atomu. Poněvaď opakování je matkou moudrosti, připomeneme si příslušný sled myšlenek, jež přivedly k tomuto závěru.

Bylo známo, že elektricky neutrální atom obsahuje kladné a záporné elektrické náboje, které se ve svém úhrnu kompenzují. Vznikl tak problém zjistit, jak jsou tyto kladné a záporné náboje v atomu rozloženy. Jednoduchými vnějšími zásahy, např. zahřátím nebo ozářením se podařilo uvolnit z atomu lehké zápor

ně nabité částice – elektrony. Hmotnost elektronu je zhruba  $2 \cdot 10^3$  až  $4 \cdot 10^5$  (v závislosti na druhu atomu) krát menší než hmotnost atomu. Z toho se dá usoudit, že převážná část hmotnosti atomu nese kladný elektrický náboj (popř. je elektricky neutrální). Při rozptylu alfa částice na lehkém elektronu se tato prakticky nevychýlí ze své trajektorie, takže bude převládat rozptyl alfa částic *na velmi malé úhly*. Teprve při srážce s těžkou kladně nabitou částicí dojde ke znatelnějšímu vychýlení alfa částice. V naprosté většině případů docházelo k rozptylu na velmi malé úhly, rozptyl na větší úhly nastává pouze ve velmi vzácných případech (zhruba v poměru  $1:10^5$ ). Z toho plyne, že alfa částice při průchodu atomem převážně „potkávala“ lehké elektrony, takže kladně nabitá část atomu je zkoncentrována do velmi malé centrální části atomu. Tuto kladně nabitou malou centrální část atomu, v níž je soustředěna převážná část hmotnosti atomu, nazval Rutherford atomovým jádrem. Měřením diferenciálního účinného průřezu  $d\sigma$  lze z (5.6) určit  $\alpha$ . Náboj částic obvykle měříme v násobcích elementárního náboje  $1e \cong 1,602 \cdot 10^{-19}$  C. Náboj alfa částice  $Q_1 = 2e$ , náboj jádra  $Q_2$  označíme  $Q_2 = Ze$ , takže je  $\alpha = 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0)$ . Změřením  $\alpha$  se určí  $Z$ . Z experimentů vyplynulo, že  $Z$  je celé číslo a je rovno pořadovému číslu prvku v Mendělejevově tabulce.

Poznámka. K objevení atomového jádra přispěly i některé šťastné *náhodné koincidence*, které se vyjasnily zhruba o 15 let později. Čtenář zajisté ví, že v oblasti mikrosvěta je nutno Newtonovu klasickou mechaniku nahradit tzv. kvantovou mechanikou. Tato kvantová mechanika však nebyla známa v roce 1911, kdy Rutherford prováděl své pokusy. Ta šťastná koincidence je v tom, že kvantová mechanika poskytuje pro účinný průřez elektricky nabitých částic (Rutherfordův rozptyl) *přesně stejný vzorec*, k jakému vede klasická mechanika. Druhou příznivou okolností byla platnost Coulombova zákona. Tento zákon získaný původně měřením na makroskopických vzdálenostech ( $r \gtrsim 10^{-3}$  m) se ukázal být správným i při atomárních vzdálenostech ( $r \cong 10^{-10}$  m, popř. menších), tedy i při extrapolaci do oblastí nejméně o sedm řádů menších. (Dnes je Coulombův zákon prověřen do vzdáleností  $r \cong 10^{-15}$  m.) Bez těchto šťastných koincidencí by se hledání struktury atomového jádra podobalo *luštění neznámého písma v neznámé řeči*.

## 6.6 Rozpad částic

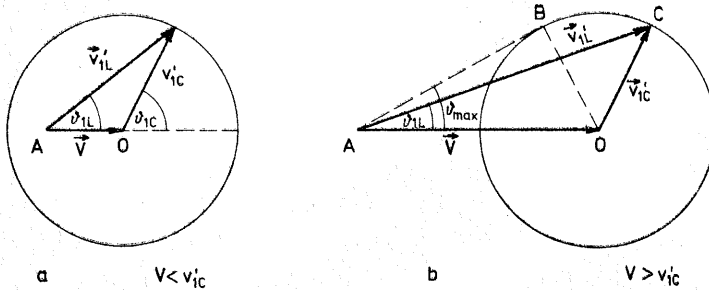
V úvodním článku této kapitoly jsme se zabývali rozpadem klidové částice na dvě částice. (Tomu odpovídá např. alfa rozpad klidového jádra.) Rozdělení produktů rozpadu je vázáno pouze tím, že produkty rozpadu vyletí libovolným směrem se stejně velikými, avšak opačnými hybnostmi.

V praxi se často setkáváme s rozpadem částice, jež se vůči dané (laboratorní) soustavě pohybuje rychlostí  $\mathbf{V}$ . Budeme opět předpokládat rozpad na dvě

částice. Symbolem  $v'_{IL}$  označíme rychlost jedné z částic produktu rozpadu v L-soustavě. Rychlost  $v'_{IC}$  této částice v C-soustavě je určena vztahem  $v'_{IC} = v'_{IL} - \mathbf{V}$ , z něhož povýšením plyne

$$v'_{IC}{}^2 = v'_{IL}{}^2 + V^2 - 2v'_{IL}V \cos \vartheta_{IL}, \quad (6.1)$$

kde  $\vartheta_{IL}$  je úhel mezi  $\mathbf{V}$  a  $\mathbf{v}'_{IL}$ . Rychlost  $\mathbf{v}'_{IL}$  je dána vektorem vedeným z bodu  $A$ , ležícího ve vzdálenosti  $V$  od středu koule  $O$  do libovolného bodu na povrchu



Obr. 6.4

koule o poloměru  $v'_{IC}$ . V řezu je situace znázorněna na obr. 6.4. Při tom je nutno rozlišovat dva případy:  $V < v'_{IC}$  a  $V > v'_{IC}$ . V prvním případě ( $V < v'_{IC}$ ), kdy bod  $A$  leží uvnitř koule, může částice vyletět pod libovolným úhlem  $\vartheta_{IL}$  vůči rychlosti  $\mathbf{V}$ . Druhému případě ( $V > v'_{IC}$ ) odpovídá bod  $A$  ležící vně koule. Z obr. 6.4 b je vidět, že v takovém případě může částice vyletět pouze pod ostrým úhlem (tj. vpřed), přičemž maximální hodnota  $(\vartheta_{IL})_{max} \equiv \vartheta_{max}$  je úhel mezi rychlostí  $\mathbf{V}$  a tečnou vedenou z bodu  $A$  na povrch koule. Z odpovídajícího pravoúhlého trojúhelníku dostaneme pro tento úhel podmínku

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{v'_{IC}}{V}. \quad (6.2)$$

Vztah mezi úhly  $\vartheta_{IL}$  a  $\vartheta_{IC}$  snadno odvodíme z obr. 6.4. Očividně je

$$\operatorname{tg} \vartheta_{IL} = \frac{v'_{IC} \sin \vartheta_{IC}}{V + v'_{IC} \cos \vartheta_{IC}}. \quad (6.3)$$

Obrácený vztah najdeme tak, že v 6(6.3) položíme  $\sin \vartheta_{IC} = (1 - \cos^2 \vartheta_{IC})^{1/2}$ . Řešením vzniklé kvadratické rovnice je

$$\cos \vartheta_{IC} = -\beta \sin^2 \vartheta_{IL} \pm (1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta_{IL}) \cos \vartheta_{IL}, \quad (6.4)$$

kde  $\beta \equiv V/v'_{1C}$ . Při  $V < v'_{1C}$  každému úhlu  $\vartheta_{1L}$  odpovídá právě jeden úhel  $\vartheta_{1C}$ , což je vidět z obr. 6.4 a. Jelikož při  $\vartheta_{1L} = 0$  musí být také  $\vartheta_{1C} = 0$ , nutno v 6(6.4) vzít při  $\beta < 1$  znaménko plus. V případě  $V > v'_{1C}$  leží bod  $A$  vně koule. Vektoru  $v'_{1C}$  odpovídá buď  $OC$  nebo  $OB$ , a tedy i dva úhly reprezentované oběma znaménky v 6(6.4).

## Řešené úlohy

1. Najděte úhlové rozdělení odražených (terčkových) částic při Rutherfordově rozptylu.

Řešení. V 6(5.7) uijeme 6(2.26), což dá

$$d\sigma_2 = \left(\frac{\alpha}{2W}\right)^2 \frac{d\Omega_{2L}}{\cos^3 \vartheta_{2L}}$$

kde  $d\Omega_{2L} \equiv 2\pi \sin \vartheta_{2L} d\vartheta_{2L}$  je element prostorového úhlu, do něhož je odražena (původně klidová) terčiková částice.

2. Vyšetřete Rutherfordův rozptyl dvou identických částic.

Řešení. Podle 6(2.30) případu  $m_1 = m_2$  odpovídá  $\vartheta_{1C} = 2\vartheta_{1L}$ , což po dosazení do 6(5.7) dá

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{2W}\right)^2 \frac{\cos \vartheta_{1L}}{\sin^4 \vartheta_{1L}} d\Omega_{1L}, \quad (1)$$

kde  $d\Omega_{1L} \equiv 2\pi \sin \vartheta_{1L} d\vartheta_{1L}$ . Při identických částicích není třeba rozlišovat mezi nalétávající a terčikovou částicí. Účinný průřez je pak součtem  $d\sigma_2$  z předešlého příkladu a  $d\sigma_1$ . Zaměníme-li  $\vartheta_{1L}$  a  $\vartheta_{2L}$  společným označením  $\vartheta_L$ , bude

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2W}\right)^2 \left[ \frac{1}{\sin^4 \vartheta_L} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta_L} \right] \cos \vartheta_L d\Omega_L. \quad (2)$$

3. Částice letící rychlostí  $V$  se samovolně rozpadá za letu na dvě částice. Najděte vztah mezi úhly rozletu  $\vartheta_{1L}$ ,  $\vartheta_{2L}$  těchto částic v L-soustavě.

Řešení. Rovnici 6(6.3) přepíšeme ve tvaru

$$V + v'_{1C} \cos \vartheta_{1C} = v'_{1C} \sin \vartheta_{1C} \operatorname{ctg} \vartheta_{1L}. \quad (1)$$

Pro druhou částicí je

$$V + v'_{2C} \cos \vartheta_{2C} = v'_{2C} \sin \vartheta_{2C} \operatorname{ctg} \vartheta_{2L}.$$



Po dosazení  $\vartheta_{2C} = \pi - \vartheta_{1C}$  dostaneme

$$V - v'_{2C} \cos \vartheta_{1C} = v'_{2C} \sin \vartheta_{1C} \operatorname{ctg} \vartheta_{2L}. \quad (2)$$

Z rovnice (1) a (2) potřebujeme vyloučit  $\vartheta_{1C}$ . Za tím účelem vynásobíme rovnici (1)  $v'_{2C}$  a rovnici (2) vynásobíme  $v'_{1C}$ ; odečtením vzniklých rovnic dostaneme

$$v'_{1C} v'_{2C} (\operatorname{ctg} \vartheta_{1L} + \operatorname{ctg} \vartheta_{2L}) \sin \vartheta_{1C} = (v'_{1C} + v'_{2C}) V. \quad (3)$$

Dále rovnici (1) vynásobíme  $v'_{2C} \operatorname{ctg} \vartheta_{2L}$ , rovnici (2) vynásobíme  $v'_{1C} \operatorname{ctg} \vartheta_{1L}$ ; po odečtení vzniklých rovnic dostaneme

$$v'_{1C} v'_{2C} (\operatorname{ctg} \vartheta_{1L} + \operatorname{ctg} \vartheta_{2L}) \cos \vartheta_{1C} = (v'_{1C} \operatorname{ctg} \vartheta_{1L} - v'_{2L} \operatorname{ctg} \vartheta_{2L}) V. \quad (4)$$

Rovnice (3) a (4) povýšíme na druhou a sečteme. Následkem trigonometrické identity  $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$  vypadne úhel  $\vartheta_{1C}$ . Při úpravě ještě uijeme  $(v'_{2C}/v'_{1C}) = (m_1/m_2)$ . Výsledkem je hledaná rovnice

$$\begin{aligned} m_1^2 \sin^2 \vartheta_{1L} + m_2^2 \sin^2 \vartheta_{2L} - 2m_1 m_2 \sin \vartheta_{1L} \sin \vartheta_{2L} \cos (\vartheta_{1L} + \vartheta_{2L}) &= \\ &= \frac{2m \Delta}{V^2} \sin^2 (\vartheta_{1L} + \vartheta_{2L}), \end{aligned}$$

kde  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $2m \Delta = p'_{1C}{}^2 = m_1^2 v'_{1C}{}^2$  a  $\Delta$  je stejné jako v rovnici 6(1.3).

4. Částice letící rychlostí  $V$  se samovolně rozpadá za letu na dvě částice. Najděte celkový úhel rozletu  $\vartheta \equiv \vartheta_{1L} + \vartheta_{2L}$ .

Řešení. Podle 6(6.3) je

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1L} = \frac{v'_{1C} \sin \vartheta_{1C}}{V + v'_{1C} \cos \vartheta_{1C}}.$$

Obdobně je  $\operatorname{tg} \vartheta_{2L} = v'_{2C} \sin \vartheta_{2C} / (V + v'_{2C} \cos \vartheta_{2C})$ , odkud po dosazení  $\vartheta_{2C} = \pi - \vartheta_{1C}$  plyne

$$\operatorname{tg} \vartheta_{2L} = \frac{v'_{2C} \sin \vartheta_{1C}}{V - v'_{2C} \cos \vartheta_{1C}}.$$

Pomocí rovnice  $\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) / (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$  dostaneme pro úhel rozletu

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{(v'_{1C} + v'_{2C}) V \sin \vartheta_{1C}}{V^2 - v'_{1C} v'_{2C} + (v'_{1C} - v'_{2C}) V \cos \vartheta_{1C}}.$$

Pro konkrétnost zvolíme  $v'_{1C} < v'_{2C}$ . Jednoduchým rozbořem rovnice (1) najdeme, že

$$\begin{array}{ll} 0 < \vartheta < \pi & \text{při } v'_{1C} < V < v'_{2C}, \\ 0 < \vartheta < \vartheta_0 & \text{při } V > v'_{2C}, \\ \pi - \vartheta_0 < \vartheta < \pi & \text{při } V < v'_{1C}, \end{array}$$

kde  $\vartheta_0$  je řešením rovnice

$$\sin \vartheta_0 = \frac{(v'_{1C} + v'_{2C}) V}{V^2 + v'_{1C} v'_{2C}}.$$

5. Necht'  $\sigma$  je (celkový) účinný průřez absorpce částic při průchodu látkovým prostředím. Najděte souvislost s (makroskopickým) koeficientem zeslabení intenzity procházejícího svazku částic.

Řešení. Necht' se svazek pohybuje v kladném směru osy  $x$ . Vezmeme svazek o průřezu  $q$ . Je-li  $j$  proudová hustota částic svazku (počet částic dopadajících na  $1 \text{ m}^2$  za  $1 \text{ s}$ ), pak intenzita  $I$  svazku (počet částic za  $1 \text{ s}$ ) je  $I(x) = jq(x)$ . Účinný průřez  $\sigma$  určuje počet částic absorbovaných jedním rozptylovým centrem za  $1 \text{ s}$  při jednotkové proudové hustotě dopadajících částic. Označíme-li  $n$  hustotu prostředí (počet atomů v' objemové jednotce), pak na úseku  $\Delta x$  je  $nq \Delta x$  absorpčních center. Počet absorbovaných částic za  $1 \text{ s}$  na tomto úseku (zeslabení intenzity svazku) bude

$$\Delta I = j\sigma nq \Delta x = n\sigma I \Delta x.$$

Zde  $\Delta I = I(x) - I(x + \Delta x) \cong - (dI/dx) \Delta x$ . Srovnáním obou výrazů pro  $\Delta I$  a přechodem k limitě  $\Delta x \rightarrow 0$  dostaneme diferenciální rovnici

$$-\frac{dI}{dx} = \frac{I}{h}, \quad (1)$$

jejíž řešení je

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\frac{x}{h}\right). \quad (2)$$

Zde  $I_0$  je intenzita procházejícího svazku při  $x = 0$  a

$$h = \frac{1}{n\sigma}. \quad (3)$$

Při vzdálenosti  $x = h$  klesne intenzita svazku na  $1/e$  původní hodnoty. Měření závislosti (2) při různých tloušťkách  $x$  se určí  $h$ , a tudíž i  $\sigma$ .

6. Experimentálně byla zjištěna závislost diferenciálního účinného průřezu  $d\sigma$  na rozptylovém úhlu  $\vartheta$  při dané energii  $W$  dopadajících částic. Předpokládejte, že přitažlivá interakční energie  $W_p(r)$  je monotónně klesající funkcí  $r$ , přičemž  $W_p(0) > W$ ,  $W_p(\infty) = 0$ . Najděte rovnici, pomocí níž lze z experimentální závislosti  $d\sigma(\vartheta)$  určit rozptylové pole  $W(r)$ . (Úloha pouze pro náročné – viz poznámku na konci článku 6.3).

Řešení. Úlohu prvně řešil O. B. FIRSOV (1953), jehož elegantního postupu se v dalším přidržíme. Rozptylový úhel  $\vartheta_{1C}$  označíme stručně  $\vartheta$ . Integrací rovnice 6(3.12), popř. 6(3.13) dostaneme

$$\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\alpha} d\alpha = \pi \varrho^2. \quad (1)$$

Touto rovnicí se ze známého vztahu  $d\sigma/d\vartheta$  určí závislost  $\varrho \equiv \varrho(\vartheta)$ , resp.  $\vartheta \equiv \vartheta(\varrho)$ . V rovnici 6(3.10) zavedeme označení

$$s = \frac{1}{r}, \quad x = \frac{1}{\varrho^2}, \quad w = \left(1 - \frac{2W_p}{mv_0^2}\right)^{1/2}, \quad (2)$$

takže je

$$xw^2(s_0) - s_0^2 = 0. \quad (3)$$

Tato rovnice určuje závislost  $s_0 \equiv s_0(x)$ . Místo vzdálenosti  $r_0$  máme určit  $s_0 = 1/r_0$ .

Podobně upravíme rovnici 6(3.9) pro  $\varphi_0$ , v níž zaměníme  $\varphi_0$  rozptylovým úhlem  $\vartheta$  pomocí vztahu 6(3.7). Dostaneme tak

$$\frac{1}{2} [\pi - \vartheta(x)] = \int_0^{s_0} \frac{ds}{(xw^2 - s^2)^{1/2}}. \quad (4)$$

Hledaná funkce  $W_p(r)$  je obsažena ve  $w(s)$ , vyskytující se v integrandu rovnice (4), takže (4) je *integrální rovnicí* pro  $w(s)$ , a tedy i  $W_p(r)$ . Rovnici budeme řešit takto: Po vydělení rovnice (4) výrazem  $(a - x)^{1/2}$  a integrací přes  $x$  v mezích  $0 \leq x \leq a$  dostaneme

$$\int_0^a \frac{[\pi - \vartheta(x)] dx}{2(a - x)^{1/2}} = \int_0^a \int_0^{s_0(x)} \frac{ds dx}{[(xw^2 - s^2)(a - x)]^{1/2}}. \quad (5)$$

Levou stranu prointegrujeme po částech, což dá

$$\int_0^a \frac{[\pi - \vartheta(x)] dx}{2(a - x)^{1/2}} = \pi a^{1/2} - \int_0^a (a - x)^{1/2} \frac{d\vartheta}{dx} dx. \quad (6)$$

Na pravé straně rovnice (5) je oblast integrace  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq s \leq s_0(x)$ . Po záměně pořadí integrace bude  $0 \leq s \leq s_0(a)$ ,  $x_0 \leq x \leq a$ , kde  $x_0 \equiv x(s_0)$ . Je tedy

$$\int_0^a \int_0^{s_0(x)} \frac{ds dx}{[(xw^2 - s^2)(a - x)]^{1/2}} = \int_0^{s_0(a)} \int_{x(s_0)}^a \frac{dx ds}{w[(x - s^2/w^2)(a - x)]^{1/2}}.$$

Vzniklý integrál přes  $x$  je standardního typu

$$\int \frac{dx}{[b^2 - (x + c)^2]^{1/2}} = -\arccos \frac{x + c}{b},$$

kde  $2b = a - s^2/w^2$ ,  $2c = -a - s^2/w^2$ . Po dosazení mezí  $x(s_0)$ ,  $a$  se přesvědčíme, že integrál je roven  $\pi$ , takže po dosazení do (5) a (6) dostaneme

$$\pi a^{1/2} - \int_0^a (a - x)^{1/2} \frac{d\vartheta}{dx} dx = \pi \int_0^{s_0(a)} \frac{ds}{w}. \quad (7)$$

Parametr  $a$  je zatím libovolný, je to pouze horní mez integrace přes  $x$ . Poněvadž podle (3) je  $x = s_0^2/w^2$ , zvolíme  $a = s^2/w^2$ , kde místo  $s_0$  píšeme prostě  $s$ . Rovnice (7) tak nabude tvaru

$$\pi \left( \frac{s}{w} \right) - \int_0^{s^2/w^2} [(s/w)^2 - x]^{1/2} \frac{d\vartheta}{dx} dx = \pi \int_0^s \frac{ds}{w}.$$

Diferencováním vzniklé rovnice obdržíme

$$\pi d \left( \frac{s}{w} \right) - d \left( \frac{s^2}{w^2} \right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{(d\vartheta/dx) dx}{2[(s/w)^2 - x]^{1/2}} = \frac{\pi}{w} ds,$$

popř. po dosazení  $d(s^2/w^2) = 2(s/w) d(s/w)$

$$\pi d \ln w = - d \left( \frac{s}{w} \right) \int_0^{s^2/w^2} \frac{(d\vartheta/dx) dx}{[(s/w)^2 - x]^{1/2}}. \quad (8)$$

Při úpravě jsme užili identity

$$\begin{aligned} d(s/w) - w^{-1} ds &\equiv \\ &\equiv (s/w) [(s/w)^{-1} d(s/w) - s^{-1} ds] \equiv \\ &\equiv (s/w) [d \ln (s/w) - d \ln s] \equiv - (s/w) d \ln w. \end{aligned}$$

Rovnici (8) lze již přímo integrovat. Nejdříve se v (8) vrátíme od  $x$  k původní proměnné  $\varrho$  vztahem (2), tj.  $x = 1/\varrho^2$ . Máme tak  $(d\vartheta/dx) dx = (d\vartheta/d\varrho) d\varrho$ . Integrační meze jsou  $0 \leq x \leq s^2/w^2$ , tj.  $rw \leq \varrho \leq \infty$ . Místo  $s/w$  zavedeme

$y = s/w$ , přičemž meze jsou  $1 \leq y \leq (1/rw)$ . Řešení rovnice (8) je pak dáno dvojným integrálem

$$\pi \ln w = - \int_{rw}^{\infty} \int_1^{1/rw} \frac{d\vartheta}{d\varrho} \frac{\varrho dy d\varrho}{(\varrho^2 y^2 - 1)^{1/2}}.$$

Nejdříve provedeme integraci přes  $y$  pomocí vztahu

$$\int \frac{\varrho dy}{(\varrho^2 y^2 - 1)^{1/2}} = \ln [\varrho y + (\varrho^2 y^2 - 1)^{1/2}],$$

což po dosazení mezi dá

$$\pi \ln w = - \int_{rw}^{\infty} \frac{d\vartheta}{d\varrho} \ln \left[ \frac{\varrho}{rw} + \left( \frac{\varrho^2}{r^2 w^2} - 1 \right)^{1/2} \right] d\varrho. \quad (9)$$

Tuto rovnici lze ještě upravit integrací per partes, přičemž se užije  $\vartheta(\varrho = \infty) = 0$ . Výsledkem jednoduchých úprav je hledaná rovnice

$$\pi \ln w = \int_{rw}^{\infty} \frac{\vartheta(\varrho) d\varrho}{(\varrho^2 - r^2 w^2)^{1/2}}.$$

Při experimentální známé závislosti  $\vartheta(\varrho)$  lze pravou stranu určit integrací, což dá funkci  $f(rw)$ . Řešením rovnice  $\pi \ln w = f(rw)$  se získá  $w(r)$  a pak pomocí definičního vztahu  $w = (1 - W_p/W)$  také hledaná funkce  $W_p(r)$  v oblasti  $r > r_0$ , v níž dochází k rozptylu.

# Mechanika tuhého tělesa

## 7.1 Kinematika tuhého tělesa

Pojem tuhé těleso vznikne abstrakcí reálného tělesa. Při této abstrakci se zachovává tvar a rozložení hmotnosti reálného tělesa, předpokládá se však, podobně jako pro tuhoun soustavu hmotných bodů (viz rov. 5(1.5)), že vzájemné vzdálenosti jednotlivých bodů tělesa zůstávají neproměnné při libovolných silách působících na těleso. Abstraktní pojem tuhé těleso umožní vyšetřit především podstatné otázky spjaté s rotací reálného tělesa a dále dá základní představy při vyšetřování problémů, v kterých nelze zanedbat konečné rozměry reálných těles. Obě tyto otázky nebylo možno vyřešit, bylo-li reálné těleso nahrazeno hmotným bodem. Avšak ani tuhé těleso nedá správný obraz o chování reálného tělesa v případech, kdy podstatnou roli hrají pružné nebo obecně reologické vlastnosti (viz kapitola 8) reálného tělesa.

Tuhé těleso je určeno, udáme-li jeho hustotu  $\varrho$  jako funkci souřadnic  $x_1, x_2, x_3$

$$\varrho(x_1, x_2, x_3) \equiv \varrho(x_i). \quad 7(1.1)$$

Hustotou  $\varrho$  zde rozumíme limitní hodnotu poměru hmotnosti  $m$  obsažené v objemu  $V$  k objemu  $V$ , zmenšujeme-li objem  $V$  obklopující bod, v němž hustotu chceme stanovit;

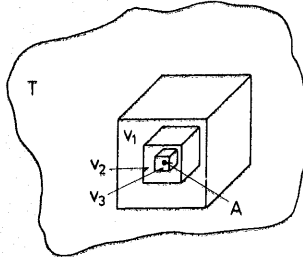
$$\varrho = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{m}{V} \right). \quad 7(1.2)$$

Přitom předpokládáme spojité rozložení hmotnosti, tj. zanedbáváme atomickou strukturu reálného tělesa. Na obr. 7.1 je znázorněno těleso  $T$  a v něm bod  $A$  se zvolenou posloupností obklopujících krychliček o objemu  $V_1, V_2, V_3, \dots$ , které lze použít, zjistíme-li jejich hmotnosti  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , ke stanovení limity 7(1.2), tj. hustoty v bodě  $A$ . Limitu podílu 7(1.2) lze psát jako derivaci  $dm/dV = \varrho$ . Tuto derivaci můžeme přepsat jako vztah mezi diferenciály

$$dm = \varrho dV. \quad 7(1.3)$$

Zadáním výrazu 7(1.1) je současně určena i hranice tuhého tělesa. Těleso se nachází tam, kde  $\rho \neq 0$ . Mimo těleso je  $\rho = 0$ .

Jak bylo ukázáno v čl. 5.1, soustava hmotných bodů je určena udáním hmotností  $m_n$  a polohových vektorů  $\mathbf{r}_n$  jednotlivých hmotných bodů soustavy.



Obr. 7.1 Stanovení hustoty v bodě A

Na základě těchto údajů byl definován hmotný střed soustavy rovnicí 5(1.9)

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{n=1}^N m_n \mathbf{r}_n}{\sum_{n=1}^N m_n}.$$

Pro tuhé těleso definuje polohu  $\mathbf{r}_S$  hmotného středu podíl objemových integrálů

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho \, dV}{\int_V \rho \, dV}, \quad (7(1.4))$$

kde obor integrace zahrnuje celý objem tělesa  $V$ . Podle rovnice 7(1.3) integrál ve jmenovateli zlomku 7(1.4) je zřejmě roven celkové hmotnosti tělesa  $M$ ;  $\int_V \rho \, dV = \int_V dm = M$ .

Porovnáme-li výrazy pro hmotný střed soustavy hmotných bodů (5(1.9)) a tuhé těleso (7(1.4)), vidíme, že součet  $\sum \mathbf{r}_n m_n$ , resp.  $\sum m_n$  nahradíme v tuhém tělese integrálem  $\int \mathbf{r} dm = \int \mathbf{r} \rho \, dV$ , resp.  $\int dm = \int \rho \, dV$ . Tento postup je typický pro přechod mezi vzorci odvozenými pro soustavu hmotných bodů a pro tuhé těleso. Výrazy pro soustavu hmotných bodů získáme ve tvaru

$$\sum_{n=1}^N a_n m_n, \quad (7(1.5))$$

kde  $a_n$  je nějaká veličina vztahující se k  $n$ -tému hmotnému bodu. Analogický výraz pro tuhé těleso má tvar integrálu  $\int a \, dm$  spojité funkce  $a = a(\mathbf{r})$  přes hmotnost tělesa. Jelikož je nevhodné integrovat přes hmotnost tělesa, převede se integrál  $\int a \, dm$  podle vztahu 7(1.3) na integrál

$$\int_V a \rho \, dV \quad 7(1.6)$$

přes objem tělesa  $V$ . Analogie mezi výrazy 7(1.5) a 7(1.6) je velmi často užívána při odvozování závěrů platných pro tuhé těleso. Většinu dalších výpočtů provedeme pro soustavu hmotných bodů a analogii 7(1.5)  $\leftrightarrow$  7(1.6) výsledky převedeme na tuhé těleso. Přitom na tuhé těleso budeme převádět jen takové závěry, které mají smysl pro tuhou soustavu hmotných bodů.

Jak bylo ukázáno v čl. 5.1, chceme-li popsat pohyb volné soustavy hmotných bodů, musíme znát časový průběh všech  $N$  polohových vektorů

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t) \quad 7(1.7)$$

popisujících soustavu.

Volná soustava hmotných bodů má  $3N$  stupňů volnosti.

Tuhá soustava hmotných bodů a tuhé těleso mají pouze 6 stupňů volnosti. Z geometrického názoru je zřejmé, že udáním polohy tří hmotných bodů tuhé soustavy, které všechny neleží v jedné přímce, je jednoznačně určena poloha všech bodů soustavy. Udání polohy tří bodů znamená stanovení hodnot tří polohových vektorů  $\mathbf{r}_n$ . Označíme je  $\mathbf{r}_k$ ,  $\mathbf{r}_l$  a  $\mathbf{r}_m$ , kde  $k$ ,  $l$ ,  $m$  jsou pevně daná, vzájemně různá celá čísla z intervalu  $\langle 1, N \rangle$ . Tři vektory  $\mathbf{r}_k$ ,  $\mathbf{r}_l$  a  $\mathbf{r}_m$  mají devět souřadnic  $x_{ik}$ ,  $x_{il}$ ,  $x_{im}$ . Vzdálenosti

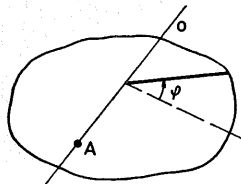
$$d_{kl} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|, \quad d_{km} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m| \quad \text{a} \quad d_{lm} = |\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_m| \quad 7(1.8)$$

hmotných bodů  $m_k$ ,  $m_l$  a  $m_m$  jsou však pevně dány (srovnej 5(1.5)), a proto není všech devět souřadnic  $x_{ik}$ ,  $x_{il}$ ,  $x_{im}$  nezávislých. Tři vztahy 7(1.8) redukuje počet nezávislých souřadnic nutných k stanovení polohy tuhé soustavy hmotných bodů, a tedy i tuhé těleso, z devíti na šest. Takto jsme ukázali, že tuhá soustava hmotných bodů a tuhé těleso vskutku mají 6 stupňů volnosti; jejich pohyb je stanoven, udáme-li časový průběh šesti nezávislých souřadnic. Budeme nyní hledat vhodnou volbu těchto souřadnic. Bylo by možné přímo užít vektorů  $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t)$ ,  $\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_l(t)$  a  $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(t)$ . Počet nezávisle volitelných funkcí by byl redukován z devíti na šest tím, že by musely být dodrženy vztahy 7(1.8), kde vzdálenosti  $d_{kl}$ ,  $d_{km}$  a  $d_{lm}$  jsou s časem konstantní. Takový postup se však pro jeho nepřehlednost zpravidla v kinematice tuhé těleso neuvádá.

Místo stanovení polohy tří pevných bodů v tělese, vázaných relacemi 7(1.8), lze stanovit polohu tělesa v prostoru i jinými šesti údaji. Pro východisko kinematických úvah je nejvhodnější, když stanovíme polohu jednoho bodu, tímto



bodem procházející osy a určíme natočení tělesa. Postup je znázorněn na obr. 7.2, kde bod je označen  $A$ , osa  $o$  a natočení je charakterizováno úhlem  $\varphi$  mezi přímkou pevnou v tělese (značenou plně) a přímkou pevnou v prostoru (značenou čárkovaně). Obě přímky vymežující úhel  $\varphi$  jsou kolmé k ose  $o$ . Poloha



Obr. 7.2 Určení polohy tělesa v prostoru

bodu  $A$  je určena třemi údaji (např. kartézskými souřadnicemi  $x_i$  bodu  $A$ ), směr osy je určen dvěma údaji (např. složkami jednotkového vektoru  $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$  ve směru osy  $o$ ; mezi složkami platí vztah  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ , který redukuje počet nezávislých údajů na dva) a úhel  $\varphi$  reprezentuje jeden údaj. Dohromady máme opět šest údajů odpovídajících šesti stupňům volnosti tělesa.

Přejdeme od stanovení polohy k vyšetření pohybu tělesa. Nejprve vyšetříme speciální případ, kdy bod  $A$  a osa  $o$  procházející bodem  $A$  zachovávají po celou dobu pohybu v tělese i v prostoru stálou polohu. Pak jedinou časově proměnnou veličinou je úhel  $\varphi$  a udáme-li jeho časovou závislost

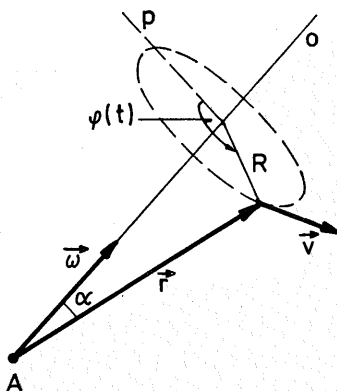
$$\varphi = \varphi(t), \quad 7(1.9)$$

bude pohyb plně kinematicky určen. Popsaný pohyb se nazývá *otáčení (rotace) tuhého tělesa kolem pevné osy*. Otáčení kolem osy lze popsat jedinou parametrickou rovnicí 7(1.9). Je to tedy pohyb s jedním stupněm volnosti. Otáčí-li se tuhé těleso kolem pevné osy, konají všechny jeho body (s výjimkou pevných bodů na ose) v rovině kolmé k ose  $o$  kruhový pohyb se společnou úhlovou rychlostí  $\omega = d\varphi/dt$ . Zavedeme jako v čl. 1.3 vektor úhlové rychlosti  $\omega$  jakožto vektor velikosti  $\omega$ , jehož směr je shodný se směrem osy otáčení. Pak můžeme rychlost  $\mathbf{v}$  libovolného bodu tělesa otáčejícího se kolem osy vyjádřit jako

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}, \quad 7(1.10)$$

kde  $\mathbf{r}$  je vektor vedený z jednoho pevného bodu na ose otáčení (např. z bodu  $A$ ) do místa, v němž se nachází bod, jehož rychlost  $\mathbf{v}$  chceme určit. Aby výraz 7(1.10) byl správný, je nutno ještě předpokládat, že orientace vektoru  $\omega$  na ose  $o$  byla zvolena tak, aby vektory  $\omega$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  v uvedeném pořadí tvořily pravotočivý systém, tj. při pohledu ve směru a smyslu vektoru  $\omega$  probíhá pohyb ve směru hodinových ručiček. Vektory  $\mathbf{r}$ ,  $\omega$ ,  $\mathbf{v}$ , přímka  $p$  pevná v prostoru a proměnný úhel  $\varphi(t)$  jsou znázorněny na obr. 7.3. Pro velikost  $v$  vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  dostává-

me ze 7(1.10)  $v = \omega r \sin \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel mezi vektory  $r$  a  $\omega$ . Výraz  $r \sin \alpha$  je však roven kolmé vzdálenosti bodu od osy otáčení, v němž rychlost  $v$  počítáme. Tato vzdálenost je poloměrem kružnice, po které se zmíněný bod otáčí; na

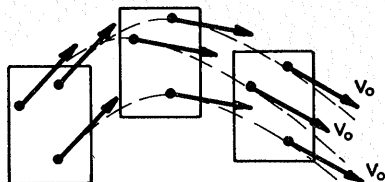


Obr. 7.3 Rychlost  $v$  bodu o polohovém vektoru  $r$ , který se otáčí kolem osy  $o$  úhlovou rychlostí  $\omega$

obr. 7.3 je označena  $R$ . Pro velikost rychlosti kruhového pohybu bodu tak dostáváme ze 7(1.10) známé vyjádření

$$v = R\omega, \quad (7(1.10)')$$

kde  $\omega$  podobně jako v nerovnoměrném kruhovém pohybu je obecnou funkcí času  $\omega = \omega(t)$ .



Obr. 7.4 Posuvný pohyb (translace) tuhého tělesa

Složitější je pohyb tělesa, při kterém jeden jeho bod – můžeme si jej představit jako bod  $A$  z obr. 7.2 – zachovává po celou dobu pohybu v tělese i prostoru stálou polohu. Takový pohyb nazveme *otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu*. Je možno dokázat, že otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu lze v každém okamžiku vyjádřit jako otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy procházející pevným bodem. V průběhu času se mění jak poloha osy otáčení v prostoru a v tělese, tak velikost rychlosti otáčení kolem osy. Rychlost libovol-

ného bodu tělesa otáčejícího se kolem pevného bodu pak lze vyjádřit vzorcem 7(1.10)  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , kde však nyní nejen velikost vektoru  $\boldsymbol{\omega}$ , ale i jeho směr se mění s časem, tedy celý vektor úhlové rychlosti je funkcí času

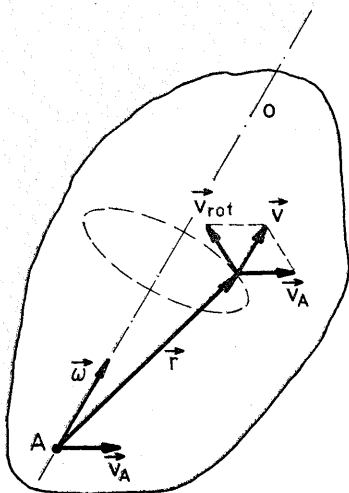
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t). \quad 7(1.11)$$

Právě vyslovené tvrzení je obsahem *Eulerovy věty*, jejíž důkaz spolu s důkazy některých dalších zde vyslovených tvrzení může čtenář najít např. v knize Trkalově nebo Goldsteinově (viz seznam literatury).

Pro pohyb, při kterém v každém okamžiku všechny body tělesa mají stejný vektor rychlosti  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(t)$ , užíváme některého z názvů *posuvný*, *postupný pohyb* nebo *translace*. Jelikož časový průběh rychlosti všech bodů tělesa je stejný, mají trajektorie všech bodů při posuvném pohybu shodný tvar a liší se pouze v důsledku různé počáteční polohy bodů. Trajektorie několika bodů tuhého tělesa konajícího posuvný pohyb jsou znázorněny na obr. 7.4.

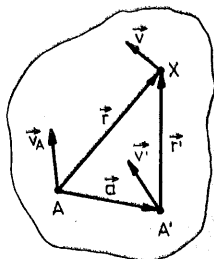
Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z posuvného pohybu (translace) a otáčení (rotace) tělesa kolem pevného bodu. Toto tvrzení bývá nazýváno *Chaslesovou větou*. Rychlost  $\mathbf{v}$  libovolného bodu tuhého tělesa určíme jako součet rychlosti  $\mathbf{v}_A$  jednoho libovolně zvoleného bodu  $A$  tělesa a rychlosti  $\mathbf{v}_{\text{rot}}$  otáčení kolem tohoto zvoleného bodu. Rychlost  $\mathbf{v}_A$  bodu  $A$  pokládáme za rychlost posuvného pohybu tělesa a rychlost  $\mathbf{v}_{\text{rot}}$  rotace kolem bodu  $A$  určíme podle vzorce 7(1.10) stejně jako v případě rotace kolem pevného bodu. Pro rychlost  $\mathbf{v}$  libovolného bodu tělesa dostáváme tak vyjádření

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_A(t) + (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}), \quad 7(1.12)$$



Obr. 7.5 Rychlost  $\mathbf{v}$  bodu tuhého tělesa o polohovém vektoru  $\mathbf{r}$  je součtem translační rychlosti  $\mathbf{v}_A$  a rotační rychlosti  $\mathbf{v}_{\text{rot}}$

kde  $\mathbf{r}$  je vektor vedený z bodu  $A$  do bodu, jehož rychlost  $\mathbf{v}$  určujeme (viz obr. 7.5). Popis pohybu, jak je formulován rovnicí 7(1.12), vychází z určení polohy tuhého tělesa způsobem naznačeným na obr. 7.2. Určíme rychlost pohybu bodu  $A$  a rotaci kolem osy  $o$ . Osu  $o$  však v rovnici 7(1.12) nevolíme



Obr. 7.6 Náčrt k určení závislosti posuvné a rotační rychlosti libovolného bodu tělesa  $X$  na volbě vztahného bodu  $A$

libovolně jako při popisu polohy tělesa, ale je to okamžitá osa otáčení tělesa. Osa otáčení je význačná tím, že body tělesa ležící na ose otáčení zachovávají svou polohu v prostoru. Vzhledem k pohybu bodu  $A$  a časové závislosti vektoru  $\omega$  je však tato význačná vlastnost osy otáčení splněna pouze v diferenciálním časovém okolí uvažovaného okamžiku.

Zjistíme, jak závisí vyjádření rychlosti libovolného bodu tělesa na volbě bodu  $A$ . Zvolíme v tělese dva body: bod  $A$ , který se pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}_A(t)$  a bod  $A'$ , který se pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}'_{A'}(t)$  (obr. 7.6). Určíme rychlost  $\mathbf{v}$  libovolného bodu tělesa, který na obr. 7. 6 je označen  $X$ . Pokládáme-li bod  $A$  za bod, vůči kterému je uvažována rotace tělesa, je

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + (\omega \times \mathbf{r}). \quad 7(1.12)$$

Pokládáme-li bod  $A'$  za střed rotace, dostáváme pro rychlost  $\mathbf{v}$  vyjádření

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'_{A'} + (\omega' \times \mathbf{r}'). \quad 7(1.13)$$

V rovnici 7(1.13) je  $\mathbf{r}'$  vektor s počátkem v bodě  $A'$  a koncem v bodě  $X$  a  $\omega'$  vektor úhlové rychlosti rotace tělesa vůči bodu  $A'$ . Vyjádříme rychlost  $\mathbf{v}'_{A'}$  bodu  $A'$  podle vzorce 7(1.12), dostáváme

$$\mathbf{v}'_{A'} = \mathbf{v}_A + (\omega \times \mathbf{a}). \quad 7(1.14)$$

Vektor  $\mathbf{a}$  má počátek v bodě  $A$  a konec v bodě  $A'$ . Mezi vektory  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  a  $\mathbf{a}$  platí vztah

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'. \quad 7(1.15)$$

Dosadíme-li toto vyjádření vektoru  $\mathbf{r}$  do rovnice 7(1.12), dostáváme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + (\omega \times \mathbf{a}) + (\omega \times \mathbf{r}').$$

Podle 7(1.14) je  $\mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}) = \mathbf{v}'_A$ , a tedy

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \quad 7(1.16)$$

Porovnáním rovnice 7(1.16) a 7(1.13) dostáváme důležitou rovnost

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' . \quad 7(1.17)$$

*Úhlová rychlost otáčení tělesa  $\boldsymbol{\omega}$  nezávisí na volbě bodu, vůči kterému otáčení uvažujeme. Rychlosti dvou různých bodů tělesa zde označené  $\mathbf{v}_A$  a  $\mathbf{v}'_A$  jsou obecně různé. Velikost posuvné rychlosti uvažované v rovnici 7(1.12) na volbě bodu  $A$  závisí.*

Rovnice 7(1.12) je základní rovnicí kinematiky tuhého tělesa. Určuje významnou kinematickou veličinu – rychlost libovolného bodu tuhého tělesa – z časového průběhu dvou vektorových funkcí

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_A(t) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) . \quad 7(1.18)$$

V tomto smyslu jsou rovnice 7(1.18) analogické kinematickým rovnicím 1(2.15), resp. 1(2.19) hmotného bodu. Časová závislost polohy, tj. trajektorie hmotného bodu, je plně určena udáním polohového vektoru  $\mathbf{r}(t)$ . Trajektorii jednotlivých bodů tuhého tělesa nelze snadno stanovit, i když známe funkce 7(1.18). Pomíne-li obtíže při integraci rovnice 7(1.12), podstatnou překážkou stanovení trajektorii je určení vektoru  $\mathbf{r}$ , který vystupuje v rovnici 7(1.12). V inerciální soustavě souřadnic nelze jednoduše stanovit určitý bod tuhého tělesa. Pokládáme-li  $\mathbf{r}$  za vektor, jehož směr je stálý, budou se v jeho koncovém bodě v průběhu času nacházet různé body tuhého tělesa. Budeme-li vektor  $\mathbf{r}$  pokládat za vektor, jehož koncový bod se nachází ve zcela určitém bodě tuhého tělesa, stává se rovnice 7(1.12) neurčitou. Časovou závislost  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  neznáme totiž dříve, než určíme trajektorie bodů tuhého tělesa. Některé způsoby řešení uvedeného problému ukážeme v závěrečných článcích této kapitoly. Ukázali jsme nedostatky rovnice 7(1.12). Přesto je tato rovnice nejpřehlednějším závěrem kinematiky tuhého tělesa. Naznačuje hlavní úkol dynamiky tuhého tělesa, kterým je stanovení dvou vektorových funkcí 7(1.18) ze znalosti sil působících na těleso.

## 7.2 Dynamika tuhého tělesa

V článku 5.2 byly odvozeny věty 5(2.9) a 5(2.18) o hybnosti  $\mathbf{P}$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad 7(2.1)$$

a momentu hybnosti  $\mathbf{B}$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{M} , \quad 7(2.2)$$

soustavy hmotných bodů. Pro tuhé těleso tvoří tyto dvě vektorové rovnice výchozí bod pro stanovení jeho pohybových rovnic, tj. rovnic, kterými ze znalosti výslednice  $\mathbf{F}$  vnějších sil a výsledného momentu  $\mathbf{M}$  vnějších sil určíme typ pohybu tuhého tělesa. Šest skalárních rovnic, které tyto dvě vektorové rovnice reprezentují, tvoří úplný systém rovnic pro určení šesti (počet stupňů volnosti) funkcí kinematicky určujících pohyb tuhého tělesa. Za těchto šest funkcí volíme dvě vektorové funkce 7(1.18)  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_A(t)$  a  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ . Úpravou věty 7(2.1) o hybnosti soustavy pro stanovení funkce  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_A(t)$  je věta 5(2.32)

$$M\mathbf{a}_S = \mathbf{F} \quad 7(2.3)$$

o pohybu hmotného středu soustavy. V rovnici 7(2.3) je  $M$  hmotnost tělesa a  $\mathbf{a}_S$  zrychlení hmotného středu tělesa. Při kinematických úvahách předcházejícího článku jsme bod tělesa na obr. 7.3 označený  $A$  volili zcela libovolně. Vybereme-li za tento bod hmotný střed tělesa, je rovnice 7(2.3) jeho pohybovou rovnicí. Rychlost  $\mathbf{v}_A(t)$ , jedná-li se o rychlost hmotného středu tělesa, označíme  $\mathbf{v}_S(t)$  a rovnici 7(2.3) zapíšeme ve tvaru

$$M \frac{d\mathbf{v}_S}{dt} = \mathbf{F} . \quad 7(2.4)$$

Formální shodnost rovnice 7(2.3), resp. 7(2.4) s rovnicí 2(1.4) dovoluje vyslovit závěr: *Hmotný střed tělesa (ovšem též soustavy hmotných bodů) se pohybuje jako hmotný bod, který má hmotnost rovnu hmotnosti  $M$  tělesa a na nějž působí výslednice vnějších sil působících na těleso.* Pohyb hmotného středu tělesa (soustavy hmotných bodů) lze tedy studovat metodami dynamiky hmotného bodu. Nachází-li se například těleso v tíhovém poli, výslednice vnějších sil působících na těleso je rovna tíze tělesa  $M\mathbf{g}$  a rovnice 7(2.3)

$$M\mathbf{a}_S = M\mathbf{g} \quad 7(2.5)$$

má shodný tvar, a tedy i řešení, s rovnicí 4(2.14). Hmotný střed tělesa se pohybuje po dráze některého z vrhů, jeho rychlost je

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{S,0} - \mathbf{g}t , \quad 7(2.6)$$

kde  $\mathbf{v}_{S,0}$  je vektor rychlosti hmotného středu v čase  $t = 0$ . Úprava rovnice 7(2.2) na rovnici pro stanovení druhé z funkcí 7(1.18), tj. časové závislosti vektoru rotace  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ , je podstatně obtížnější. V zjednodušené formě se jí budeme zabývat v čl. 7.3, kde odvodíme pohybovou rovnici pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy, v obecné formě v čl. 7.4, kde budeme vyšetřovat rotaci tělesa kolem pevného bodu.

*Zjednodušení soustav sil působících na těleso.*

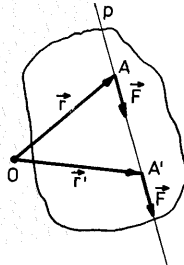
V rovnicích 7(2.1) a 7(2.2) je silové působení na tuhé těleso vystiženo výslednicí vnějších sil působících na těleso

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_{E,n} \quad 7(2.7)$$

a výsledným momentem vnějších sil působících na těleso

$$\mathbf{M} = \sum_{n=1}^N (\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{E,n}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{M}_{E,n} \quad 7(2.8)$$

Různé soustavy vnějších sil působících na těleso, jejichž výslednice  $\mathbf{F}$  a výsledný moment  $\mathbf{M}$  vzhledem k témuž bodu jsou stejné, mají na těleso stejný dynamický účinek. *O takových soustavách sil říkáme, že jsou dynamicky ekvivalentní.*



Obr. 7.7 Přenesení působiště síly podél přímky

Výsledný moment vnějších sil závisí na volbě bodu, vůči kterému jej počítáme. V rovnici 7(2.8) je výsledný moment sil  $\mathbf{M}$  počítán vůči počátku soustavy souřadnic. Snadno lze ukázat, že výsledný moment vnějších sil  $\mathbf{M}'$  vůči bodu o polohovém vektoru  $\mathbf{l}$  bude vázán s momentem  $\mathbf{M}$  vztahem

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - (\mathbf{l} \times \mathbf{F}), \quad 7(2.9)$$

kde  $\mathbf{F}$  je výslednice vnějších sil působících na těleso.

Mějme tuhé těleso a na něj v místech  $\mathbf{r}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) působící vnější síly  $\mathbf{F}_{E,n}$ . Přímý a také často nejjednodušší postup, jak zjistit dynamický účinek těchto sil, je vypočítat podle 7(2.7) výslednici  $\mathbf{F}$  sil  $\mathbf{F}_{E,n}$  a podle rovnice 7(2.8) výsledný moment  $\mathbf{M}$  sil  $\mathbf{F}_{E,n}$  vzhledem k zvolenému počátku soustavy souřadnic. Jelikož stanovení účinků sil působících na těleso má řadu technických aplikací, především při řešení statických úloh, kde často není třeba řešit problém stanovení  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{M}$  v plné obecnosti, rozvinula se řada metod, jak nahrazovat složitější systémy sil působících na těleso dynamicky ekvivalentními soustavami jednoduššími. Uvedeme některé z nich.

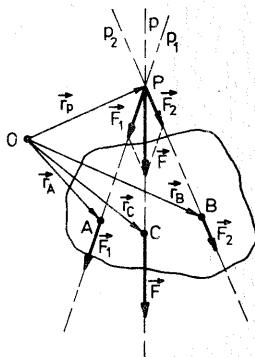
Působí-li v místě  $A$  o polohovém vektoru  $\mathbf{r}$  na těleso síla  $\mathbf{F}$ , lze ji přenést do libovolného jiného působíště podél přímky  $p$ , která prochází bodem  $A$  ve směru vektoru síly  $\mathbf{F}$  (viz obr. 7.7). Říkáme, že účinek síly na těleso se nemění, posuneme-li její působíště podél vektorové přímky  $p$  síly. Posuneme-li sílu  $\mathbf{F}$  do místa  $A'$  o polohovém vektoru  $\mathbf{r}'$ , příspěvek síly do součtu sil 7(2.7) ani její příspěvek do součtu momentů sil 7(2.8) se nezmění. Vektor  $\mathbf{F}$  je v obou polohách stejný a platí i rovnost momentů

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}, \quad 7(2.10)$$

neboť podle elementární definice momentu síly je velikost momentu rovna velikosti síly násobené kolmou vzdáleností bodu, ke kterému moment počítáme, od přímky, v níž působí síla  $\mathbf{F}$ . V našem případě je uvažovanou vzdáleností vzdálenost bodu  $O$  od přímky  $p$ , a ta je pro oba momenty stejná.

Na obr. 7.8 je znázorněna další často uvažovaná konstrukce pro skládání dvou sil působících na těleso, jejichž vektorové přímky  $p_1$  a  $p_2$  jsou různoběžné. Síly  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_2$  působící v bodech  $A$  a  $B$  můžeme, jak bylo ukázáno, posunout do průsečíku  $P$  jejich vektorových přímek  $p_1$  a  $p_2$ . V průsečíku  $P$  síly vektorově složíme. Získáme sílu  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , kterou můžeme libovolně posunout podél její vektorové přímky  $p$ , např. do bodu  $C$ , který je naznačen na obr. 7.8. Nahradíme-li síly  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_2$  silou  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , nemá tato záměna zřejmě žádný vliv na součet 7(2.7). Moment síly  $\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1$ , je-li síla  $\mathbf{F}_1$  v bodě  $A$ , je stejný jako moment  $\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1$  síly  $\mathbf{F}_1$  v bodě  $P$ , jak jsme již zdůvodnili u rovnosti 7(2.10). Obdobně moment  $\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2$ . Jelikož pro vektorový součin platí distributivní zákon, je  $\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}$ . Posuneme-li sílu  $\mathbf{F}$  do bodu  $C$ , musí znovu platit  $\mathbf{r}_P \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$ . Shrňme-li získané výsledky, dostáváme

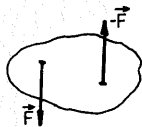
$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}.$$



Obr. 7.8 Skládání různoběžných sil



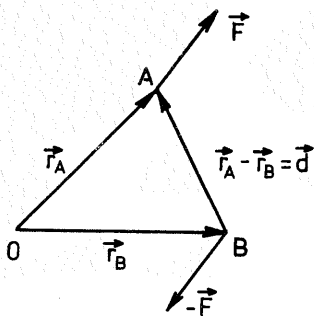
Součet momentů sil  $F_1$  v bodě  $A$  a  $F_2$  v bodě  $B$  vůči bodu  $O$  je stejný jako moment síly  $F$  v místě  $C$  vůči těmuž bodu  $O$ . Nahrazení dvou sil  $F_1$  a  $F_2$  jednou silou  $F$  postupem naznačeným na obr. 7.8 nemá tedy žádný vliv ani na součet momentů sil 7(2.8). Síla  $F$  v bodě  $C$  a dvě síly  $F_1$  v bodě  $A$  a  $F_2$  v bodě  $B$  jsou



Obr. 7.9 Dvojice sil

dynamicky ekvivalentní. Podobným způsobem lze vysvětlit oprávněnost dalších vám známých konstrukcí, např. konstrukce pro skládání dvou souhlasně a nesouhlasně rovnoběžných sil.

Konstrukčně neřešitelný případ skládání dvou sil nastane, je-li třeba složit dvě stejně velké síly stejného směru, ale opačného smyslu (nesouhlasně rovnoběžné) působící v různých místech tuhého tělesa (viz obr. 7.9). Při konstrukci nahrazujeme dvě síly  $F_1$  a  $F_2$  jednou, vhodně položenou silou  $F$ , která je rovna součtu sil  $F_1$  a  $F_2$ . Jsou-li dvě síly stejně velké a nesouhlasně rovnoběžné, je jejich součet nulový,  $F + (-F) = 0$ , a obvyklý konstrukční postup nelze provést. Takové dvě síly, nepůsobí-li podél stejné vektorové přímky  $p$ , jsou nejjednodušší soustavou sil, pro kterou součet 7(2.7) je nulový, ale součet



Obr. 7.10 Moment dvojice sil nezávisí na volbě počátku soustavy souřadnic

momentů 7(2.8) je nenulový. Působí-li taková soustava sil znázorněná na obr. 7.9 na těleso, říkáme, že na těleso působí dvojice sil. Spočteme příspěvek dvojice sil do součtu momentů 7(2.8). Nachází-li se síla  $F$  v místě  $A$  o polohovém vektoru  $r_A$ , její moment vůči počátku  $O$  soustavy souřadnic je  $r_A \times F$  a obdobně moment síly  $-F$  v bodě  $B$  je  $r_B \times (-F)$  (viz obr. 7.10). Tyto dva sčítance přispívají do součtu 7(2.8) výrazem

$$r_A \times F + r_B \times (-F) = (r_A - r_B) \times F,$$

který nazveme momentem  $M^D$  dvojice sil. Vektor  $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$  označíme  $\mathbf{d}$ . Vektor  $\mathbf{d}$  spojuje působíště obou sil, přičemž jeho smysl volíme tak, aby směřoval k působíšti té z obou sil, s níž vektorovým násobením v pořadí

$$\mathbf{d} \times \mathbf{F} = M^D \quad (7(2.11))$$

vytvoří moment dvojice sil. Změníme-li počátek soustavy souřadnic, tj. zaměníme-li bod  $O$  nějakým jiným bodem  $O'$ , vektor  $\mathbf{F}$  ani vektor  $\mathbf{d}$  se nezmění. Na rozdíl od momentu síly nemusíme u momentu silové dvojice uvažovat o bodu, vůči kterému je počítán. Z rovnice 7(2.11) elementárně plyne, že velikost  $M^D$  momentu  $M^D$  je rovna součinu absolutní hodnoty  $F$  jedné ze sil tvořících dvojici a kolmé vzdálenosti  $l$  rovnoběžných vektorových přímkou obou sil

$$M^D = lF . \quad (7(2.12))$$

Po zavedení pojmu dvojice sil můžeme vyslovit další pravidlo o skládání sil působících na těleso. Přeneseme-li sílu  $\mathbf{F}$  z místa  $A$  do místa  $B$ , její dynamický účinek na těleso se nezmění, přidáme-li k síle  $\mathbf{F}$  v místě  $B$  silovou dvojici o momentu  $M^D = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$ , jak plyne ze zřejmé identity

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} .$$

Tímto postupem můžeme přenést všechny síly působící na těleso do hmotného středu tělesa. V něm pak bude působit výslednice vnějších sil  $\sum \mathbf{F}_n$  (sčítací meze podobně jako v kapitole 5 vynecháváme) a výsledný moment vnějších sil  $\mathbf{M}$  můžeme psát jako

$$\mathbf{M} = M^D + \mathbf{r}_S \times \mathbf{F} . \quad (7(2.13))$$

Moment  $M^D$  je součtem momentů silových dvojic přidaných při přenášení sil do hmotného středu a nazveme jej *výsledný moment silové dvojice*. Je-li speciálně výsledná vnější síla  $\sum \mathbf{F}_n$  rovna nule, je podle 7(2.9) výsledný moment vnějších sil  $\mathbf{M}$  nezávislý na volbě bodu, vůči kterému jej počítáme a podle rovnice 7(2.13) je roven momentu výsledné silové dvojice.

Užijeme-li vztah 7(2.13) pro soustavu hmotných bodů v tíhovém poli, dostaneme

$$\mathbf{M} = M^D + \mathbf{r}_S \times M\mathbf{g} , \quad (7(2.14))$$

neboť výslednice vnějších sil působících na soustavu je její tíže  $M\mathbf{g}$ . Vypočteme-li výsledný moment tíhových sil  $m_n \mathbf{g}$  jednotlivých hmotných bodů soustavy, dostaneme podle 7(2.8)

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{g} . \quad (7(2.15))$$

Výraz 5(1.9) pro hmotný střed soustavy napíšeme v tvaru

$$\mathbf{r}_S \mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_n m_n \quad 7(2.16)$$

a rovnici 7(2.15) podle něj upravíme

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_n m_n \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_S \times \mathbf{Mg} . \quad 7(2.17)$$

Porovnáme-li rovnice 7(2.14) a 7(2.17), vidíme, že výsledný moment silové dvojice  $\mathbf{M}^D$  tíhových sil je nulový. Soustavu sil, která působí na tuhé těleso v tíhovém poli, lze tedy nahradit jedinou silou – tíhou tělesa – umístěnou v hmotném středu tělesa. *Hmotný střed bývá nazýván těžištěm, protože je působíštěm síly působící na těleso v tíhovém poli.*

*Rovnováha tuhého tělesa.*

Jsou-li výslednice vnějších sil působících na těleso

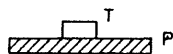
$$\mathbf{F} = 0 \quad 7(2.18)$$

a výsledný moment vnějších sil působících na těleso

$$\mathbf{M} = 0 \quad 7(2.19)$$

nulové, říkáme, že těleso je v rovnováze. Z rovnice 7(2.9) plyne v případě, kdy je splněna podmínka 7(2.18), že moment síly nezávisí na volbě bodu, vůči kterému je počítán. Je-li vůči některému vztažnému bodu  $\mathbf{M} = 0$ , je  $\mathbf{M} = 0$  vůči každému vztažnému bodu. Podmínku 7(2.19) můžeme tedy vyslovit bez údaje, vůči kterému bodu je moment  $\mathbf{M}$  počítán. Jak jsme uvedli již dříve, je při splnění podmínky 7(2.18) výsledný moment  $\mathbf{M}$  vnějších sil působících na těleso roven momentu  $\mathbf{M}^D$  výsledné dvojice sil. Podmínky rovnováhy můžeme pak formulovat též takto: *Těleso je v rovnováze, když výslednice vnějších sil  $\mathbf{F}$  působících na těleso a moment  $\mathbf{M}$  výsledné dvojice sil jsou rovny nule.*

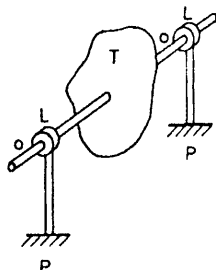
Jak se může chovat těleso, které je v rovnováze? Je-li před aplikací vnějších sil, které splňují podmínky 7(2.18) a 7(2.19), v klidu, zůstane v klidu i nadále. Není-li těleso před aplikací sil splňující podmínky rovnováhy v klidu, může konat řadu různých pohybů. Podmínka 7(2.18), jak plyne z věty 5(2.32) o pohybu hmotného středu soustavy, dovoluje, aby hmotný střed tělesa byl buď v klidu, anebo konal



Obr. 7.11 Těleso na vodorovné podložce

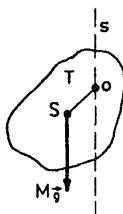
přímočarý rovnoměrný pohyb v libovolném směru. Na pohyb tělesa kolem hmotného středu nemá podmínka 7(2.18) žádný vliv. Podmínka 7(2.19) omezuje způsob otáčení tuhého tělesa kolem hmotného středu, dovoluje však řadu pohybů až po složitý pohyb volného setrvačnicku, který rozebereme v čl. 7.5.

Zatím jsme podmínky rovnováhy uvažovali pro volné tuhé těleso. Často však je těleso ve styku s jinými objekty, které omezují jeho pohyb. Říkáme, jak bylo uvedeno v článku 5.6, že těleso je podrobena vazbám. Spocívá-li těleso  $T$  na podložce  $P$  způsobem naznačeným na obr. 7.11, může se pohybovat pouze podél



Obr. 7.12 Těleso volně otočné kolem pevné osy

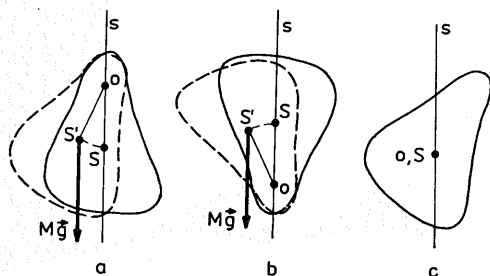
podložky nebo nad podložkou. Podložka  $P$  tvoří pro těleso  $T$  vazbu. V čl. 7.1 jsme popisovali otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy. Musí-li jistá osa tělesa zachovávat v prostoru pevný směr, což lze realizovat např. způsobem znázorněným na obr. 7.12 (tyč  $o$ , která je součástí tělesa  $T$ , je vedena ložisky  $L$  spojenými s nějakým tělesem  $P$  pevným v prostoru), je tím pohyb tělesa omezen. upevnění osy představuje vazbu, které je těleso podrobena. nachází-li se těleso  $T$ , znázorněné na obr. 7.11 v tíhovém poli, je tíha tělesa vyrovnána silou, kterou na něj působí podložka  $P$ . Výsledný moment vnějších sil působících na těleso je také nulový. Předpokládáme, že mezi podložkou a tělesem nepůsobí tření. Nejobecnější pohyb tělesa  $T$  v uvažovaných podmínkách je rovnoměrný přímočarý pohyb jeho těžiště ve vodorovné rovině spolu s rovnoměrným otáčením tělesa kolem svislé osy. Možný pohyb při splnění podmínek 7(2.18) a 7(2.19) je tedy jednodušší než rovnovážný pohyb volného tělesa.



Obr. 7.13 Schematický pohled na těleso z obr. 7.12 ve směru osy otáčení

Těleso  $T$  z obr. 7.12 se nachází v tíhovém poli a tyč  $o$  je vodorovná. Pohled na těleso ve směru tyče  $o$  je znázorněn na obr. 7.13. Jak jsme ukázali dříve, působení tíhového pole na těleso může být vystiženo tíhou tělesa  $Mg$  umístěnou

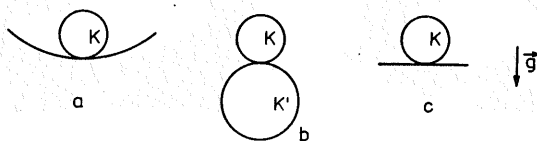
v hmotném středu  $S$  tělesa. V poloze znázorněné na obr. 7.13 nejsou podmínky rovnováhy splněny, moment síly  $Mg$  vůči bodu na ose, který volíme za vztažný bod, není nulový. Má-li těleso  $T$  znázorněné na obr. 7.13 být v rovnováze, musí jeho hmotný střed  $S$  ležet na svislé přímce  $s$  procházející osou  $o$ . Podmínky



Obr. 7.14 Rovnovážné polohy tělesa otočného kolem osy:  
a) stálá, b) vratká, c) volná

rovnováhy a vazby omezují pohyb tělesa ještě více než pro těleso znázorněné na obr. 7.11. Dovolují mu pouze klidně setrvávat v dané poloze, a jen když hmotný střed tělesa leží na ose otáčení, může se těleso rovnoměrně otáčet kolem osy. Rozebereme nyní podrobněji různé rovnovážné polohy uvažovaného tělesa:

1. Hmotný střed  $S$  leží na přímce  $s$  pod osou otáčení  $o$  (obr. 7.14a). Otočíme-li poněkud těleso tak, že hmotný střed  $S$  přejde do nové polohy  $S'$ , těleso přestane být v rovnováze a vzniklý nenulový moment vnější síly  $Mg$  se snaží těleso vrátit do rovnovážné polohy. Říkáme, že *rovnovážná poloha* tělesa je *stálá (stabilní)*.



Obr. 7.15 Rovnovážné polohy koule  $K$ : a) stálá – koule v misce, b) vratká – koule  $K$  na kouli  $K'$ , c) volná – koule na vodorovné desce

2. Hmotný střed  $S$  leží na přímce  $s$  nad osou otáčení  $o$  (obr. 7.14b). Otočíme-li poněkud těleso, hmotný střed  $S$  přejde do polohy  $S'$ , těleso přestane být v rovnováze a vzniklý nenulový moment vnější síly  $Mg$  se snaží těleso dále vzdalovat od rovnovážné polohy. Říkáme, že *rovnovážná poloha* je *vratká (labilní)*.

3. Je-li osa otáčení v tělese položena tak, že prochází hmotným středem tělesa (obr. 7.14c), jsou podmínky rovnováhy splněny pro každé natočení tělesa. Říkáme, že *rovnovážná poloha* je *volná (indiferentní)*. V tomto případě se těleso při splnění podmínek rovnováhy může též rovnoměrně otáčet kolem osy stálou úhlovou rychlostí  $\omega$ .

Na obr. 7.15 jsou jako další příklad znázorněny různé rovnovážné polohy koule v tíhovém poli.

Potenciální energie tělesa v tíhovém poli je dána výrazem

$$W_p = Mgh_s + W_{p,0}, \quad 7(2.20)$$

kde  $W_{p,0}$  je libovolná konstantní hodnota energie a  $h_s$  výška hmotného středu tělesa v tíhovém poli. Vidíme, že v uvedených případech stálé rovnovážné poloze odpovídá minimum potenciální energie a vratké rovnovážné poloze maximum potenciální energie ve srovnání s okolními, vazbami přípustnými polohami tělesa. Pohybuje-li se těleso v soulase s vazbami při volné rovnovážné poloze, potenciální energie se nemění. Uvedený vztah mezi druhem rovnovážné polohy a průběhem potenciální energie v jejím okolí má obecný charakter. Často bývá *rovnovážný stav* různých systémů hledán jako *extrém jejich potenciální energie*. *Stálý (stabilní) rovnovážný stav nastane, když potenciální energie má minimum.*

### 7.3 Otáčení kolem pevné osy

V článku 7.1 jsme nazvali otáčením tuhého tělesa kolem pevné osy pohyb, při kterém jedna přímka pevná v tělese zachovává po celou dobu stálou polohu v prostoru. Této přímce říkáme osa otáčení. Pohyb tělesa otáčejícího se kolem osy je popsán, když je známa časová závislost úhlu  $\varphi = \varphi(t)$  zavedeného rovnicí 7(1.9). Najdeme rovnici, podle níž lze neznámou funkci  $\varphi = \varphi(t)$  určit, tj. pohybovou rovnici tělesa, které se otáčí kolem pevné osy.

Vyjdeme z rovnice 5(2.18), resp. 7(2.2). Pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic pevnou v prostoru zvolíme tak, že její počátek bude ležet na ose otáčení a třetí osa bude mít směr osy otáčení. Hledanou pohybovou rovnici získáme úpravou třetí složky

$$\frac{dB_3}{dt} = M_3 \quad 7(3.1)$$

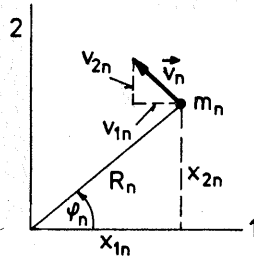
rovnice 5(2.18). Podle 5(2.19) je třetí složka  $B_3$  celkového momentu hybnosti součtem třetích složek vektorových součinů  $\mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n$

$$B_3 = \sum [\mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n]_3. \quad 7(3.2)$$

Rozepíšeme třetí složku vektorového součinu  $\mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n$

$$[\mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n]_3 = x_{1n} m_n v_{2n} - x_{2n} m_n v_{1n}. \quad 7(3.3)$$

Na obr. 7.16 je pohled ve směru a proti smyslu třetí osy souřadnicové. Je na něm znázorněn hmotný bod  $m_n$ , jeho souřadnice  $x_{1n}$ ,  $x_{2n}$ , složky jeho rychlosti  $v_{1n}$ ,  $v_{2n}$ , kolmá spojnice bodu a osy otáčení  $R_n$  a úhel  $\varphi_n$ , který svírá  $R_n$  s kladným



Obr. 7.16 Otáčení kolem třetí osy souřadnicové

smyslem první osy souřadnic (jedná se zpravidla o úhel mimoběžek). V tuhé soustavě hmotných bodů, kterou modelujeme tuhé těleso, je délka úsečky  $R_n$  poloměrem kružnice, po které se hmotný bod  $m_n$  pohybuje. Zřejmě

$$\begin{aligned} x_{1n} &= R_n \cos \varphi_n, \\ x_{2n} &= R_n \sin \varphi_n \end{aligned} \quad 7(3.4)$$

a složky rychlosti  $n$ -tého hmotného bodu jsou

$$\begin{aligned} v_{1n} &= \frac{dx_{1n}}{dt} = -R_n \frac{d\varphi_n}{dt} \sin \varphi_n, \\ v_{2n} &= \frac{dx_{2n}}{dt} = R_n \frac{d\varphi_n}{dt} \cos \varphi_n. \end{aligned} \quad 7(3.5)$$

Výraz  $d\varphi_n/dt$  je úhlová rychlost  $\omega_n$  otáčení  $n$ -tého hmotného bodu. U tuhé soustavy hmotných bodů jsou však úhlové rychlosti  $\omega_n$  všech bodů stejné, tuhá soustava otáčející se kolem osy má jednu úhlovou rychlost  $\omega$ . Platí

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad 7(3.6)$$

kde  $\varphi = \varphi(t)$  je hledaná funkce charakterizující otáčení soustavy, za kterou můžeme volit např. některou z funkcí  $\varphi_n = \varphi_n(t)$ . Funkce  $\varphi_n(t)$  se vzájemně liší o konstantní hodnoty odpovídající různým polohám bodů  $m_n$  na počátku pohybu, tj. v čase  $t = 0$ . Užijeme-li rovnic 7(3.4) a 7(3.6), můžeme výraz 7(3.3) upravit

$$x_{1n}m_nv_{2n} - x_{2n}m_nv_{1n} = m_nR_n^2\omega.$$

Pro třetí složku  $B_3$  celkového momentu hybnosti danou rovnicí 7(3.2) tak dostaneme vyjádření

$$B_3 = \sum m_n R_n^2 \omega = \omega \sum m_n R_n^2. \quad 7(3.7)$$

Hodnota součtu  $\sum m_n R_n^2$  závisí pouze na velikosti hmotnosti  $m_n$  jednotlivých hmotných bodů soustavy a na jejich vzdálenosti  $R_n$  od osy otáčení. Pro tuhou soustavu hmotných bodů, která se otáčí kolem pevné osy, je uvažovaný součet konstantní a nazýváme jej *momentem setrvačnosti*  $J$ . Definiční rovnicí

$$J = \sum_{n=1}^N m_n R_n^2 \quad 7(3.8)$$

převedeme podle analogie, která byla vysvětlena při úpravě rovnice 7(1.5) na rovnici 7(1.6), na tvar vhodný pro výpočet momentu setrvačnosti tuhého tělesa

$$J = \int_V R^2 \rho \, dV. \quad 7(3.9)$$

Integrálem 7(3.9) je zaveden moment setrvačnosti tuhého tělesa vůči pevné ose. Integruje se přes objem tělesa  $V$ ,  $R$  je proměnná vzdálenost jednotlivých bodů tělesa od osy otáčení a  $\rho$  obecně proměnná hustota tělesa. Momenty setrvačnosti některých homogenních (konstantní hustota  $\rho$ ) těles vůči významným osám jsou vypočteny v řešené úloze č. 1. Se zavedeným pojmem momentu setrvačnosti můžeme rovnici 7(3.1) s přihlédnutím k 7(3.7) psát ve tvaru

$$\frac{dJ\omega}{dt} = M_3. \quad 7(3.10)$$

Složku výsledného momentu vnějších sil  $\mathbf{M}$  do směru osy otáčení nazýváme *výsledným momentem vnějších sil vůči ose* a budeme ji označovat  $M^0$ . Otáčí-li se těleso kolem třetí osy souřadnicové, je třetí složka výsledného momentu vnějších sil  $M_3$  výsledným momentem vnějších sil vůči ose, můžeme ji označit  $M^0$  a rovnici 7(3.10) psát ve tvaru nezávislém na specifické volbě soustavy souřadnic

$$\frac{dJ\omega}{dt} = M^0. \quad 7(3.11)$$

Moment setrvačnosti  $J$  tuhého tělesa a tuhé soustavy hmotných bodů nezávisí na čase. Rovnici 7(3.11) můžeme tedy psát též

$$J \frac{d\omega}{dt} = M^0. \quad 7(3.12)$$

Rovnice 7(3.11) a 7(3.12) jsou dva ekvivalentní tvary hledané pohybové rovnice. *Pohybová rovnice tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevné osy, udává, že součin*



momentu setrvačnosti  $J$  tělesa vůči ose otáčení a úhlového zrychlení  $d\omega/dt$  tělesa je roven výslednému momentu vůči ose  $M^0$  vnějších sil působících na těleso.

Všimneme si analogie mezi rovnicí 2(1.4)  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  a rovnicí 7(3.12). Obě mají tvar

$$f(m) \cdot g[\mathbf{r}(t)] = h(\mathbf{F}), \quad 7(3.13)$$

kde  $f(m)$  je s časem konstantní, rozložením hmotnosti daná vlastnost hmotného objektu,  $g[\mathbf{r}(t)]$  je charakteristika pohybu hmotného objektu a funkce  $h(\mathbf{F})$  vystihuje vnější silové působení. V rovnici 2(1.4) vlastností  $f(m)$  hmotného objektu je přímo hmotnost  $m$  hmotného bodu, v rovnici 7(3.12) je jí moment setrvačnosti  $J$  tělesa. Charakteristikou pohybu  $g[\mathbf{r}(t)]$  v rovnici 2(1.4) je zrychlení  $\mathbf{a}$  hmotného bodu, v rovnici 7(3.12) úhlové zrychlení  $d\omega/dt$  tělesa. Silové působení  $h(\mathbf{F})$  v rovnici 2(1.4) je dáno přímo silou  $\mathbf{F}$ , v rovnici 7(3.12) je funkcí  $h(\mathbf{F})$  výsledný moment vnějších sil vůči ose  $M^0$ . Rovnice 2(1.4) je vektorovou rovnicí a rovnice 7(3.12) rovnicí skalární, ale tento rozdíl není pro uvažovanou analogii podstatný.

Pohybová rovnice 7(3.12)  $J(d^2\varphi/dt^2) = M^0$  (podle 7(3.6) je  $(d\omega/dt) = (d^2\varphi/dt^2)$ ) je diferenciální rovnicí pro určení neznámé funkce  $\varphi = \varphi(t)$ . Moment setrvačnosti  $J$  je konstantní a lze jej pro dané těleso a danou osu stanovit dříve, než začneme vyšetřovat pohyb tělesa. Výsledný moment vnějších sil vůči ose  $M^0$  určíme tak, že vypočteme výsledný moment sil působících na těleso

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{E,n} \quad 7(2.8)$$

vůči počátku soustavy souřadnic, který volíme na ose otáčení, a získaný vektor  $\mathbf{M}$  vynásobíme skalárně jednotkovým vektorem  $\mathbf{v}$ , jenž má směr osy otáčení, tedy

$$M^0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}. \quad 7(3.14)$$

Tím, jak volíme smysl vektoru  $\mathbf{v}$  na ose otáčení, určíme, co budeme nazývat kladným smyslem otáčení. Smysl otáčení je kladný, když ve vztahu  $\omega = k\varphi$  je  $k$  kladná konstanta,  $k > 0$ . Uvedený postup stanovení momentu  $M^0$  lze provést pro libovolnou orientaci osy otáčení vůči soustavě souřadnic. Pro výše uvažované otáčení tělesa kolem třetí osy souřadnic má jednotkový vektor ve směru osy složky  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $v_3 = 1$ , zvolíme-li smysl  $\mathbf{v}$  shodný s kladným smyslem třetí osy souřadnic. Z rovnice 7(3.14) pak dostáváme

$$M^0 = v_1 M_1 + v_2 M_2 + v_3 M_3 = M_3,$$

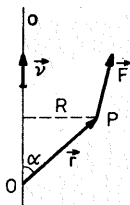
což jest vztah, který jsme již uvažovali při odvození rovnic 7(3.11) a 7(3.12).

V jednoduchých případech bývá výhodnější stanovit moment  $M^0$  konstruktivně než právě uvedeným analytickým postupem. Moment síly  $\mathbf{F}$  vůči počátku

O soustavě souřadnic, který leží na ose otáčení  $o$ , je  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , a tedy moment této síly vůči ose je podle 7(3.14)

$$M^0 = \mathbf{v}(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) . \quad 7(3.15)$$

Smíšený součin na pravé straně poslední rovnice je podle D(4.27) ekvivalentní výrazu  $\mathbf{F}(\mathbf{v} \times \mathbf{r})$ , který lze interpretovat jako průmět  $F_R$  síly  $\mathbf{F}$  do směru kolmého



Obr. 7.17 Náčrt k objasnění významu momentu síly vůči ose

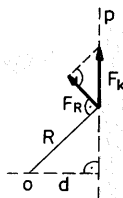
k rovině dané vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{r}$  vynásobený velikostí  $r \sin \alpha$  vektorového součinu  $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ . Pro moment síly  $\mathbf{F}$  vůči ose  $o$  tak dostáváme vyjádření

$$M^0 = F_R r \sin \alpha , \quad 7(3.16)$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}$  (viz obr. 7.17). Výraz  $r \sin \alpha$  je však roven vzdálenosti  $R$  působišť  $P$  síly  $\mathbf{F}$  od osy otáčení  $o$ . Moment síly  $\mathbf{F}$  vůči ose  $o$  získáme tedy tak, že promítneme sílu  $\mathbf{F}$  do roviny kolmé k ose otáčení – průmět označíme  $F_k$  – a v této rovině ještě  $F_k$  promítneme do směru kolmého k poloměru  $R$  (obr. 7.18). Získáme průmět  $F_R$ , který vynásobíme velikostí  $R$ . Stejný výsledek získáme, vynásobíme-li průmět  $F_k$  vzdáleností  $d$  od osy otáčení přímky  $p$ , ve které leží  $F_k$ . Z obr. 7.18 znázorňujícího pohled ve směru osy  $o$  je totiž zřejmé, že  $F_k/F_R = R/d$ , neboli  $F_k d = F_R R$ . Moment síly  $\mathbf{F}$  vůči ose lze tedy vyjádřit jednoduše

$$M^0 = F_R R = F_k d . \quad 7(3.17)$$

Máme-li více sil  $\mathbf{F}$ , lze jejich příspěvky k výslednému momentu  $M^0$  vnějších sil vůči ose sčítat. Musíme přitom dbát toho, aby příspěvky, které se snaží otáčet tělesem v různém smyslu, byly brány s opačným znaménkem.

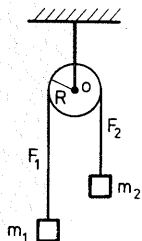


Obr. 7.18 Veličiny  $F_R$ ,  $F_k$ ,  $R$ ,  $d$ , kterými lze vyjádřit moment síly vůči ose  $M^0$ ;  $M^0 = F_R R = F_k d$

Pohybová rovnice 7(3.12) pro otáčení tuhého tělesa kolem osy je velmi často užívána k řešení konkrétních úloh. Jejím užitím např. získáme pohybovou rovnici

$$(F_1 - F_2) R = J \frac{d\omega}{dt} \quad 7(3.18)$$

pro *pohyb těžké kladky* znázorněné na obr. 7.19 a podrobně řešené v úloze 2. Těžká říkáme takové kladce, u níž nezanedbáváme její hmotnost, a tím ani

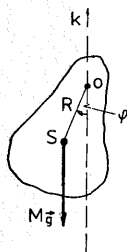


Obr. 7.19 Těžká kladka

její moment setrvačnosti  $J$ . Druhý příklad, řešení pohybu fyzického kyvadla, zde pro jeho důležitost probereme podrobně.

*Fyzické kyvadlo* je těleso, které se v tíhovém poli otáčí kolem pevné vodorovné osy neprocházející jeho hmotným středem.

Na obr. 7.20 je schematicky znázorněn pohled na fyzické kyvadlo ve směru osy otáčení  $o$ . Hmotný střed kyvadla je označen  $S$  a jeho vzdálenost od osy



Obr. 7.20 Fyzické kyvadlo

otáčení  $R$ . Svislá přímka vedená osou otáčení je značena  $k$ . Podle výsledku uvedeného v čl. 7.2 lze silové působení na těleso v tíhovém poli nahradit tíhou tělesa  $M\mathbf{g}$  působící v hmotném středu (těžišti) tělesa, a tedy, s přihlédnutím k 7(3.17), velikost momentu síly vůči ose

$$M^0 = MgR \sin \varphi . \quad 7(3.19)$$

Úhel  $\varphi$  mezi svislou přímkou  $k$  a kolmicí spuštěnou z hmotného středu  $S$  tělesa na osu otáčení  $o$  je úhlem mezi přímkou pevnou v prostoru a přímkou pevnou v tělese, jakým se zpravidla popisuje pohyb tělesa otáčejícího se kolem pevné osy. Úhlová rychlost otáčení kyvadla je  $d\varphi/dt$ . Dosadíme-li do rovnice 7(3.12)  $d\varphi/dt$  za  $\omega$  a za  $M^0$  výraz 7(3.19), dostáváme

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MgR \sin \varphi . \quad 7(3.20)$$

Znaménko minus v rovnici 7(3.20) vyjadřuje skutečnost, že moment tíhové síly se snaží tělesem otáčet tak, aby zmenšoval absolutní hodnotu úhlu  $\varphi$ . Rovnice 7(3.20) je diferenciální rovnice pro neznámou funkci  $\varphi = \varphi(t)$ . Funkce  $\varphi = \varphi(t)$  řešící rovnici 7(3.20) není žádná z běžných funkcí. Její hodnoty mohou být tabelovány nebo je možno funkci vyjádřit ve tvaru nekonečné řady (viz např. knihu Kittelovu z doporučené literatury). Omezíme-li se na malé absolutní velikosti úhlu  $\varphi$ , můžeme použít přibližné rovnosti  $\varphi \doteq \sin \varphi$  a rovnici 7(3.20) přepsat na tvar

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MgR\varphi . \quad 7(3.21)$$

Rovnice 7(3.21) je rovnice formálně shodná s pohybovou rovnicí 3(1.11) harmonického kmitu. Řešením rovnice 7(3.21) je tedy funkce

$$\varphi = \Phi \sin (\Omega t + \alpha) , \quad 7(3.22)$$

kde

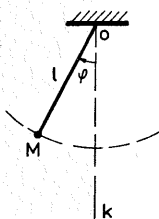
$$\Omega = \left( \frac{MgR}{J} \right)^{1/2} . \quad 7(3.23)$$

Konstanty  $\Phi$  a  $\alpha$  z rovnice 7(3.22) je nutno určit z počátečních podmínek pohybu. Úhel  $\Phi$  určuje maximální velikost (amplitudu) úhlu  $\varphi$  a úhel  $\Phi \sin \alpha$  hodnotu úhlu  $\varphi$  v čase  $t = 0$ . Je-li  $\Phi$  malé, jsou po celou dobu pohybu, tj. pro všechna  $\varphi(t)$ , splněny podmínky pro platnost přibližné rovnice  $\sin \varphi \doteq \varphi$  užitě při odvození pohybové rovnice 7(3.21). Rovnovážná poloha fyzického kyvadla nastane (srovnej obr. 7.14) pro  $\varphi = 0$ . Při malých výchylkách z rovnovážné polohy úhel  $\varphi$  určující pohyb fyzického kyvadla je dán harmonickou funkcí 7(3.22). *Kyvadlo kmitá kolem své rovnovážné polohy s frekvencí  $\Omega$  danou rovnicí 7(2.23).* Je třeba dobře rozlišovat konstantní frekvenci kmitů  $\Omega$  a proměnnou úhlovou rychlost  $\omega = d\varphi/dt$ , jakou se kyvadlo otáčí kolem osy. Stejně tak je si třeba uvědomit, že harmonicky proměnnou veličinou při pohybu kyvadla je úhel  $\varphi$  a pouze přibližně průmět bodu  $S$  do vodorovné roviny. Ve shodě

s výsledky kap. 3 nazveme dobou kmitu  $T$  kyvadla časový interval, po kterém se celý pohyb kyvadla opakuje. Podle rovnic 7(3.22) a 7(3.23) zřejmě

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \left( \frac{J}{MgR} \right)^{1/2}. \quad 7(3.24)$$

Porovná-li se řešení 7(3.22) rovnice 7(3.21) s řešením přesné rovnice 7(3.20), lze zjistit, že doba kmitu kyvadla je dána výrazem 7(3.24) s přesností větší než 0,1 %, když amplituda  $\Phi$  úhlu  $\varphi$  nepřesáhne hodnotu  $5^\circ$ . Výraz 7(3.24) je na amplitudě  $\Phi$  nezávislý, doba kmitu odpovídající řešení přesné rovnice 7(3.20) mírně s amplitudou  $\Phi$  roste.



Obr. 7.21 Matematické kyvadlo

Předpokládáme-li, že těleso má celou svou hmotnost soustředěnu v bodě, jehož vzdálenost od osy otáčení je  $l$ , moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení  $J = Ml^2$  a vzdálenost hmotného středu tělesa od osy otáčení  $R = l$ . Pro dobu kmitu takového systému, který nazýváme matematickým kyvadlem, dostáváme dosazením do vzorce 7(3.24) vyjádření

$$T = 2\pi \left( \frac{l^2 M}{Mgl} \right)^{1/2} = 2\pi \left( \frac{l}{g} \right)^{1/2}. \quad 7(3.25)$$

Matematické kyvadlo přibližně realizujeme, zavěsíme-li v tíhovém poli těžkou kouli na lehké vlákno, a počáteční podmínky pohybu volíme tak, aby koule a její závěs se stále pohybovaly v jedné svislé rovině (viz obr. 7.21). Výraz

$$l_r = \frac{J}{MR} \quad 7(3.26)$$

z rovnice 7(3.24) má rozměr délky a bývá nazýván *redukovanou délkou fyzického kyvadla*. Užijeme-li v rovnici 7(3.24) označení 7(3.26), dostáváme pro dobu kmitu fyzického kyvadla výraz

$$T = 2\pi \left( \frac{l_r}{g} \right)^{1/2}.$$

formálně shodný s rovnicí 7(3.25). Jak lze experimentálně stanovit redukovanou délku fyzického kyvadla, je uvedeno v řešení úlože č. 3. V úlože č. 4 je řešen další důležitý pohyb tělesa, který lze vyšetřovat podle rovnice 7(3.12) – *valení tělesa po nakloněné rovině*.

Všimneme si nyní soustavy, která se otáčí kolem pevné osy, ale jejíž moment setrvačnosti se může v časovém průběhu měnit. Takovou soustavou může např. být osoba sedící na otáčivé židli, která rozpažuje a připazuje ruce s činkami. Před rozpažením rukou můžeme člověka, činky a židli pokládat za tuhou soustavu otáčející se společnou úhlovou rychlostí  $\omega_1$  a pro tuto soustavu můžeme i vypočítat moment setrvačnosti, který označíme  $J_1$ . Při rozpažování rukou není soustava tuhá. Má-li již člověk rozpaženo, znovu můžeme soustavu pokládat za tuhou s úhlovou rychlostí otáčení  $\omega_2$  a momentem setrvačnosti  $J_2$ . Předpokládáme-li dále, že moment vnějších sil vůči ose otáčení  $M^0$  je nulový, plyne z rovnice 7(3.11)

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \quad 7(3.27)$$

uvědomíme-li si, že rovnice 7(3.11) byla odvozena z rovnice 7(3.1). Rovnici 7(3.1) podle výkladu provedeného v tomto článku můžeme přepsat na tvar

$$\frac{d(B_v)}{dt} = \frac{dB_v}{dt} = M^0, \quad 7(3.28)$$

kde  $B_v$  je složka momentu hybnosti do osy otáčení a  $M^0$  je výsledný moment vnějších sil vůči ose. Při předpokládaném  $M^0 = 0$  plyne z rovnice 7(3.28)

$$B_v = \sum_{n=1}^N m_n R_n^2 \omega_n = \text{konst.} \quad 7(3.29)$$

Při otáčení kolem pevné osy zůstává složka momentu hybnosti do této osy s časem konstantní, když výsledný moment vnějších sil vůči ose je nulový. V okamžicích, kdy soustavu lze pokládat za tuhou, můžeme časově konstantní moment hybnosti  $B_v$  vyjádřit jako součin momentu setrvačnosti a úhlové rychlosti otáčení, tj. jako  $J_1\omega_1$ , resp.  $J_2\omega_2$ . Rovnice 7(3.27) je obvyklou formulací *zákona zachování momentu hybnosti 5(2.18) pro soustavu, kterou v právě vyloženém smyslu lze chápat jako soustavu otáčející se kolem pevné osy*. Podle rovnice 7(3.27) lze např. vysvětlit zmenšení úhlové rychlosti otáčení, roztáhne-li člověk na otáčivé židli ruce nebo zvětšení úhlové rychlosti krasobruslaře při piruetě, kdy krasobruslař se snaží co nejvíce zmenšit svůj moment setrvačnosti vůči ose rotace. Člověk s roztaženými rukama má větší moment setrvačnosti  $J_2$ , než je jeho moment setrvačnosti  $J_1$ , má-li ruce připážené. Z rovnice 7(3.27) pak plyne, že pro  $J_2 > J_1$  je  $\omega_2 < \omega_1$ .

Uvedli jsme i *obecnější tvar 7(3.29) zákona zachování momentu hybnosti pro soustavu otáčející se kolem pevné osy*, který umožňuje řešit i případy, kdy různé

části soustavy se pohybují různou úhlovou rychlostí v jednom okamžiku. Příkladem může být roztočení rotačně uloženého kotouče pohybem po tomto kotouči a různé rotační a protirotační pohyby užívané v gymnastice, lyžařství a akrobacii. Při rozpisu složky momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  v 7(3.29) jsme užili rovnici 7(3.7), přičemž jsme uvážili tvar, který by plynul ze 7(3.5), kdyby nebylo užito zjednodušení 7(3.6).

## 7.4 Tenzor setrvačnosti, Eulerovy pohybové rovnice

Rovnici 7(3.8), resp. 7(3.9) jsme zavedli moment setrvačnosti jako charakteristiku tělesa pro otáčení kolem pevné osy. Po zavedení momentu setrvačnosti se nám podařilo přepsat větu 5(2.18) o momentu hybnosti soustavy na tvar 7(3.13). Rozšíříme nyní pojem momentu setrvačnosti tak, aby vystihoval vlastnosti tělesa při otáčení kolem pevného bodu. Zkusíme, zda je možno přepsat rovnici 5(2.18) na tvar 7(3.13) i pro otáčení tělesa kolem pevného bodu. Počátek soustavy souřadnic vložíme do bodu, kolem kterého se těleso reprezentované tuhou soustavou hmotných bodů otáčí. Potom podle 7(1.10) rychlost  $n$ -tého bodu soustavy

$$\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n, \quad 7(4.1)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}$  je okamžitá úhlová rychlost otáčení tělesa a  $\mathbf{r}_n$  je polohový vektor  $n$ -tého bodu soustavy. Dosadíme-li vyjádření rychlosti 7(4.1) do 5(2.19), dostáváme pro celkový moment hybnosti  $\mathbf{B}$  soustavy (označení vždy stejných sčítacích mezi  $n = 1$  až  $N$  u znaků  $\sum$  v celém článku vynecháváme)

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n = \sum m_n \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n). \quad 7(4.2)$$

Rovnici 7(4.2) rozepíšeme do složek, přičemž pořadové číslo  $n$  jednotlivých hmotných bodů budeme u jejich souřadnic psát nahoře. Vypočteme-li složky dvojitého vektorového součinu  $\mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)$ , dostáváme

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum m_n [x_2^n (\omega_1 x_2^n - \omega_2 x_1^n) - x_3^n (\omega_3 x_1^n - \omega_1 x_3^n)], \\ B_2 &= \sum m_n [x_3^n (\omega_2 x_3^n - \omega_3 x_2^n) - x_1^n (\omega_1 x_2^n - \omega_2 x_1^n)], \\ B_3 &= \sum m_n [x_1^n (\omega_3 x_1^n - \omega_1 x_3^n) - x_2^n (\omega_2 x_3^n - \omega_3 x_2^n)]. \end{aligned}$$

Po vytknutí složek vektoru úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}$ , který je společný pro celé těleso, můžeme poslední rovnice přepsat na tvar

$$\begin{aligned} B_1 &= \omega_1 \sum m_n [(x_2^n)^2 + (x_3^n)^2] - \omega_2 \sum m_n x_1^n x_2^n - \omega_3 \sum m_n x_1^n x_3^n, \\ B_2 &= -\omega_1 \sum m_n x_1^n x_2^n + \omega_2 \sum m_n [(x_1^n)^2 + (x_3^n)^2] - \omega_3 \sum m_n x_2^n x_3^n, \\ B_3 &= -\omega_1 \sum m_n x_1^n x_3^n - \omega_2 \sum m_n x_2^n x_3^n + \omega_3 \sum m_n [(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2]. \end{aligned} \quad 7(4.3)$$

Koeficienty u složek vektoru úhlové rychlosti mají rozměr shodný s rozměrem momentu setrvačnosti, označíme je

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum m_n [(x_2^n)^2 + (x_3^n)^2], & I_{12} &= I_{21} = - \sum m_n x_1^n x_2^n, \\ I_{22} &= \sum m_n [(x_1^n)^2 + (x_3^n)^2], & I_{13} &= I_{31} = - \sum m_n x_1^n x_3^n, \\ I_{33} &= \sum m_n [(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2], & I_{23} &= I_{32} = - \sum m_n x_2^n x_3^n. \end{aligned} \quad 7(4.4)$$

S právě zavedeným označením můžeme rovnice 7(4.3) přepsat na tvar

$$\begin{aligned} B_1 &= \omega_1 I_{11} + \omega_2 I_{12} + \omega_3 I_{13}, \\ B_2 &= \omega_1 I_{21} + \omega_2 I_{22} + \omega_3 I_{23}, \\ B_3 &= \omega_1 I_{31} + \omega_2 I_{32} + \omega_3 I_{33}. \end{aligned} \quad 7(4.5)$$

Ve složkové symbolice s užitím sumačního pravidla D(2.4) můžeme celou soustavu 7(4.5) vystihnout jednoduchým zápisem

$$B_i = \omega_j I_{ij}. \quad 7(4.6)$$

Z rovnice 7(4.5) nebo z její stručné formy 7(4.6) plyne, že obecně nelze najít konstantu  $k$  takovou, aby platilo  $\mathbf{B} = k\boldsymbol{\omega}$ , tj.  $B_i = k\omega_i$ . Při otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy obecně není celkový moment hybnosti tělesa  $\mathbf{B}$  rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti otáčení  $\boldsymbol{\omega}$ .

Dosadíme-li za  $\mathbf{B}$  výraz 7(4.6) do rovnice 5(2.18), dostáváme

$$\left( \frac{d\omega_j I_{ij}}{dt} \right) = M_i. \quad 7(4.7)$$

Rovnice 7(4.7) formálně poněkud připomíná rovnici 7(3.11). Analogie však nemá hlubší smysl. Rovnice 7(4.7) platí v inerciální soustavě souřadnic. V té se však s časem mění souřadnice jednotlivých bodů otáčejícího se tělesa a koeficienty  $I_{ij}$  dané rovnicí 7(4.4) obecně mění svou velikost s časem. (Moment setrvačnosti vůči pevně dané ose užívaný v předcházejícím článku závisí pouze na vzdálenostech bodů tělesa od osy, což je neproměnná veličina nezávislá na volbě soustavy souřadnic, a proto i moment setrvačnosti je s časem konstantní.) Kromě toho výrazy  $\omega_j I_{ij}$  jsou součtem tří sčítanců. Rovnici 7(4.7) nelze upravit na tvar 7(3.13), který má pohybová rovnice 2(1.4) hmotného bodu i pohybová rovnice 7(3.12) pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy a na který lze upravit větu 5(2.9) o hybnosti soustavy jejím převedením na tvar 5(2.32). Rovnici tvaru 7(3.13) pro otáčení tuhého tělesa kolem bodu napsat nelze. Rozbor pohybu se tím stává značně obtížný.

Rovnici 7(4.2) pro určení momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  nemusíme chápat jen jako rovnici určující  $\mathbf{B}$  v inerciální soustavě souřadnic nebo, jak budeme dále říkat, v soustavě souřadnic pevné v prostoru, ale i jako výraz, kterým můžeme určit



vektor  $\mathbf{B}$  v soustavě souřadnic spjaté s otáčejícím se tělesem. Jedná se o prosté vyjádření vektoru  $\mathbf{B}$  definovaného v inerciální soustavě souřadnic v jiné soustavě souřadnic. Jinak by totiž, vzhledem k tomu, že rychlosti jednotlivých bodů tělesa vůči soustavě pevně spjaté s tělesem musí být nulové, moment hybnosti definovaný vůči soustavě souřadnic spjaté s tělesem neměl smysl. V soustavě souřadnic spjaté s tělesem označíme  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  složky vektoru  $\mathbf{B}$ ,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  složky polohového vektoru  $\mathbf{r}$  a  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  složky vektoru úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}$ . Nahradíme-li v rovnici 7(4.3)  $x_i \rightarrow \xi_i$  a  $\omega_i \rightarrow \Omega_i$ , dostaneme

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \Omega_1 \sum m_n [(\xi_2^n)^2 + (\xi_3^n)^2] - \Omega_2 \sum m_n \xi_1^n \xi_2^n - \Omega_3 \sum m_n \xi_1^n \xi_3^n, \\ \beta_2 &= -\Omega_1 \sum m_n \xi_1^n \xi_2^n + \Omega_2 \sum m_n [(\xi_1^n)^2 + (\xi_3^n)^2] - \Omega_3 \sum m_n \xi_2^n \xi_3^n, \\ \beta_3 &= -\Omega_1 \sum m_n \xi_1^n \xi_3^n + \Omega_2 \sum m_n \xi_2^n \xi_3^n + \Omega_3 \sum m_n [(\xi_1^n)^2 + (\xi_2^n)^2].\end{aligned}\quad 7(4.8)$$

Koeficienty u  $\Omega_i$  označíme nyní  $J_{ij}$ , tedy

$$\begin{aligned}J_{11} &= \sum m_n [(\xi_2^n)^2 + (\xi_3^n)^2], & J_{12} &= J_{21} = -\sum m_n \xi_1^n \xi_2^n, \\ J_{22} &= \sum m_n [(\xi_1^n)^2 + (\xi_3^n)^2], & J_{13} &= J_{31} = -\sum m_n \xi_1^n \xi_3^n, \\ J_{33} &= \sum m_n [(\xi_1^n)^2 + (\xi_2^n)^2], & J_{23} &= J_{32} = -\sum m_n \xi_2^n \xi_3^n.\end{aligned}\quad 7(4.9)$$

Potom rovnice 7(4.8) můžeme stručně zapsat jako

$$\beta_i = \Omega_j J_{ij}. \quad 7(4.10)$$

V soustavě souřadnic spjaté s tělesem (tuhou soustavou hmotných bodů) jsou souřadnice  $\xi_i^n$  ( $n = 1, 2, \dots, N; i, j = 1, 2, 3$ ) s časem stálé, a tedy i koeficienty  $J_{ij}$  na rozdíl od koeficientů  $I_{ij}$  jsou s časem stálé, tj. konstantní, veličiny. Koeficientům  $J_{ij}$  budeme říkat *složky momentu setrvačnosti*. Výraz  $(\xi_2^n)^2 + (\xi_3^n)^2$  je roven čtverci vzdálenosti  ${}^1R^n$   $n$ -tého hmotného bodu od první osy souřadnic. Kdyby se těleso otáčelo kolem první osy souřadnic, která by byla v tělese i prostoru pevná, složka momentu setrvačnosti

$$J_{11} = \sum m_n [(\xi_2^n)^2 + (\xi_3^n)^2] = \sum m_n ({}^1R^n)^2$$

je rovna rovnici 7(3.8) zavedenému momentu setrvačnosti. Obdobný význam mají složky  $J_{22}$  a  $J_{33}$  pro otáčení tělesa kolem druhé a třetí osy souřadnic pevně spjaté s tělesem. Složky se shodnými indexy  $J_{11}, J_{22}, J_{33}$  budeme nazývat *momenty setrvačnosti vůči osám souřadnic* a složky se smíšenými indexy  $J_{12}, J_{13}, J_{23}$  nazveme *deviační momenty*. Přímým výpočtem (viz řeš. úl. č. 5) lze ukázat, že při změně kartézské soustavy souřadnic v tělese, tj. při transformaci souřadnic popsané rovnicemi D(2.3)

$$\xi'_i = a_{ik} \xi_k,$$

složky momentu setrvačnosti v čárkované soustavě souřadnic budou dány výrazy

$$J'_{ij} = a_{ik}a_{jp}J_{kp} . \quad 7(4.11)$$

Složky momentu setrvačnosti 7(4.9) jsou tedy podle definice D(3.3) složkami tenzoru druhého řádu. Jelikož platí relace

$$J_{ij} = J_{ji} , \quad 7(4.12)$$

je to symetrický tenzor. Složky 7(4.9) tvoří symetrický tenzor druhého řádu, pro který budeme užívat název *tenzor momentu setrvačnosti* nebo stručně *tenzor setrvačnosti*.

#### *Eulerovy rovnice*

Převédeme rovnici 5(2.18)  $d\mathbf{B}/dt = \mathbf{M}$  do soustavy souřadnic spjaté s tělesem. Budeme předpokládat, že soustava souřadnic pevná v tělese a soustava souřadnic pevná v prostoru mají společný počátek v bodě, kolem kterého se těleso otáčí. Vektor  $\mathbf{M}$  převedeme do soustavy souřadnic spjaté s tělesem jednoduše tak, že v této soustavě vyjádříme jeho složky; označíme je  $\mu_1, \mu_2$  a  $\mu_3$ . Chceme-li vyjádřit časovou změnu vektoru  $\mathbf{B}$  vůči soustavě souřadnic spjaté s tělesem  $(d\mathbf{B}/dt)_T$ , je vyjádření derivace  $(d\mathbf{B}/dt)_T$  pomocí derivace  $d\mathbf{B}/dt$  vektoru  $\mathbf{B}$  v prostoru obtížnější. Polohový vektor  $\mathbf{r}$  určitého pevného bodu tělesa je v soustavě souřadnic spjaté s tělesem konstantní vektor. Polohový vektor  $\mathbf{r}$  téhož bodu v prostoru se s časem mění. Rychlost bodu  $(d\mathbf{r}/dt)_T$  vůči soustavě souřadnic spjaté s tělesem je nulová. Rychlost bodu  $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)$  vůči soustavě souřadnic pevné v prostoru je dána výrazem 7(1.10)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad 7(1.10)$$

Tedy derivace polohového vektoru  $(d\mathbf{r}/dt)_T$  vůči soustavě souřadnic spjaté s tělesem a derivace téhož vektoru vůči soustavě souřadnic pevné v prostoru  $d\mathbf{r}/dt$  se liší o výraz  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad 7(4.13)$$

U jiných vektorů, např. u vektoru  $\mathbf{B}$ , derivace vektoru vůči tělesu nemusí být nulová. Rozdíl 7(4.13) mezi derivací  $d/dt$  v prostoru a derivací  $(d/dt)_T$  vektoru vůči soustavě spjaté s tělesem však zůstává. Mezi oběma derivacemi platí vztah (viz citované učebnice teoretické mechaniky)

$$(d/dt) - (d/dt)_T = \boldsymbol{\omega} \times . \quad 7(4.14)$$

Speciálně pro vektor celkového momentu hybnosti tělesa  $\mathbf{B}$  můžeme psát

$(d\mathbf{B}/dt) - (d\mathbf{B}/dt)_T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$  a po převedení derivace  $(d\mathbf{B}/dt)_T$  na druhou stranu rovnice máme

$$(d\mathbf{B}/dt) = (d\mathbf{B}/dt)_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} . \quad 7(4.15)$$

Dosadíme-li vyjádření 7(4.15) do 5(2.18), dostáváme vyjádření věty o momentu hybnosti tělesa v soustavě souřadnic pevně spjaté s tělesem

$$(d\mathbf{B}/dt)_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} = \mathbf{M} . \quad 7(4.16)$$

Po rozepsání rovnice 7(4.16) do složek, užijeme-li označení  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  pro složky vektoru  $\mathbf{M}$  v soustavě souřadnic spjaté s tělesem a pro složky ostatních vektorů stejného označení jako v rovnici 7(4.8), dostaneme

$$\begin{aligned} d\beta_1/dt + \Omega_2\beta_3 - \Omega_3\beta_2 &= \mu_1 , \\ d\beta_2/dt + \Omega_3\beta_1 - \Omega_1\beta_3 &= \mu_2 , \\ d\beta_3/dt + \Omega_1\beta_2 - \Omega_2\beta_1 &= \mu_3 , \end{aligned} \quad 7(4.17)$$

Dosadíme-li do rovnice 7(4.17) vyjádření  $\beta_i$  podle 7(4.10), přejdou rovnice 7(4.17) ( $J_{ij}$  jsou konstanty) na tvar

$$\begin{aligned} J_{11}\left(\frac{d\Omega_1}{dt}\right) + J_{12}\left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right) + J_{13}\left(\frac{d\Omega_3}{dt}\right) + \Omega_2\Omega_1J_{31} + \Omega_2\Omega_2J_{32} + \\ + \Omega_2\Omega_3J_{33} - \Omega_3\Omega_1J_{21} - \Omega_3\Omega_2J_{22} - \Omega_3\Omega_3J_{23} = \mu_1 . \end{aligned} \quad 7(4.18)$$

Druhé dvě rovnice systému 7(4.18), které lze získat analogickým způsobem, nevypisujeme. Rovnice 7(4.17), resp. 7(4.18) jsou *Eulerovy rovnice* pro rotaci tuhého tělesa. Tyto rovnice jsou pro stanovení pohybu tuhého tělesa otáčejícího se kolem bodu vhodnější než formálně jednodušší rovnice 7(4.7). V rovnicích 7(4.18) jsou totiž  $J_{ij}$  konstantní veličiny, jejichž hodnoty, při dané volbě soustavy souřadnic v tělese, můžeme stanovit ještě před řešením pohybové úlohy. Těchto šest čísel, tj. šest nezávislých složek symetrického tenzoru setrvačnosti  $J_{11}, J_{22}, J_{33}, J_{12} = J_{21}, J_{13} = J_{31}, J_{23} = J_{32}$ , které v rovnicích 7(4.18) charakterizují vlastnosti tělesa, spočítáme podle definičních rovnic 7(4.9). Při zadaných hodnotách  $\mu_i$  je soustava rovnic 7(4.18) soustavou tří diferenciálních rovnic pro tři neznámé funkce  $\Omega_i(t)$ ; taková soustava je principiálně řešitelná. Soustava rovnic 7(4.18) nemá jednoduchý tvar 7(3.13), přesto však je hledanou úpravou rovnice 5(2.18) na pohybovou rovnici tuhého tělesa, které se otáčí kolem pevného bodu.

Známe-li tenzor setrvačnosti  $J_{ij}$  a vektor úhlové rychlosti otáčení  $\Omega_i$  tělesa, můžeme podle rovnice 7(4.10)  $\beta_i = J_{ij}\Omega_j$  určit složky  $\beta_i$  momentu celkové hybnosti tělesa v soustavě souřadnic spjaté s tělesem. Znalost vektoru  $\Omega_i$  znamená, že známe směr osy otáčení v tělese a rychlost rotace kolem ní. Předpokládejme, že osou rotace proložíme třetí osu soustavy souřadnic spjaté s tělesem, pak

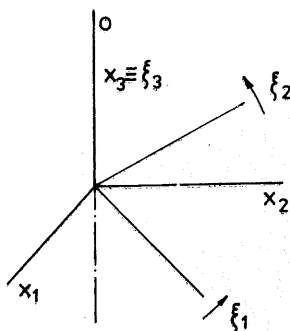
$\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_3 \neq 0$ . Pro složku  $\beta_1$  momentu hybnosti dostáváme podle 7(4.10) obecné vyjádření

$$\beta_1 = \Omega_1 J_{11} + \Omega_2 J_{12} + \Omega_3 J_{13},$$

ze kterého, je-li pouze  $\Omega_3$  nenulové, plyne  $\beta_1 = \Omega_3 J_{13}$ . Obdobně vypočteme složky  $\beta_2$  a  $\beta_3$  momentu hybnosti a dostaneme

$$\beta_1 = \Omega_3 J_{13}, \quad \beta_2 = \Omega_3 J_{23}, \quad \beta_3 = \Omega_3 J_{33}. \quad 7(4.19)$$

Jsou-li nenulové deviační složky tenzoru setrvačnosti  $J_{13}$  a  $J_{23}$ , má celkový moment hybnosti tělesa nejen složku  $\beta_3$  do směru osy otáčení, ale i nenulové složky  $\beta_1$  a  $\beta_2$ . Vektor  $\beta_1$  nemá tedy směr osy otáčení. Je-li osa rotace pevná,



Obr. 7.22 Souřadnicové soustavy –  $\xi_i$  pevná v tělese a  $x_i$  pevná v prostoru – užité k popisu otáčení tělesa kolem společné třetí osy

odpovídá vyšetřovaný případ rotaci tělesa kolem pevné osy, která byla podrobně probírána v minulém článku. Osou rotace  $o$  proložíme také třetí osu  $x_3$  soustavy souřadnic pevné v prostoru (obr. 7.22). To lze, neboť osa rotace je společnou přímkou obou souřadnicových soustav. Moment setrvačnosti definovaný rovnicí 7(3.8) je pak roven jak koeficientu  $I_{33}$  definovanému příslušnou rovnicí ze 7(4.4), tak složce  $J_{33}$  tenzoru setrvačnosti

$$J = I_{33} = J_{33}. \quad 7(4.20)$$

Rovněž složky  $\beta_3$  a  $B_3$  momentu hybnosti se sobě rovnají

$$\beta_3 = B_3. \quad 7(4.21)$$

Zbývající dvě složky  $\beta_1, \beta_2$  a  $B_1, B_2$  se sobě rovnat nemusí, ale je-li některá ze složek  $\beta_1, \beta_2$  nenulová, musí být nenulová alespoň jedna ze složek  $B_1, B_2$ . Znovu vidíme, že celkový moment hybnosti  $\mathbf{B}$  nemá směr osy otáčení, když deviační momenty  $J_{23}$  a  $J_{13}$  jsou nenulové.

Z pohybových rovnic 7(4.18) pro rotaci tuhého tělesa kolem třetí osy ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_3 \neq 0$ ) plyne

$$\begin{aligned} J_{13} \left( \frac{d\Omega_3}{dt} \right) - \Omega_3^2 J_{23} &= \mu_1, \\ J_{23} \left( \frac{d\Omega_3}{dt} \right) - \Omega_3^2 J_{13} &= \mu_2, \\ J_{33} \left( \frac{d\Omega_3}{dt} \right) &= \mu_3. \end{aligned} \quad 7(4.22)$$

Poslední rovnice soustavy 7(4.22) má stejný význam jako rovnice 7(3.12) pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy. Podle rovnice 7(4.20)  $I_{33} = J_{33} = J$  a jelikož třetí osy soustavy souřadnic pevné v prostoru a soustavy souřadnic pevné v tělese splývají, je též  $\Omega_3 = \omega_3 = \omega$  a  $\mu_3 = M_3$ . Složka  $M_3$  výsledného momentu vnějších sil má pro rotaci kolem třetí osy význam momentu  $M^0$  výsledné vnější síly vůči ose. Rozborem prvních dvou rovnic soustavy 7(4.22) objasníme význam deviačních momentů. Jsou-li deviační momenty  $J_{13}$  a  $J_{23}$  nenulové, je i při rovnoměrné rotaci tělesa, tj. když  $(d\Omega_3/dt) = 0$ , nutno na těleso působit nenulovým momentem vnějších sil o složkách  $\mu_1$  a  $\mu_2$ , aby se rotace kolem pevné osy udržela. Podle principu akce a reakce je potom zřejmé, že těleso rotující kolem osy, vůči níž deviační momenty jsou nenulové, působí na upevnění osy v prostoru nenulovým momentem síly o složkách  $-\mu_1$ ,  $-\mu_2$ . V technických aplikacích soustav rotujících kolem pevné osy, např. u kol, se snažíme, aby při rotaci nepřistoupila k tíze tělesa žádná další síla působící na ložiska. Proto volíme za rotační takové osy, vůči kterým jsou deviační momenty nulové a které procházejí hmotným středem tělesa. U automobilových kol se přesné splnění těchto podmínek nastavuje tzv. vyvažováním. Podmínka vedení osy rotace hmotným středem tělesa zaručí, že při roztočení nezačne na osu působit odstředivá síla (soustava spojená s otáčející se soustavou je neinerciální, a proto označení odstředivá síla je správné). Nepokládáme-li osu rotace za osu, která je vazbami udržována v pevné poloze, nenulové hodnoty deviačních momentů v rovnici 7(4.22) způsobí, že osa rotace nebude mít vůči tělesu ani v prostoru stálou polohu. Osa začne tělesem i prostorem putovat, a to i v případě, kdy výsledný moment vnějších sil působících na těleso je nulový. Tento poslední případ podrobněji rozebereme při vyšetřování pohybu volného setrvačníku.

### Hlavní osy setrvačnosti

Zodpovíme nyní otázku, zda jsou v tělese osy, vůči kterým jsou deviační momenty nulové. Najdeme v tělese směry os, pro které při otáčení tělesa moment hybnosti je rovnoběžný s osou otáčení. Pak vektor hybnosti  $\mathbf{B}$  lze psát jako skalární násobek vektoru úhlové rychlosti otáčení  $\omega$ ,  $\mathbf{B} = k\omega$  ( $k$  je

konstanta), což v soustavě souřadnic spjaté s tělesem zapíšeme ve složkovém tvaru

$$\beta_i = J\Omega_i . \quad 7(4.23)$$

V rovnici 7(4.23) jsme konstantu úměrnosti  $k$  označili  $J$ , neboť zřejmě má rozměr momentu setrvačnosti. Dosadíme-li požadovanou vlastnost 7(4.23) vektoru  $\beta_i$  do obecné rovnice 7(4.10), dostáváme

$$J\Omega_i = J_{ij}\Omega_j . \quad 7(4.24)$$

Soustavu rovnic 7(4.24) rozepíšeme a všechny členy převedeme na levé strany rovnic, dostaneme

$$\begin{aligned} (J_{11} - J)\Omega_1 + J_{12}\Omega_2 + J_{13}\Omega_3 &= 0 , \\ J_{21}\Omega_1 + (J_{22} - J)\Omega_2 + J_{23}\Omega_3 &= 0 , \\ J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + (J_{33} - J)\Omega_3 &= 0 . \end{aligned} \quad 7(4.25)$$

Rovnice 7(4.25) tvoří homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé složky  $\Omega_i$  vektoru úhlové rychlosti otáčení. Aby soustava rovnic 7(4.25) měla netriviální řešení, tj. takové řešení, kdy alespoň jedna ze složek  $\Omega_i$  je různá od nuly, je nutné a stačí, aby determinant soustavy byl roven nule (viz např. Rektorys: Přehled užité matematiky), tedy

$$\begin{vmatrix} J_{11} - J , & J_{12} , & J_{13} \\ J_{21} , & J_{22} - J , & J_{23} \\ J_{31} , & J_{32} , & J_{33} - J \end{vmatrix} = 0 . \quad 7(4.26)$$

Rozepíšeme-li determinant v rovnici 7(4.26), získáme kubickou rovnici pro neznámou konstantu  $J$ . Bez důkazu uvedeme, že pro reálné hodnoty  $J_{ij}$  má rovnice 7(4.26) všechny tři kořeny reálné, a tedy pro tři hodnoty konstant, které označíme  $J_1$ ,  $J_2$  a  $J_3$ , lze splnit rovnici 7(4.26). Každé z konstant  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  odpovídá jedno řešení rovnice 7(4.25), tedy jedna trojice složek  $\Omega_i$  vektoru úhlové rychlosti otáčení. Rovnicemi 7(4.25) jsou však vektory  $\Omega_i$  určeny až na libovolnou konstantu, jak se lze přesvědčit přímým dosazením do soustavy rovnic 7(4.25). Je-li  $\Omega_i$  jejím řešením, je řešením také  $k\Omega_i$ , neboť po dosazení do rovnic 7(4.25) lze konstantu  $k$  ve všech rovnicích soustavy zkrátit. Jako charakteristické vektory řešení rovnice 7(4.25) vybereme jednotkové vektory  $v_i$  ve směru vektorů  $\Omega_i$ . Vektory  $v_i$  jsou jednotkovými vektory ve směru hledaných os otáčení. Lze ukázat, že jsou-li všechny konstanty  $J_1$ ,  $J_2$  a  $J_3$  od sebe různé, jsou jim odpovídající vektory  $v_i$  vzájemně kolmé. Podmínku 7(4.23), aby vektory  $\omega$  a  $\mathbf{B}$  byly rovnoběžné, lze tedy splnit alespoň pro jednu trojici vzájemně kolmých vektorů. V libovolném tělese existují pro každý bod nejméně tři tímto

bodem procházející osy takové, že při rotaci kolem nich celkový moment hybnosti tělesa je rovnoběžný s osou otáčení. Tyto osy jsou vzájemně kolmé. Můžeme tedy jimi proložit osy kartézské soustavy souřadnic s počátkem v uvažovaném bodě. Uvažujme, že těleso rotuje kolem jedné z os takto zvolené soustavy souřadnic. Budeme ji pokládat za třetí osu. Jelikož moment hybnosti v uvažované soustavě souřadnic musí být rovnoběžný s osou otáčení, tedy s třetí osou, jsou první a druhá složka momentu hybnosti nulové,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . Z prvních dvou rovnic 7(4.19) potom plyne, že ve zvolené soustavě souřadnic musí být  $J_{13} = J_{23} = 0$ . Napíšeme-li rovnice typu 7(4.19) pro rotaci kolem druhých dvou souřadnicových os a uvědomíme-li si, že při rotaci kolem každé osy uvažované kartézské soustavy souřadnic má moment hybnosti směr osy, dostaneme podmínky  $J_{12} = J_{23} = 0$  rozbořem rotace kolem druhé osy a  $J_{12} = J_{13} = 0$  rozbořem rotace kolem první osy. Proložíme-li osy kartézské soustavy souřadnic těmi směry, ve kterých při rotaci moment hybnosti má směr os otáčení, deviační momenty vymizí. V takové soustavě souřadnic jsou nenulové pouze složky  $J_{11}$ ,  $J_{22}$  a  $J_{33}$  tenzoru setrvačnosti a jeho složky se smíšenými indexy, tj. deviační momenty  $J_{12}$ ,  $J_{13}$  a  $J_{23}$  vymizí. Momenty setrvačnosti vůči osám jsou rovny kořenům rovnice 7(4.26)

$$J_{11} = J_1, \quad J_{22} = J_2, \quad J_{33} = J_3. \quad 7(4.27)$$

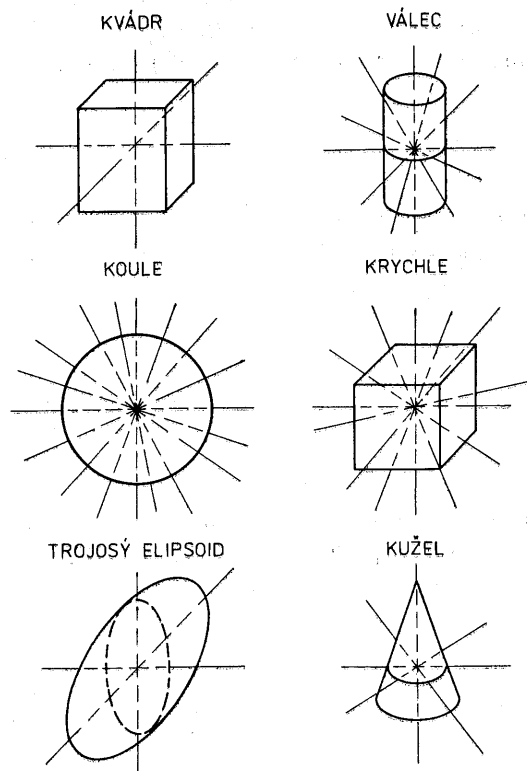
Osám, vůči nimž smíšené (deviační) složky tenzoru setrvačnosti vymizí, říkáme *hlavní osy tenzoru setrvačnosti* a momentům setrvačnosti  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  vůči těmto osám říkáme *hlavní momenty setrvačnosti*. Naznačili jsme, jak lze řešit rovnici 7(4.24). Řešením rovnic tohoto typu, které se označují jako sekulární rovnice, určíme hlavní osy libovolného symetrického tenzoru druhého řádu, nejen tenzoru momentu setrvačnosti. V části D4 matematického dodatku je tento postup nazván diagonalizací tenzoru. Řešení sekulární rovnice je podrobně popsáno např. v knize Brdičkově nebo Goldsteinově, kde jsou objasněna ta tvrzení, která zde byla uvedena bez důkazu (viz doporučená literatura).

Užití hlavních os tenzoru jako kartézské soustavy souřadnic k vyjádření jeho složek bývá výhodné. U řady těles nalezení hlavních os tenzoru setrvačnosti není obtížné. Osa rotační symetrie homogenního (hustota  $\rho = \text{konst}$ ), rotačně symetrického tělesa je hlavní osou setrvačnosti. Jelikož v rotačně symetrickém tělese všechny osy kolmé k ose symetrie a různoběžné s ní jsou identické, momenty setrvačnosti vůči nim jsou stejné a všechny tyto osy jsou hlavními osami setrvačnosti. Kartézskou soustavu souřadnic, ve které deviační momenty vymizí, můžeme tedy v rotačně symetrickém homogenním tělese volit tak, že jednu osu proložíme rotační osou symetrie a směry druhých dvou os volíme v rovině kolmé k rotační ose libovolně. U homogenní koule všechny osy procházející jejím hmotným středem jsou hlavními osami setrvačnosti. Symetrie homogenních těles umožní i v dalších případech najít směr hlavních os tenzoru setrvačnosti bez obtížného řešení sekulární rovnice. Směry hlavních os tenzoru setrvačnosti pro hmotný střed

několika homogenních těles jsou naznačeny na obr. 7.23. V homogenní krychli všechny momenty setrvačnosti vůči osám procházejícím hmotným středem a kolmým ke stěnám krychle jsou zřejmě stejné. Dále ukážeme (viz rov. 7(4.36)), že potom momenty setrvačnosti vůči všem osám procházejícím hmotným středem krychle jsou stejné. Pro homogenní krychli stejně jako pro kouli všechny osy procházející hmotným středem jsou hlavními osami setrvačnosti.

Zvolíme-li soustavu souřadnic pevnou v tělese ve směru hlavních os tenzoru setrvačnosti, deviační momenty jsou nulové a Eulerovy rovnice 7(4.18) se zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned}
 J_1 \left( \frac{d\Omega_1}{dt} \right) + \Omega_2 \Omega_3 (J_3 - J_2) &= \mu_1, \\
 J_2 \left( \frac{d\Omega_2}{dt} \right) + \Omega_3 \Omega_1 (J_1 - J_3) &= \mu_2, \\
 J_3 \left( \frac{d\Omega_3}{dt} \right) + \Omega_1 \Omega_2 (J_2 - J_1) &= \mu_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$



Obr. 7.23 Hlavní osy tenzoru setrvačnosti pro homogenní tělesa jednoduchých tvarů



V rovnicích 7(4.28) jsme momenty setrvačnosti  $J_{11}$ ,  $J_{22}$ ,  $J_{33}$  označili podle 7(4.27)  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ . Rovnice 7(4.28) udávají vyjádření věty 5(2.18) o momentu hybnosti tělesa v soustavě souřadnic zvolené v tělese tak, že osy souřadnic splývají se směry hlavních os tenzoru setrvačnosti.

*Stanovení momentu setrvačnosti  $J$  vůči libovolné ose tělesa*

Ukážeme, jak lze určit moment setrvačnosti  $J$  vůči libovolné ose procházející bodem, pro nějž známe tenzor setrvačnosti. Momentem setrvačnosti  $J$  rozumíme veličinu definovanou rovnicí 7(3.8) a znalost tenzoru setrvačnosti znamená, že známe jeho složky  $J_{ij}$ . Vyjdeme z rovnice 7(3.28)

$$\frac{d(\mathbf{v}\mathbf{B})}{dt} = M^0 \quad 7(3.28)$$

respektive (porovnáním se 7(3.11)) z ní plynoucího vztahu

$$\mathbf{v}\mathbf{B} = J\omega . \quad 7(4.29)$$

Průmět vektoru celkového momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  do osy otáčení je roven součinu momentu setrvačnosti  $J$  a velikosti úhlové rychlosti otáčení tělesa  $\omega$ . Průmět momentu hybnosti do osy otáčení je stejná veličina, ať průmět popisujeme v soustavě souřadnic pevné v prostoru, nebo v soustavě souřadnic pevné v tělese. Platí tedy též

$$v_i \beta_i = J\omega , \quad 7(4.30)$$

kde  $v_i$  jsou nyní složky jednotkového vektoru ve směru osy otáčení v soustavě souřadnic pevné v tělese. Do rovnice 7(4.30) dosadíme vyjádření  $\beta_i$  podle 7(4.10), dostaneme

$$v_i J_{ij} \Omega_j = J\omega . \quad 7(4.31)$$

Při otáčení kolem pevné osy má vektor  $\Omega_j$  směr této osy, tedy

$$\Omega_j = v_j \omega , \quad 7(4.32)$$

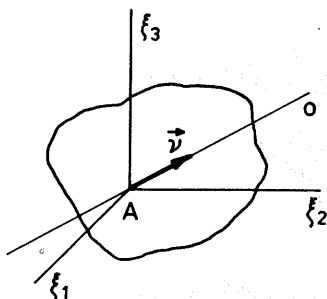
kde  $\omega$  je stejně jako na pravé straně rovnice 7(4.31), úhlová rychlost rotace. Dosadíme-li  $\Omega_j$  vyjádřené podle 7(4.32) do rovnice 7(4.31), dostáváme

$$v_i v_j J_{ij} \omega = J\omega . \quad 7(4.33)$$

Po zkrácení nenulové hodnoty  $\omega$  v rovnici 7(4.33) získáme hledané vyjádření momentu setrvačnosti  $J$  podle složek tenzoru setrvačnosti  $J_{ij}$  (srovnej s D4 – úžení tenzoru)

$$J = v_i v_j J_{ij} . \quad 7(4.34)$$

Podle rovnice 7(4.34) můžeme určit moment setrvačnosti  $J$  tělesa vůči libovolné ose  $o$  procházející bodem, pro který známe tenzor setrvačnosti. Na obr. 7.24 je



Obr. 7.24 Těleso s osou  $o$  procházející bodem  $A$ , směr osy je určen jednotkovým vektorem  $\mathbf{v}$

uvažovaný bod označen  $A$  a je do něj položen počátek soustavy souřadnic, ve které vyjádříme složky tenzoru setrvačnosti  $J_{ij}$ . Směr osy  $o$  je určen jednotkovým vektorem  $\mathbf{v}$  ( $v_1, v_2, v_3$ ). Rozpisem rovnice 7(4.34) dostaneme pro  $J$  vyjádření

$$J = v_1^2 J_{11} + v_2^2 J_{22} + v_3^2 J_{33} + 2v_1 v_2 J_{12} + 2v_1 v_3 J_{13} + 2v_2 v_3 J_{23}. \quad 7(4.35)$$

V rovnici 7(4.35) jsme užili symetrie tenzoru, tj. vztahů  $J_{12} = J_{21}$ ,  $J_{13} = J_{31}$ ,  $J_{23} = J_{32}$ , a pořadí sčítanců jsme oproti sledu naznačenému rovnicí 7(4.34) přeházeli. Užijeme-li k popisu kartézskou soustavu souřadnic s osami v hlavních směrech tenzoru setrvačnosti, zjednoduší se poslední zápis na tvar

$$J = v_1^2 J_1 + v_2^2 J_2 + v_3^2 J_3, \quad 7(4.36)$$

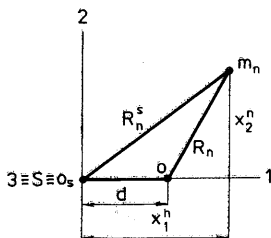
neboť smíšené (deviační) složky tenzoru setrvačnosti v této soustavě souřadnic jsou nulové.

Známe-li tenzor momentu setrvačnosti v jednom bodě tělesa, můžeme vypočítat moment setrvačnosti i vůči osám procházejícím jiným bodem tělesa. Tento závěr je jednoduchým důsledkem *Steinerovy věty*: *Moment setrvačnosti  $J$  tělesa vůči libovolné ose  $o$  je roven součtu momentu setrvačnosti  $J_S$  vůči ose  $o_S$  procházející hmotným středem  $S$  tělesa rovnoběžně s osou  $o$  a součinu hmotnosti tělesa  $M$  se čtvercem vzdálenosti  $d$  obou os*

$$J = J_S + Md^2. \quad 7(4.37)$$

Dokážeme platnost vyslovené věty. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v hmotném středu  $S$  soustavy a třetí osu ve směru osy  $o_S$ . První osu souřadnic zvolíme tak, aby protínala osu  $o$ . Pohled ve směru a proti smyslu třetí

osy souřadnic je na obr. 7.25. V obrázku je znázorněn  $n$ -tý hmotný bod o hmotnosti  $m_n$  tuhé soustavy hmotných bodů reprezentující těleso. Jsou znázorněny



Obr. 7.25 Náčrt k odvození Steinerovy věty

souřadnice  $x_1^n$  a  $x_2^n$  bodu  $m_n$ , vzdálenost  $R_n$  bodu  $m_n$  od osy  $o$  a vzdálenost  $R_n^S$  bodu  $m_n$  od osy  $o_S$ . Zřejmě platí

$$(R_n^S)^2 = (x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 \quad 7(4.38)$$

a

$$R_n^2 = (x_1^n - d)^2 + (x_2^n)^2 = (x_1^n)^2 + (x_2^n)^2 + d^2 - 2x_1^n d. \quad 7(4.39)$$

Podle definiční rovnice 7(3.8) moment setrvačnosti  $J$  tělesa vůči ose  $o$  je dán výrazem  $J = \sum m_n R_n^2$ . Dosadíme-li do tohoto výrazu za  $R_n^2$  dle 7(4.39), dostáváme

$$J = \sum m_n R_n^2 = \sum m_n [(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2] + \sum m_n d^2 - \sum m_n 2x_1^n d. \quad 7(4.40)$$

První člen na pravé straně rovnice 7(4.40) lze s přihlédnutím k rovnici 7(4.38) psát jako  $\sum m_n (R_n^S)^2$ , a je to tedy moment setrvačnosti  $J_S$  tělesa vůči ose  $o_S$

$$\sum m_n [(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2] = J_S. \quad 7(4.41)$$

V druhém členu na pravé straně rovnice 7(4.40) je  $d^2$  konstantní veličina a můžeme ji ze součtu vytknout,  $\sum m_n d^2 = d^2 \sum m_n$ . Jelikož  $\sum m_n$  je celková hmotnost tělesa  $M$ , lze psát

$$\sum m_n d^2 = M d^2. \quad 7(4.42)$$

Třetí člen na pravé straně rovnice 7(4.40)  $\sum m_n 2x_1^n d = 2d \sum m_n x_1^n$ . Výraz  $\sum m_n x_1^n$  je podle 5(1.9) roven první souřadnici  $x_1^S$  hmotného středu tělesa vynásobené hmotností tělesa  $M$ . Počátek soustavy souřadnic, ve které je prováděn výpočet, je však zvolen v hmotném středu soustavy (tělesa), a proto všechny souřadnice hmotného středu jsou nulové, speciálně  $x_1^S = 0$ . Tedy

$$\sum m_n 2x_1^n d = 2d \sum m_n x_1^n = 2x_1^S M d = 0. \quad 7(4.43)$$

Užijeme-li rovnic 7(4.41–3), můžeme moment setrvačnosti  $J$  daný rovnicí 7(4.40) zapsat jako

$$J = J_S + Md^2,$$

což je znění Steinerovy věty 7(4.37).

Známe-li tenzor setrvačnosti pro hmotný střed tělesa, můžeme podle rovnice 7(4.34) určit moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející hmotným středem tělesa. Podle Steinerovy věty můžeme pak najít moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející tělesem. K určení momentu setrvačnosti tělesa vůči libovolné ose stačí znát šest konstant, šest složek  $J_{ij}$  symetrického tenzoru setrvačnosti pro hmotný střed tělesa. Znalost šesti složek tenzoru setrvačnosti lze též nahradit znalostí hlavních momentů setrvačnosti  $J_1, J_2, J_3$  a směrů hlavních os pro hmotný střed, což opět představuje šest údajů.

*Kinetická energie otáčejícího se tělesa.*

Podle Königovy věty 5(3.9) kinetickou energii  $W_k$  soustavy hmotných bodů lze rozložit na člen  $\frac{1}{2}Mv_S^2$  odpovídající pohybu hmotného středu soustavy a na vnitřní kinetickou energii soustavy  $W_{kl} = \frac{1}{2} \sum m_n v_{S,n}^2$ , kde  $v_{S,n}$  je rychlost  $n$ -tého hmotného bodu soustavy vůči hmotnému středu. Pro tuhou soustavu hmotných bodů reprezentující tuhé těleso lze podle 7(1.10)  $v_{S,n}$  vyjádřit jako

$$v_{S,n} = \omega \times r_{S,n}, \quad 7(4.44)$$

kde  $\omega$  je okamžitý vektor úhlové rychlosti otáčení tělesa a  $r_{S,n}$  polohový vektor  $n$ -tého bodu vůči hmotnému středu tělesa. Podle 7(1.17) úhlová rychlost otáčení nezávisí na bodu, vůči kterému ji uvažujeme, a proto otáčení tělesa určené vektorem  $\omega$  můžeme pokládat za otáčení kolem osy procházející hmotným středem tělesa. Směr osy je dán směrem vektoru  $\omega$ . Velikost rychlosti  $v_{S,n}$  je rovna součinu vzdálenosti  $R_n$   $n$ -tého hmotného bodu od uvažované okamžité osy otáčení tělesa a velikosti  $\omega$  úhlové rychlosti otáčení

$$v_{S,n} = R_n \omega. \quad 7(4.45)$$

Vnitřní kinetickou energii tělesa  $W_{kl}$  lze pak upravit

$$W_{kl} = \frac{1}{2} \sum m_n v_{S,n}^2 = \frac{1}{2} \sum m_n R_n^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2. \quad 7(4.46)$$

Při rotaci kolem bodu se okamžitá osa otáčení s časem mění a mění se tedy jak  $J$ , tak  $\omega$ . Chceme-li vnitřní kinetickou energii  $W_{kl}$  mít vyjádřenu pouze v závislosti na změně vektoru úhlové rychlosti, musíme časově proměnné  $J$  vyjádřit podle časově neproměnných složek  $J_{ij}$  tenzoru setrvačnosti pro hmotný střed tělesa. Podle 7(4.34)  $J = v_i v_j J_{ij}$  a dosadíme-li toto vyjádření za  $J$  do 7(4.46), dostáváme

$$W_{kl} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} v_i v_j J_{ij} \omega^2.$$

Čtverec  $\omega^2$  velikosti úhlové rychlosti otáčení je veličina nezávislá na volbě soustavy souřadnic, tedy  $\omega^2 = \omega_i \omega_i = \Omega_i \Omega_i = \Omega^2$ , kde  $\Omega_i$  jsou složky vektoru úhlové rychlosti  $\omega$  v soustavě souřadnic spjaté s tělesem. Veličinu  $W_{\text{kl}}$  můžeme tedy dále upravit

$$W_{\text{kl}} = \frac{1}{2} v_i v_j J_{ij} \omega^2 = \frac{1}{2} v_i v_j J_{ij} \Omega^2 = \frac{1}{2} v_i v_j J_{ij} \Omega \Omega$$

a jelikož podle 7(4.32)  $\Omega_j = v_j \Omega$ , platí

$$W_{\text{kl}} = \frac{1}{2} J_{ij} \Omega_i \Omega_j . \quad 7(4.47)$$

Poslední rovnice je již hledaným vyjádřením *vnitřní kinetické energie*  $W_{\text{kl}}$  pro otáčení tělesa kolem hmotného středu. Zvolíme-li soustavu souřadnic v tělese tak, že její osy splývají se směrem hlavních os tenzoru setrvačnosti, lze výraz 7(4.47) rozepsat na relativně jednoduchý tvar

$$W_{\text{kl}} = \frac{1}{2} J_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \Omega_3^2 . \quad 7(4.48)$$

Stejně jako v rovnici 7(4.36) i zde jsme užili zkráceného označení  $J_1, J_2, J_3$  pro hlavní momenty setrvačnosti.

Je-li hmotný střed tělesa rotujícího kolem bodu v klidu, je energie  $W_{\text{kl}}$  celkovou kinetickou energií tělesa  $W_{\text{k}}$ . Pro těleso, které se otáčí kolem pevné osy, je výraz 7(4.46) celkovou kinetickou energií  $W_{\text{k}}$  tělesa,

$$W_{\text{k}} = \frac{1}{2} J \omega^2 , \quad 7(4.49)$$

přičemž  $J$  je moment setrvačnosti vůči pevné ose otáčení. Když osa otáčení prochází hmotným středem tělesa, plyne výsledek 7(4.49) bezprostředně z Kónigovy věty 5(3.9), neboť rychlost hmotného středu  $v_S = 0$ , a potom  $W_{\text{k}} = W_{\text{kl}}$ . Když se těleso otáčí kolem osy, která neprochází jeho hmotným středem, je celková kinetická energie  $W_{\text{k}}$  tělesa podle 5(3.9) dána součtem

$$W_{\text{k}} = \frac{1}{2} M v_S^2 + W_{\text{kl}} . \quad 7(4.50)$$

Hmotný střed tělesa je jedním z bodů tělesa, a tedy jeho rychlost při otáčení kolem osy je dána výrazem  $v_S = R_S \omega$ , kde  $R_S$  je vzdálenost hmotného středu  $S$  od osy otáčení a  $\omega$  úhlová rychlost otáčení. Potom  $\frac{1}{2} M v_S^2 = \frac{1}{2} M R_S^2 \omega^2$ . Výraz 7(4.46) pro  $W_{\text{k}}$  napíšeme nyní jako  $\frac{1}{2} J_S \omega^2$ , abychom zdůraznili, že moment setrvačnosti uvažovaný pro vnitřní kinetickou energii je momentem setrvačnosti vůči ose procházející hmotným středem tělesa. Výraz 7(4.50) můžeme pak přepsat na tvar

$$W_{\text{k}} = \frac{1}{2} M R_S^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 = \frac{1}{2} (M R_S^2 + J_S) \omega^2 .$$

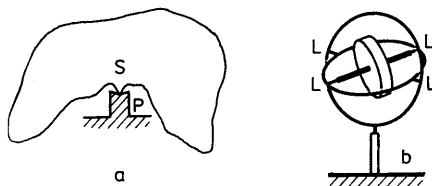
Moment setrvačnosti  $J_S$  je momentem setrvačnosti vůči ose, která prochází hmotným středem tělesa rovnoběžně s pevnou osou otáčení tělesa,  $R_S$  je vzdále-

nost obou os. Podle Steinerovy věty 7(4.37) je výraz  $MR_S^2 + J_S$  roven momentu setrvačnosti  $J$  vůči ose otáčení tělesa, a tedy výraz 7(4.49) je obecným vyjádřením kinetické energie tělesa, které se otáčí kolem pevné osy.

## 7.5 Volný symetrický setrvačnick

Těleso, které se otáčí kolem pevného bodu se nazývá setrvačnickem. Proto, mluvíme-li o vyšetřování pohybu setrvačnicku, myslíme tím studium pohybu tělesa, které se otáčí kolem pevného bodu. Pohybové rovnice takového pohybu jsme odvodili v předcházejícím článku. Jejich řešení je však značně obtížné a v uzavřeném tvaru je lze podat jen v několika málo případech. S jednoduššími řešeními se dále seznámíme.

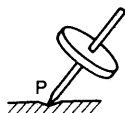
Těleso otáčející se kolem bodu, tj. setrvačnick, může mít buď všechny tři hlavní momenty setrvačnosti  $J_1, J_2, J_3$  navzájem různé, pak se nazývá *asymetrickým setrvačnickem*, nebo mohou dva z hlavních momentů setrvačnosti být stejné, takový setrvačnick nazýváme *symetrickým setrvačnickem*. Jsou-li všechny tři hlavní momenty setrvačnosti stejné, mluvíme o *kulovém setrvačnicku*. Běžný hovorový název „setrvačnick“ užíváme pro rotačně symetrické těleso, které vůči rotační ose má výrazně největší moment setrvačnosti. Takové „setrvačnicky“ známe např. z různých dětských hraček. Hovorový „setrvačnick“ je podle výše uvedené klasifikace zvláštním případem symetrického setrvačnicku. Kulový setrvačnick nemusí mít nutně tvar koule. V předcházejícím článku jsme uvedli (viz též obr. 7.23), že momenty setrvačnosti homogenní krychle vůči všem osám procházejícím hmotným středem jsou stejné. Tedy homogenní krychle otáčející se kolem hmotného středu je kulovým setrvačnickem. Setrvačnicky rozlišujeme též podle sil, které na ně působí. Je-li vnější silové působení nulové, nazýváme *setrvačnick volným* nebo též *bezsilovým*. Setrvačnick pohybující se v tíhovém poli upevněný



Obr. 7.26 Způsoby upevnění volného setrvačnicku: a) podepření v hmotném středě, b) Kardanův závěs

v bodě různém od hmotného středu se nazývá *těžký setrvačnick*. Pro jiná silová působení zvláštní název nezavádíme. V tíhovém poli lze volný setrvačnick realizovat tak, že jej upevníme v hmotném středě  $S$  např. způsobem znázorněným na obr. 7.26a. Tíha setrvačnicku je vyrovnána podložkou  $P$  a jak jsme dříve

odvodili (viz rov. 7(2.17)), výsledný moment vnějších sil působících na těleso je v tíhovém poli vůči hmotnému středu tělesa nulový. Výsledná síla a výsledný moment sil působících na setrvačnick jsou nulové a setrvačnick je tedy volný. Jiný způsob realizace volného setrvačnicku v tíhovém poli je znázorněn na obr. 7.26b.



Obr. 7.27 Těžký symetrický setrvačnick

Symetrický setrvačnick je upevněn v *Kardanově závěsu*. Ten umožňuje libovolné natočení tělesa, přičemž střed kruhů závěsu zůstává pevný. Je-li hmotný střed setrvačnicku ve středu kruhů Kardanova závěsu, může se setrvačnick pohybovat jako volný. Předpokládáme zřejmě, že tření v ložiskách  $L$  Kardanova závěsu pohyb setrvačnicku neovlivňuje. Není-li hmotný střed tělesa v klidu a moment vnějších sil vůči hmotnému středu tělesa je nulový, pohyb tělesa vůči hmotnému středu odpovídá těž pohybu volného setrvačnicku. Podepřeme-li v tíhovém poli otáčející se těleso v jiném bodě než v hmotném středu, získáme těžký setrvačnick. Na obr. 7.27 je znázorněn těžký symetrický setrvačnick podepřený v bodě  $P$ .

Pro pohyb volného setrvačnicku (výsledný moment vnějších sil  $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} = 0$ ) mají Eulerovy rovnice 7(4.28) tvar

$$\begin{aligned} J_1 \left( \frac{d\Omega_1}{dt} \right) + \Omega_2 \Omega_3 (J_3 - J_2) &= 0, \\ J_2 \left( \frac{d\Omega_2}{dt} \right) + \Omega_3 \Omega_1 (J_1 - J_3) &= 0, \\ J_3 \left( \frac{d\Omega_3}{dt} \right) + \Omega_2 \Omega_1 (J_2 - J_1) &= 0. \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

Máme-li kulový setrvačnick, je  $J_1 = J_2 = J_3 = J$  a rovnice 7(5.1) se redukuje na tvar

$$J \left( \frac{d\Omega_1}{dt} \right) = 0, \quad J \left( \frac{d\Omega_2}{dt} \right) = 0, \quad J \left( \frac{d\Omega_3}{dt} \right) = 0. \tag{7.5.2}$$

Z rovnice 7(5.2) plyne, že všechny složky  $\Omega_i$  úhlové rychlosti otáčení jsou s časem konstantní. Osa otáčení volného kulového setrvačnicku má v tělese, tj. v setrvačnicku, stálou polohu a setrvačnick kolem ní rotuje se stálou velikostí úhlové rychlosti. Moment hybnosti  $\beta_i$  je podle 7(4.10)  $\beta_i = \Omega_j J_{ij}$ . Pro kulový

setrvačnick je  $J_{11} = J_{22} = J_{33} = J$  a ostatní složky tenzoru setrvačnosti  $J_{ij}$  jsou nulové, tedy

$$\beta_1 = \Omega_1 J, \quad \beta_2 = \Omega_2 J, \quad \beta_3 = \Omega_3 J. \quad 7(5.3)$$

Z rovnic 7(5.3) plyne, že moment hybnosti  $\mathbf{B}$  je skalárním násobkem vektoru úhlové rychlosti otáčení  $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{B} = J\boldsymbol{\omega}. \quad 7(5.4)$$

Rovnici 7(5.4) jsme odvodili v soustavě souřadnic spjaté s tělesem. Jelikož je to rovnice mezi vektory, je její obsah nezávislý na volbě soustavy souřadnic, platí tedy i v soustavě souřadnic pevné v prostoru. Z věty 5(2.18)  $d\mathbf{B}/dt = \mathbf{M}$  pro volný setrvačnick plyne

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) = 0, \quad 7(5.5)$$

neboť výsledný moment vnějších sil  $\mathbf{M}$  působící na volný setrvačnick je nulový;  $\mathbf{M} = 0$ . Podle rovnice 7(5.5) je moment hybnosti  $\mathbf{B}$  volného setrvačnicku v prostoru s časem konstantní vektor. Uvážíme-li rovnici 7(5.4), je také  $\boldsymbol{\omega}$  konstantní vektor v prostoru. Můžeme shrnout: *Volný kulový setrvačnick rotuje kolem libovolné své osy stálou úhlovou rychlostí, přičemž osa je v prostoru i v tělese po celou dobu pohybu stálá.*

Složitější je *pohyb obecného volného symetrického setrvačnicku*. Budeme předpokládat, že osa rotační symetrie setrvačnicku je třetí osa souřadnic, tedy  $J_3 \neq J_1 = J_2$ . Rovnice 7(5.1) se pro volný symetrický setrvačnick, označíme-li stejné hodnoty  $J_1 = J_2$  symbolem  $J_1$ , zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} J_1 \left(\frac{d\Omega_1}{dt}\right) + \Omega_2 \Omega_3 (J_3 - J_1) &= 0, \\ J_1 \left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right) + \Omega_3 \Omega_1 (J_1 - J_3) &= 0, \\ J_3 \left(\frac{d\Omega_3}{dt}\right) &= 0. \end{aligned} \quad 7(5.6)$$

Z poslední rovnice systému 7(5.6) plyne

$$\Omega_3 = \text{konst.} \quad 7(5.7)$$

Časovou závislost druhých dvou složek  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  vektoru  $\boldsymbol{\Omega}_i$  získáme řešením



soustavy prvních dvou diferenciálních rovnic 7(5.6), které snadno přepíšeme na tvar

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega_1}{dt}\right) + \Omega_2\Omega_3 \frac{J_3 - J_1}{J_1} &= 0, \\ \left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right) - \Omega_1\Omega_3 \frac{J_3 - J_1}{J_1} &= 0. \end{aligned} \quad 7(5.8)$$

Výraz  $\Omega_3(J_3 - J_1)/J_1$  je, přihlídneme-li k 7(5.7), konstantní a má rozměr úhlové rychlosti. Označíme jej  $\Omega$ . Z prvé rovnice 7(5.8) vypočteme  $\Omega_2$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{d\Omega_1}{dt}\right),$$

a tedy

$$\left(\frac{d\Omega_2}{dt}\right) = -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{d^2\Omega_1}{dt^2}\right).$$

Podle poslední rovnice dosadíme za  $d\Omega_2/dt$  do druhé z rovnic 7(5.8) a dostaneme diferenciální rovnici pro hledanou funkci  $\Omega_1 = \Omega_1(t)$

$$\left(\frac{d^2\Omega_1}{dt^2}\right) + \Omega^2\Omega_1 = 0. \quad 7(5.9)$$

Rovnice 7(5.9) je pro určení funkce  $\Omega_1(t)$  diferenciální rovnicí stejného tvaru jako rovnice harmonického kmitu 3(1.11) s úhlovou frekvencí  $\Omega$  pro určení funkce  $x = x(t)$ . Užijeme-li řešení rovnice 3(1.11), můžeme jako řešení rovnice 7(5.9) psát

$$\Omega_1 = A \sin(\Omega t + \alpha). \quad 7(5.10)$$

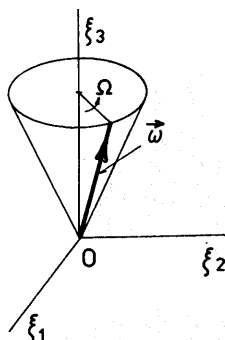
Dosadíme-li řešení 7(5.10) do prvé z rovnic 7(5.8), dostáváme po provedení derivace a drobné úpravě

$$\Omega_2 = -A \cos(\Omega t + \alpha). \quad 7(5.11)$$

Konstanty  $A$  a  $\alpha$  lze určit z počátečních podmínek pohybu, tj. obvykle udáním vektoru  $\omega_0(\Omega_1^0, \Omega_2^0, \Omega_3^0)$  v čase  $t = 0$ .

Rozebereme nejprve obecný případ získaného řešení, kdy všechny tři složky vektoru  $\omega_0$  jsou nenulové. Potom ani jedna ze složek vektoru  $\omega(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  nemůže po celou dobu pohybu být nulová. Položíme-li počátek vektoru  $\omega$  do počátku soustavy souřadnic, tj. do hmotného středu setrvačnicku, lze rovnice 7(5.7), 7(5.10) a 7(5.11) pokládat za parametrické rovnice trajektorie koncového

bodou vektoru  $\omega$  v soustavě souřadnic spjaté s tělesem. Uvažujeme-li ve fyzikálním rozměru úhlové rychlosti, jsou rovnice 7(5.7), 7(5.10) a 7(5.11) parametrickými rovnicemi kružnice o poloměru  $A$  (rozměr  $[A] = \text{s}^{-1}$ ), jež má střed na třetí ose souřadnic  $\xi_3$  a která leží v rovině  $\xi_3 = \Omega_3$ , tj. v rovině kolmé k ose  $\xi_3$



Obr. 7.28 Polhodiový kužel

vzdálené  $\Omega_3$  od počátku soustavy souřadnic. Vektor úhlové rychlosti  $\omega$  opisuje tedy v tělese plášť kužele znázorněného na obr. 7.28. Kužel, který opisuje vektor  $\omega$  v tělese, se nazývá *polhodiový kužel*. Koncový bod vektoru  $\omega$  se otáčí kolem osy  $\xi_3$  úhlovou rychlostí  $\Omega$ , jak plyne z rovnic 7(5.10) a 7(5.11). Úhlová rychlost  $\Omega$  byla zavedena v textu k rovnici 7(5.8) jako

$$\Omega = \Omega_3 \frac{J_3 - J_1}{J_1} \quad 7(5.12)$$

a udává rychlost otáčení, neboli, jak říkáme, precesi vektoru  $\omega$  po polhodiovém kuželi. Úhlovou rychlost  $\Omega$  nazýváme *rychlostí precese osy otáčení v tělese*. Z provedeného rozboru pohybu vektoru  $\omega$  v tělese plyne též, že jeho velikost  $\omega$  je s časem konstantní.

Známe-li tenzor momentu setrvačnosti tělesa a vektor úhlové rychlosti  $\Omega$ , můžeme podle 7(4.10) stanovit složky  $\beta_i$  vektoru celkového momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  v soustavě souřadnic spjaté s tělesem. Vzhledem k volbě soustavy souřadnic ve směru hlavních os setrvačnosti tělesa mají rovnice 7(4.10)  $\beta_i = J_{ij}\Omega_j$  jednoduchý tvar

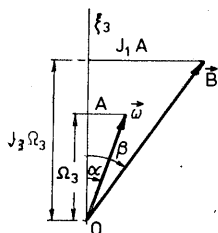
$$\beta_1 = J_1\Omega_1, \quad \beta_2 = J_2\Omega_2, \quad \beta_3 = J_3\Omega_3. \quad 7(5.13)$$

Jelikož setrvačnick je symetrický,  $J_1 = J_2$ , z rovnice 7(5.13) pak plyne, že poměr  $\beta_1/\Omega_1$  je stejný jako poměr  $\beta_2/\Omega_2$ . Geometricky to znamená, že vektory  $\mathbf{B}$  a  $\omega$ , položíme-li jejich počátky do počátku soustavy souřadnic, leží v jedné rovině

s třetí osou souřadnic  $\xi_3$ . Na obr. 7.29 jsou naznačeny polohy vektorů  $\mathbf{B}$  a  $\omega$  ve zmíněné rovině. Konstantní výraz  $(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$  je ve shodě se 7(5.10) a 7(5.11) označen  $A$ . Poměr tangent úhlů  $\beta$  a  $\alpha$  je dán poměrem momentů setrvačnosti  $J_1$  a  $J_3$

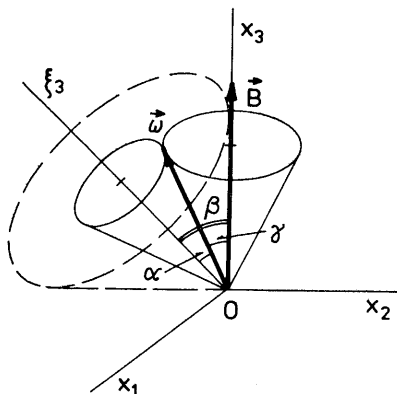
$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{J_1}{J_3}. \quad (7.5.14)$$

Obr. 7.29 odpovídá případu, kdy  $J_1 > J_3$ . Je-li  $J_1 = J_3$ , je setrvačník kulový a zřejmě  $\mathbf{B} \parallel \omega$ . Pro  $J_3 > J_1$  leží vektor  $\mathbf{B}$  blíže k ose než vektor  $\omega$ . Vektor  $\omega$  se otáčí kolem osy  $\xi_3$  úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Mají-li osa  $\xi_3$  a vektory  $\omega$  a  $\mathbf{B}$  stále ležet v jedné rovině, musí se vektor  $\mathbf{B}$  otáčet vůči soustavě pevné v tělese se stejnou úhlovou rychlostí  $\Omega$  jako vektor  $\omega$ . Vektor  $\mathbf{B}$  se v tělese také pohybuje



Obr. 7.29 Osa symetrie  $\xi_3$ , úhlová rychlost otáčení  $\omega$  a moment hybnosti  $\mathbf{B}$  symetrického volného setrvačníku

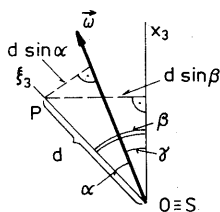
po plášti kužele, který však má obecně jiný vrcholový úhel (viz rov. 7(5.14) a obr. 7.29) než polhodiový kužel. Podle rovnice 7(5.5) je vektor  $\mathbf{B}$  pevným vektorem v prostoru. Na obr. 7.30 je naznačen moment hybnosti  $\mathbf{B}$  jako vektor ve směru třetí osy  $x_3$  soustavy souřadnic pevné v prostoru. Dále je na obrázku naznačen



Obr. 7.30 Odvalování polhodiového a herpolhodiového kužele

kužel pevný v tělese s vrcholovým úhlem  $2\beta$ , jehož osou je osa  $\xi_3$  soustavy souřadnic pevné v tělese. V plášti tohoto kužele musí podle výše provedených úvah ležet vektor  $\mathbf{B}$ . Zřejmě tedy, jak je vidět i z jednoduššího obrázku 7.29, osa  $\xi_3$  musí po celou dobu pohybu volného symetrického setrvačnicku svírat stálý úhel se směrem vektoru  $\mathbf{B}$ , který je pevný v prostoru. Jak rychle se osa  $\xi_3$  kolem osy  $x_3$  v prostoru otáčí, nelze však přímo z provedené úvahy určit. Víme sice, že vektor  $\mathbf{B}$  se otáčí kolem osy  $\xi_3$  úhlovou rychlostí  $\Omega$ , nevíme však, který bod pláště kužele pevného v tělese kdy splývá s osou  $x_3$ , neboť nevíme, jak vypadá klouzání pláště kužele po ose  $x_3$ . Na obr. 7.30 jsou naznačeny další dva kužele, polhodiový kužel a kužel, jehož osa prochází vektorem  $\mathbf{B}$  a jehož vrcholový úhel  $\gamma = \beta - \alpha$ . Tento v prostoru pevný kužel se nazývá *kužel herpolhodiový*. Dokázali jsme již, že osa  $\xi_3$  a vektory  $\omega$  a  $\mathbf{B}$  leží v jedné rovině. Tedy polhodiový a herpolhodiový kužel se dotýkají podél přímky, ve které leží vektor  $\omega$ , tj. podél okamžité osy otáčení setrvačnicku. Okamžitá osa otáčení je přímka v tělese i prostoru pevná. Podél dotykové přímky polhodiového a herpolhodiového kužele nemůže tudíž dojít k podklouzávání, polhodiový a herpolhodiový kužel se po sobě valí bez klouzání. Rychlost rotace  $\omega$  kolem okamžité osy otáčení, tj. rychlost odvalování, je stálá. Úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ , a tím i úhel  $\gamma$ , lze určit, známe-li momenty setračnosti  $J_1$  a  $J_3$  symetrického setrvačnicku a počáteční hodnotu  $\omega_0$  vektoru  $\omega$ . Pohyb volného symetrického setrvačnicku lze názorně popsat odvalováním polhodiového a herpolhodiového kužele.

Určíme dále, jak rychle se otáčí osa  $\xi_3$  setrvačnicku v prostoru, neboli, jak říkáme, určíme *rychlost precese setrvačnicku v prostoru*. Podle rovnice 7(4.44)



Obr. 7.31 Náčrt k odvození rychlosti precese setrvačnicku v prostoru

rychlost libovolného bodu tuhého tělesa vůči hmotnému středu lze určit jako  $\mathbf{v}_{S,n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{S,n}$ . Bodem tuhého tělesa je i libovolný bod osy setrvačnicku, např. bod  $P$  znázorněný na obr. 7.31. Počátek soustavy souřadnic je zvolen v hmotném středu tělesa. Dále budeme u polohového vektoru a u označení rychlosti bodu index  $S$  vynechávat. Souřadnice  $\xi_3$  bodu  $P$  je označena  $d$ . Velikost rychlosti bodu  $P$  je

$$v = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = d \omega \sin \alpha . \quad 7(5.15)$$

Vyjádříme-li rychlost bodu  $P$  jako rychlost rotace kolem v prostoru pevné osy  $x_3$ , můžeme pro její velikost psát vyjádření

$$v = d \Omega_p \sin \beta. \quad 7(5.16)$$

Porovnáním rovnic 7(5.15) a 7(5.16) dostáváme poměr velikosti precesní rychlosti  $\Omega_p$  a úhlové rychlosti otáčení  $\omega$  tělesa

$$\frac{\Omega_p}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad 7(5.17)$$

Zadáním počáteční hodnoty  $\omega_0$  vektoru  $\omega$  v soustavě souřadnic spjaté s tělesem je dán úhel  $\alpha$ , neboť  $\operatorname{tg} \alpha = A/\Omega_3$ , kde  $A = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$ , a tím podle 7(5.14) je dán i úhel  $\beta$ . Rovnicí 7(5.17) je potom určena velikost precesní rychlosti  $\Omega_p$ .

*Shrňme:* Symetrický volný setrvačnick se pohybuje tak, že jeho osa symetrie svírá konstantní úhel se směrem v prostoru pevného vektoru celkového momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  setrvačnicku. Osa symetrie setrvačnicku se otáčí kolem osy proložené vektorem  $\mathbf{B}$  stálou precesní rychlostí  $\Omega_p$ . Setrvačnick přitom rotuje kolem své osy symetrie stálou úhlovou rychlostí  $\Omega_3$ , jež je rovna průmětu úhlové rychlosti otáčení setrvačnicku  $\omega$  do směru osy symetrie setrvačnicku. Uvedený pohyb se nazývá *regulární precese setrvačnicku*. Pro daný volný symetrický setrvačnick (známé  $J_1, J_3$ ) je konkrétní průběh regulární precese určen počáteční hodnotou  $\omega_0$  vektoru  $\omega$ .

Dále odvodíme vztahy mezi velikostmi rychlosti precese  $\Omega$  v tělese, rychlostí precese v prostoru  $\Omega_p$  a rychlostí vlastní rotace setrvačnicku  $\Omega_3$ . Abychom se vyhnuli zdoluhavějším úpravám trigonometrických funkcí, budeme předpokládat, že úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou malé. Jelikož  $\Omega_3$  je třetí složka vektoru  $\omega$  v soustavě souřadnic spjaté se setrvačnickem, zřejmě platí

$$\Omega_3 = \omega \cos \alpha. \quad 7(5.18)$$

Dosadíme-li vztah 7(5.18) do rovnice 7(5.17), dostáváme  $(\Omega_p \cos \alpha)/\Omega_3 = \sin \alpha / \sin \beta \doteq \alpha / \beta$ . Podle 7(5.14)  $J_3/J_1 = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta \doteq \alpha / \beta$ , pro malá  $\alpha \cos \alpha \doteq 1$ , a tedy

$$\frac{\Omega_p}{\Omega_3} \doteq \frac{J_3}{J_1}. \quad 7(5.19)$$

Dosadíme-li do poslední přibližné rovnice za  $\Omega_3$  podle 7(5.12), dostaneme

$$\frac{\Omega_p}{\Omega} \doteq \frac{J_3}{|J_3 - J_1|}. \quad 7(5.20)$$

Jsou-li hodnoty  $J_3$  a  $J_1$  navzájem blízké, je  $\Omega_p \doteq \Omega_3$  a  $\Omega \ll \Omega_p \doteq \Omega_3$ . Precese v prostoru je přibližně stejně rychlá jako rychlost vlastní rotace setrvačnicku

a rychlost precese v tělese  $\Omega$  je velmi malá. Je-li  $J_3 = 2J_1$ , je velikost precesní úhlové rychlosti  $\Omega_p$  dvojnásobkem velikosti rotační rychlosti setrvačnicku  $\Omega_3$  a precesní rychlost v prostoru  $\Omega_p$  je dvojnásobkem precesní rychlosti v tělese  $\Omega$ . Oba uvažované případy se podstatně liší od vztahů, které v příštím článku získáme při vyšetřování pseudoregulární precese těžkého symetrického setrvačnicku. Pro těžký setrvačnick budeme vždy předpokládat, že vlastní rotační rychlost setrvačnicku je podstatně vyšší než úhlová rychlost precese setrvačnicku v prostoru. Rychlost precese v tělese nebudeme uvažovat vůbec.

Nyní probereme zvláštní případy volby počáteční úhlové rychlosti otáčení  $\omega_0(\Omega_1^0, \Omega_2^0, \Omega_3^0)$ . Jsou-li  $\Omega_1^0 = \Omega_2^0 = 0$ ,  $\Omega_3^0 \neq 0$ , pak z rovnic 7(5.10) a 7(5.11) plyne  $A = 0$  a hodnoty  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  jsou nulové po celou dobu pohybu setrvačnicku. Z rovnic 7(5.13) dostáváme  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = J_3\Omega_3$ . V uvažovaném speciálním případě je moment hybnosti  $\mathbf{B}$  rovnoběžný s úhlovou rychlostí  $\omega$ . Osa otáčení má v tělese i prostoru stálý směr a setrvačnick kolem ní rotuje konstantní úhlovou rychlostí  $\omega = \Omega_3$ . Roztočíme-li symetrický setrvačnick kolem jeho osy symetrie, rotace kolem této osy se jak v prostoru, tak v tělese udržuje. Je-li  $\Omega_3^0 = 0$  a alespoň jedno z  $\Omega_1^0$  a  $\Omega_2^0$  různé od nuly, je podle 7(5.7) hodnota  $\Omega_3$  nulová po celou dobu pohybu. Ze 7(5.8) pak dostáváme  $d\Omega_1/dt = 0$  a  $d\Omega_2/dt = 0$ ; složky  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  úhlové rychlosti  $\omega$  mají po celou dobu pohybu stejnou hodnotu jako v čase  $t = 0$ . Osa otáčení má v tělese stálou polohu v rovině kolmé k ose symetrie setrvačnicku. Z rovnice 7(5.13) plyne  $\beta_1 = J_1\Omega_1$ ,  $\beta_2 = J_1\Omega_2$ ,  $\beta_3 = 0$ ; vektory  $\mathbf{B}$  a  $\omega$  jsou rovnoběžné. Těleso se otáčí kolem osy, jejíž poloha v prostoru je stálá. V obou uvažovaných zvláštních případech rotuje symetrický volný setrvačnick kolem hlavních os setrvačnosti procházejících jeho hmotným středem, které v tělese i prostoru zachovávají svůj směr.

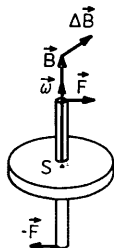
### Volná osa

Osa tělesa, vůči níž může těleso udržovat stálou rotaci, aniž je osa rotace udržována vazbami, se nazývá volná osa. U kulového setrvačnicku všechny osy procházející hmotným středem jsou volné osy. U symetrického setrvačnicku jsou volnými osami osa symetrie a všechny osy k ní kolmé procházející hmotným středem. Vyšetříme stabilitu rotace kolem volných os symetrického setrvačnicku. Mějme setrvačnick rotující kolem volné osy. Osa stálá v tělese i prostoru má směr celkového momentu hybnosti  $\mathbf{B}$ . Chceme-li osu vychýlit, musíme na ni působit nenulovým momentem  $\mathbf{M}$  sil, např. dvojicí sil  $\mathbf{F}$ ,  $-\mathbf{F}$  znázorněnou na obr. 7.32. Směr momentu  $\mathbf{M}$  je kolmý k vektorům  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{F}$ . Podle věty 5(2.18)  $d\mathbf{B}/dt = \mathbf{M}$ . Pro krátkodobé působení můžeme pokládat moment  $\mathbf{M}$  za konstantní a psát

$$\Delta\mathbf{B} = \mathbf{M} \Delta t . \quad (7.5.21)$$

Přírůstek momentu hybnosti  $\Delta\mathbf{B}$  za čas  $\Delta t$  je rovnoběžný s  $\mathbf{M}$ , a tedy kolmý k  $\mathbf{B}$ . Je-li  $\Delta\mathbf{B}$  kolmé k  $\mathbf{B}$ , nemění se v prvním přiblížení velikost vektoru  $\mathbf{B}$ , ale mění

se pouze jeho směr. Podle rovnice 7(4.15)  $d\mathbf{B}/dt = (d\mathbf{B}/dt)_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$ . Před působením momentu síly  $\mathbf{M}$ , tj. na začátku časového intervalu  $\Delta t$ , je  $\boldsymbol{\omega}$  rovnoběžné s  $\mathbf{B}$ , a tedy  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} = 0$ . V uvažovaném přiblížení je pak změna  $\Delta\mathbf{B}$  momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  v prostoru a v tělese stejná. Na konci časového intervalu  $\Delta t$  nový moment hybnosti  $\mathbf{B}_f = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}$  nebude již mít směr volné osy, tj. některé



Obr. 7.32 Stáčení osy setrvačníku působením dvojice sil  $\mathbf{F}$ ,  $-\mathbf{F}$

z hlavních os setrvačnosti tělesa. Osa symetrie setrvačníku po odstranění vnějších působících sil začne konat kolem směru nového momentu hybnosti  $\mathbf{B}_f$  regulární precesi. O impulsu momentu síly  $\mathbf{M} \Delta t$  předpokládáme, že je malý, a tedy i vychýlení okamžité osy otáčení setrvačníku jim způsobené je malé. Nejprve předpokládejme, že setrvačník před aplikací impulsu  $\mathbf{M} \Delta t$  rotoval kolem své osy symetrie. Po aplikaci impulsu  $\mathbf{M} \Delta t$  začne osa symetrie setrvačníku precedovat s malým úhlem  $\beta$  (viz obr. 7.30) vůči směru vektoru  $\mathbf{B}_f$ . Jelikož precesní úhel  $\beta$  a odklon  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{B}_f$  jsou malé, budou se i po aplikaci impulsu  $\mathbf{M} \Delta t$  osa symetrie setrvačníku a okamžitá osa otáčení setrvačníku pohybovat v blízkosti původní osy otáčení setrvačníku. Byla-li hlavní osa, vůči které setrvačník rotoval před aplikací momentu  $\mathbf{M}$ , osa kolmá k ose symetrie setrvačníku, setrvačník také začne konat regulární precesi kolem směru  $\mathbf{B}_f$ . Regulární precesi však koná osa symetrie setrvačníku a ne osa, vůči které setrvačník před aplikací impulsu momentu  $\mathbf{M} \Delta t$  rotoval. Proto v tomto druhém případě aplikace i malého impulsu  $\mathbf{M} \Delta t$  způsobí, že okamžitá osa otáčení setrvačníku se od původní osy otáčení bude v dalším průběhu pohybu značně vzdalovat. Uvedené závěry bývají někdy formulovány tak, že rotace kolem osy symetrie setrvačníku je stabilní, zatímco rotace kolem hlavní osy kolmé k ose symetrie setrvačníku je nestabilní.

Stabilitu rotace symetrického setrvačníku kolem hlavních os vyšetříme ještě z hlediska energie. Při rozboru rovnice 7(5.21) jsme ukázali, že krátkodobé působení momentu síly  $\mathbf{M}$  kolmého k ose otáčení setrvačníku nemění velikost  $B$  celkového momentu hybnosti setrvačníku. Čtverec  $B^2$  velikosti momentu hybnosti na začátku časového intervalu  $\Delta t$ , po který působí moment  $\mathbf{M}$ , je  $J_3^2 \omega^2$ ; na konci intervalu  $\Delta t$  je  $B^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$ . Poslední výraz pro  $B^2$  můžeme upravit podle 7(5.13), 7(5.10) a 7(5.11), dostaneme

$$B^2 = J_1^2 \Omega_1^2 + J_2^2 \Omega_2^2 + J_3^2 \Omega_3^2 = J_1^2 A^2 + J_3^2 \Omega_3^2.$$

Má-li být moment hybnosti zachován, musí platit

$$J_1^2 A^2 + J_3^2 \Omega_3^2 = J_3^2 \omega^2 . \quad 7(5.22)$$

Podle vyjádření 7(4.48) dvojnásobek kinetické energie na začátku intervalu  $\Delta t$  je

$$2W_k = J_3 \omega^2 \quad 7(5.23)$$

a na konci časového intervalu  $\Delta t$  nová hodnota dvojnásobku kinetické energie setrvačnicku je

$$2W_{k,f} = J_1 A^2 + J_3 \Omega_3^2 . \quad 7(5.24)$$

Vynásobíme-li výraz 7(5.23) momentem setrvačnosti  $J_3$ , dostaneme pravou stranu rovnice 7(5.22), vynásobíme-li hodnotou  $J_3$  rovnicí 7(5.24), dostaneme

$$2W_{k,f} J_3 = J_1 J_3 A^2 + J_3^2 \Omega_3^2 . \quad 7(5.25)$$

Výraz 7(5.25) je větší než levá strana rovnice 7(5.22), když  $J_3 > J_1$ , a menší, když  $J_3 < J_1$ , tedy

$$W_{k,f} > W_k \quad \text{pro } J_3 > J_1 \quad 7(5.26)$$

a

$$W_{k,f} < W_k \quad \text{pro } J_3 < J_1 . \quad 7(5.27)$$

Podle věty 5(3.7) (viz též text k rovnici) práce vykonaná vnějšími silami na těleso je rovna přírůstku kinetické energie tělesa. V případě 7(5.26) je tato práce kladná. Abychom vychýlili setrvačnicku z rotace kolem jeho osy symetrie, musíme vynaložit kladnou práci, když moment setrvačnosti kolem osy symetrie  $J_3$  je větší než druhý hlavní moment setrvačnosti  $J_1$ . V případě, kdy  $J_3 > J_1$ , je rotace setrvačnicku kolem jeho osy symetrie z energetického hlediska stabilní. V případě 7(5.27) je práce vykonaná vnějšími silami na vychýlení setrvačnicku záporná, a tedy, když  $J_3 < J_1$ , rotace setrvačnicku kolem jeho osy symetrie je z energetického hlediska labilní. Rotuje-li setrvačnicku kolem volné osy kolmé k ose symetrie setrvačnicku, lze analogicky ukázat, že rotace je stabilní pro  $J_1 = J_2 > J_3$  a labilní pro  $J_1 = J_2 < J_3$ . Z energetického hlediska stabilní rotace symetrického setrvačnicku nastane, když setrvačnicku rotuje kolem hlavní osy, vůči které má největší moment setrvačnosti. Tento závěr bývá demonstrován pokusně. Rotačně symetrické homogenní těleso roztočíme kolem libovolné osy. Vlivem nahodilých vnějších silových impulsů začne po jisté době těleso rotovat kolem volné osy, vůči níž má největší moment setrvačnosti. Např. disk začne rotovat kolem osy rotační symetrie, podlouhlý úzký váleček kolem osy kolmé k ose rotační symetrie. Demonstrační pokusy uvedeného typu bývají označovány jako pokusy na volnou osu těles.

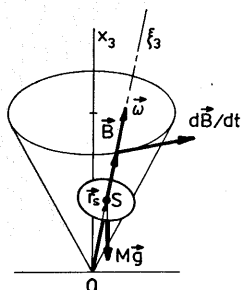


Rovnice 7(5.1) jsou řešitelné i pro *asymetrický volný setrvačnick*, tj. pro setrvačnick, který má všechny tři hlavní momenty setrvačnosti  $J_1, J_2, J_3$  vzájemně různé. Řešení lze nalézt v citovaných učebnicích teoretické mechaniky.

Všechny pohyby volných setrvačnicků jsou pohyby tuhého tělesa, pro něž výslednice vnějších sil a výsledný moment vnějších sil působících na těleso jsou nulové. Takové těleso je v rovnováze. Hmotný střed tělesa, které je v rovnováze, může být v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, jak jsme uvedli v čl. 7.2. Kolem hmotného středu může těleso, které je v rovnováze, konat některý z pohybů popsaných v tomto článku. Má-li tenzor momentu setrvačnosti tělesa pro hmotný střed všechny tři hlavní momenty setrvačnosti vzájemně různé, může to být i zde podrobně nepopsaný pohyb asymetrického setrvačnicku. Tedy i když jsou splněny podmínky rovnováhy, může těleso, které nebylo původně v klidu, konat značně složité pohyby.

## 7.6 Těžký symetrický setrvačnick

V předcházejícím článku jsme zavedli název těžký setrvačnick pro těleso otáčející se v tíhovém poli kolem bodu, který není hmotným středem tělesa. Přehled případů, kdy lze podat přesné řešení pohybu těžkého setrvačnicku, je podán v citované knize Trkalově. Nejčastěji je uvažován pohyb těžkého symetrického setrvačnicku, jehož pevný bod leží na ose symetrie setrvačnicku. Přesné řešení lze nalézt v citovaných učebnicích teoretické mechaniky; zde se omezíme na přibližné řešení. Budeme předpokládat, že setrvačnick se velmi rychle otáčí kolem své osy symetrie. Druhým předpokladem přibližného řešení bude, že moment setrvačnosti  $J_3$  vůči ose symetrie je podstatně větší než druhý hlavní moment



Obr. 7.33 Pohyb těžkého symetrického setrvačnicku

$J_1 = J_2$  setrvačnicku. V minulém článku jsme ukázali, že osa otáčení volného setrvačnicku, který se otáčí kolem některé ze svých hlavních os setrvačnosti, zachovává v tělese i v prostoru svou polohu. Dále jsme ukázali (viz rov. 7(5.26)), že pro symetrický setrvačnick za předpokladu  $J_3 > J_1$  je rotace kolem osy

symetrie setrvačnicku energeticky stabilní. Při rychlém otáčení je stabilita natolik velká, že v dobrém přiblížení lze pokládat osu symetrie setrvačnicku za v tělese pevnou osu otáčení, i když na setrvačnick působí ne příliš velký moment vnějších sil.

Na obr. 7.33 je znázorněn těžký symetrický setrvačnick s podepřeným bodem na ose symetrie setrvačnicku. Pro rychle se otáčející setrvačnick můžeme moment tíhových sil působící na těleso pokládat za ne příliš velký moment vnějších sil. Potom podle učiněných předpokladů moment hybnosti  $\mathbf{B}$  a úhlová rychlost otáčení  $\omega$  mají směr osy symetrie setrvačnicku, kterou jako třetí osu soustavy souřadnic spjaté se setrvačnickem značíme  $\xi_3$ . Podle věty 5(2.18) je

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{M} . \quad 7(6.1)$$

Jak jsme ukázali v čl. 7.2, silové působení na těleso v tíhovém poli lze vystihnout tíhou  $M\mathbf{g}$  tělesa umístěnou v jeho hmotném středu  $S$ , tedy výsledný moment vnějších sil působících na uvažovaný setrvačnick

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_S \times M\mathbf{g} . \quad 7(6.2)$$

V rovnici 7(6.2) je  $\mathbf{r}_S$  označen polohový vektor hmotného středu setrvačnicku. Počátek soustavy souřadnic pevné v prostoru i soustavy souřadnic pevné v tělese pokládáme do pevného bodu setrvačnicku. Dosadíme-li za  $\mathbf{M}$  výraz 7(6.2) do 7(6.1), dostaneme

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{r}_S \times M\mathbf{g} . \quad 7(6.3)$$

Podle rovnice 7(6.3) je  $d\mathbf{B}/dt$  kolmé k  $\mathbf{r}_S$  a k  $M\mathbf{g}$ . Uvážíme-li, že  $\mathbf{B}$  je rovnoběžné s  $\mathbf{r}_S$ , je časová změna  $d\mathbf{B}/dt$  kolmá též k celkovému momentu hybnosti setrvačnicku. Jak jsme již uvažovali při rozboru rovnice 7(5.21), i zde časová změna  $\mathbf{B}$  je kolmá k  $\mathbf{B}$ , a tedy velikost  $B$  momentu hybnosti zůstává zachována, s časem se mění pouze směr vektoru  $\mathbf{B}$ . Má-li  $d\mathbf{B}/dt$  být kolmé k  $\mathbf{B}$  a také k  $M\mathbf{g}$ , musí se  $\mathbf{B}$  pohybovat po plášti kužele naznačeného na obr. 7.33. Vzájemný vztah vektoru  $\mathbf{B}$  a  $d\mathbf{B}/dt$  je stejného druhu jako vzájemný vztah vektoru  $\mathbf{r}$  a  $d\mathbf{r}/dt$  při otáčení bodu kolem osy. Při otáčení kolem osy jsme vztah vektoru rychlosti  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  a polohového vektoru  $\mathbf{r}$  bodu vyjádřili podle 7(1.10) (viz též obr. 7.3) jako

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} . \quad 7(6.4)$$

V rovnici 7(6.4) je  $\omega$  vektor úhlové rychlosti otáčení hmotného bodu, tj. vektor ve směru osy, kolem které se bod otáčí (pozor na formální shodu s označením

$\omega$  vektoru okamžité rychlosti otáčení setrvačnicku). Analogicky k rovnici 7(6.4) můžeme pro rychlost změny  $d\mathbf{B}/dt$  vektoru  $\mathbf{B}$  psát vyjádření

$$d\mathbf{B}/dt = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{B} , \quad 7(6.5)$$

kde  $\boldsymbol{\Omega}_p$  je vektor ve směru vswlé osy  $x_3$  naznačené na obr. 7.33. Velikost  $\Omega_p$  vektoru  $\boldsymbol{\Omega}_p$  je rovna úhlové rychlosti otáčení koncového bodu vektoru  $\mathbf{B}$ , a tedy i celého vektoru  $\mathbf{B}$ , vůči ose  $x_3$ . Porovnáním rovnic 7(6.3) a 7(6.5) dostáváme

$$r_s \times M\mathbf{g} = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{B} . \quad 7(6.6)$$

Vektory  $r_s$  a  $\mathbf{B}$  jsou souhlasné a vektory  $M\mathbf{g}$  a  $\boldsymbol{\Omega}_p$  nesouhlasně rovnoběžné (viz obr. 7.34). Rovnají-li se vektory na obou stranách rovnice 7(6.6), rovnají se i jejich velikosti, tedy

$$r_s M g \sin \beta = \Omega_p B \sin \alpha .$$

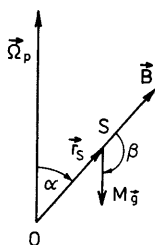
Uvědomíme-li si (viz obr. 7.34), že  $\beta = \pi - \alpha$ , potom  $\sin \beta = \sin \alpha$  a z poslední rovnice plyne vyjádření pro velikost  $\Omega_p$  vektoru  $\boldsymbol{\Omega}_p$

$$\Omega_p = \frac{r_s M g}{B} . \quad 7(6.7)$$

Vektor  $\mathbf{B}$  se otáčí kolem vswlé osy  $x_3$  úhlovou rychlostí  $\Omega_p$  danou rovnicí 7(6.7). Podle předpokladu o stabilitě rotace je vektor  $\mathbf{B}$  rovnoběžný s osou symetrie  $\xi_3$  setrvačnicku. V uvažovaném přiblížení můžeme nyní popsat pohyb těžkého symetrického setrvačnicku s pevným bodem na ose symetrie: *Osa symetrie setrvačnicku se otáčí kolem vswlé přímky proložené pevným bodem setrvačnicku úhlovou precesní rychlostí*

$$\Omega_p = r_s \frac{Mg}{J_3 \omega} . \quad 7(6.8)$$

Jednotlivé polohy osy symetrie setrvačnicku vytváří plášť kužele s vrcholem v pevném bodě setrvačnicku a vswlou osou (viz obr. 7.33). V rovnici 7(6.8) je  $r_s$  vzdále-



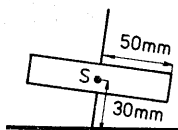
Obr. 7.34 Náčrt k odvození rychlosti precese těžkého setrvačnicku

nost hmotného středu setrvačnicku od pevného bodu,  $M$  hmotnost setrvačnicku,  $g$  tíhové zrychlení,  $J_3$  moment setrvačnosti vůči ose symetrie setrvačnicku a  $\omega$  úhlová rychlost otáčení setrvačnicku kolem jeho osy symetrie. V rovnici 7(6.8) jsme  $B$  z rovnice 7(6.7) nahradili výrazem  $J_3\omega$ , neboť předpokládáme, že  $\mathbf{B}$  je rovnoběžné s  $\omega$  a má směr osy symetrie  $\xi_3$ .

Rovnice 7(6.8) udává rychlost  $\Omega_p$  *precese těžkého symetrického setrvačnicku* v prostoru. Vidíme, že pro daný setrvačnick a způsob upevnění je precesní rychlost nepřímo úměrná rychlosti  $\omega$  otáčení setrvačnicku kolem své osy. Začne-li se setrvačnick brzdít,  $\omega$  klesá a rychlost precese  $\Omega_p$  stoupá. Při větším zbrzdění nemůžeme již pokládat osu otáčení setrvačnicku za osu pevnou v tělese, předpoklady učiněné při odvození precesního pohybu přestanou platit, setrvačnick se začne pohybovat složitějším pohybem, při kterém jeho osa začne periodicky měnit svou výšku v tíhovém poli a nakonec setrvačnick spadne. Naznačíme, jak se liší přesné řešení pohybu těžkého symetrického setrvačnicku od výše uvedeného přibližného řešení. V minulém článku při rozboru stability rotace jsme ukázali, že působením momentu síly na osu otáčení setrvačnicku se poloha osy otáčení v setrvačnicku mění. Začne-li na symetrický setrvačnick roztočený kolem své osy symetrie působit moment síly, např. moment 7(6.2) tíhy setrvačnicku  $\mathbf{r}_S \times M\mathbf{g}$ , osa otáčení přestane mít směr osy symetrie setrvačnicku. Směr osy symetrie setrvačnicku  $\xi_3$  se odchýlí od směru momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  a od směru vektoru okamžité rychlosti otáčení  $\omega$  setrvačnicku. Osa symetrie setrvačnicku se začne otáčet kolem směru momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  způsobem popsaným v minulém článku při výkladu regulární precese volného setrvačnicku. Precesní pohyb osy  $\xi_3$  kolem směru  $\mathbf{B}$  bývá označován jako *nutace* osy setrvačnicku. Celkový pohyb osy symetrie setrvačnicku vznikne spojením nutace kolem směru  $\mathbf{B}$  a precese momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  po kuželi naznačeném na obr. 7.33. Myslíme-li si na ose setrvačnicku bod různý od pevného bodu setrvačnicku, kreslí tento bod na kulové ploše křivku analogickou cykloidě. Pohyb těžkého symetrického setrvačnicku, který se nutací osy setrvačnicku liší od čisté precese, se nazývá *pseudoregulární precese*. Za předpokladů učiněných na začátku tohoto článku (rychlá rotace a  $J_3 \gg J_1$ ) je odchýlení osy otáčení setrvačnicku od osy symetrie setrvačnicku způsobené momentem tíhových sil malé. Nutaci osy setrvačnicku lze pak zanedbat a pohyb těžkého symetrického setrvačnicku můžeme pokládat za čistou precesi.

Za míru pro posouzení, jak velkou odchylku od čisté precese způsobí moment tíhových sil 7(6.2)  $\mathbf{r}_S \times M\mathbf{g}$ , může přibližně sloužit poměr kinetické energie  $W_k$  setrvačnicku a potenciální energie  $W_p$  setrvačnicku v tíhovém poli. Položíme-li nulovou hladinu potenciální energie do pevného bodu  $O$  setrvačnicku, je podle obr. 7.34 potenciální energie setrvačnicku  $W_p = Mgr_S \cos \alpha$ . Kinetickou energii setrvačnicku lze v dobrém přiblížení (viz 7(4.46)) vyjádřit jako  $W_k = \frac{1}{2} J_3 \omega^2$ . Mějme setrvačnick válcového tvaru, jehož rozměry jsou znázorněny na obr. 7.35 a který má hmotnost  $M = 1$  kg. Moment setrvačnosti vůči ose symetrie

$J_3 = \frac{1}{2} MR^2 = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ . Předpokládáme-li, že velikost úhlové rychlosti otáčení setrvačníku  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ , je kinetická energie setrvačníku  $W_k = \frac{1}{2} J_3 \omega^2 = 6,25 \text{ J}$ . Uvažujeme-li největší hodnotu potenciální energie ( $\cos \alpha = 1$ ) setrvačníku, dostaneme  $W_p = Mgr_S \doteq 3 \cdot 10^{-1} \text{ J}$ . Kinetická



Obr. 7.35 Válcový setrvačník užitý k odhadu poměru potenciální a kinetické energie

energie  $W_k$ , i při ne příliš rychlé rotaci, je podstatně větší než potenciální energie  $W_p$ . Poměr kinetické a potenciální energie určuje též poměr precesní rychlosti  $\Omega_p$  a rychlosti vlastní rotace  $\omega$  těžkého symetrického setrvačníku. Vydělíme-li rovnici 7(6.8) hodnotou  $\omega$ , dostaneme

$$\frac{\Omega_p}{\omega} = r_S \frac{Mg}{J_3 \omega^2}. \quad 7(6.9)$$

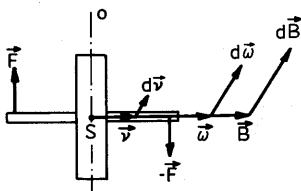
V čitateli na pravé straně rovnice 7(6.9) je hodnota, kterou jsme brali jako míru potenciální energie setrvačníku, a ve jmenovateli je dvojnásobná hodnota kinetické energie setrvačníku. Kinetická energie  $W_k$  musí být podstatně vyšší než potenciální energie  $W_p$ , abychom pohyb těžkého symetrického setrvačníku mohli pokládat za čistou precesi. Z rovnice 7(6.9) plyne, že pro  $W_k \gg W_p$  je

$$\omega \gg \Omega_p. \quad 7(6.10)$$

Čistá precese těžkého symetrického setrvačníku, pro nějž  $J_3 > J_1$ , je přibližné vyjádření pohybu, který setrvačník koná, je-li rychle roztočen kolem své osy symetrie  $\xi_3$ . Přitom podle 7(6.10) vlastní rotace setrvačníku je podstatně rychlejší než precesní rychlost  $\Omega_p$ . Regulární precese volného symetrického setrvačníku popsaná v minulém článku je pohybem, který volný symetrický setrvačník koná, je-li roztočen libovolnou rychlostí kolem některé své osy, která není hlavní osou setrvačnosti. Přitom žádná nerovnost typu 7(6.10) neplatí, rychlost rotace kolem osy symetrie volného setrvačníku často bývá i menší než precesní úhlová rychlost  $\Omega_p$ , jak plyne z rovnice 7(5.19).

Zdůrazníme charakteristický rys pohybu setrvačnicků, o kterém jsme se již zmínili při vyšetřování stability rotace kolem hlavních os setrvačnosti (viz obr. 7.32) a při rozboru rovnice 7(6.3). Mějme symetrický setrvačník, jehož moment setrvačnosti  $J_3$  vůči ose symetrie je větší než druhý hlavní moment setrvačnosti  $J_1$ , tedy hovorový „setrvačník“. Roztočíme jej rychle kolem osy symetrie a začneme na něj působit dvojicí sil  $F, -F$ , které jsou kolmé k ose

symetrie setrvačníku. Moment  $\mathbf{M}$  sil  $\mathbf{F}$  je kolmý k rovnoběžným silám  $\mathbf{F}$ ,  $-\mathbf{F}$ . Podle rovnice 7(6.1)  $d\mathbf{B}/dt = \mathbf{M}$ , a tedy změna celkového momentu hybnosti  $\mathbf{B}$  je též kolmá ke směru působících sil. Jelikož předpokládáme stabilitu rotace kolem osy symetrie setrvačníku, zůstávají vektor  $\mathbf{B}$ , vektor úhlové rychlosti



Obr. 7.36 Gyroskopický efekt

otáčení setrvačníku  $\omega$  a směr osy symetrie setrvačníku rovnoběžné i při působení sil  $\mathbf{F}$ ,  $-\mathbf{F}$ . Kolmá ke směru sil  $\mathbf{F}$ ,  $-\mathbf{F}$  je tedy nejen změna  $d\mathbf{B}$  vektoru  $\mathbf{B}$ , ale i změna  $d\omega$  vektoru  $\omega$  a změna  $d\mathbf{v}$  směru  $\mathbf{v}$  osy symetrie setrvačníku v prostoru. Pohyb setrvačníku vyvolaný dvojicí sil  $\mathbf{F}$ ,  $-\mathbf{F}$  je znázorněn na obr. 7.36. Písmenem  $o$  je označena osa, kolem které se osa symetrie setrvačníku začne otáčet. Takto lze vysvětlit podivné chování „setrvačnicků“: začneme-li převracet „setrvačnick“, např. rychle se otáčející kolo, které držíme za jeho osu (mezi osou a kolem jsou ložiska), necítíme odpor proti směru našeho silového působení, ale osa kola se nám snaží vykouznout kolmo na směr, ve kterém na ni rukama působíme. Uvažovaný efekt, říká se mu *gyroskopický* (gyroskop je mezinárodní název pro hovorový „setrvačnick“), je třeba brát v úvahu při konstrukcích strojů, ve kterých jsou rychle se otáčející součásti s velkým momentem setrvačnosti, např. v jednomotorovém letadle rotující vrtule zvedá nebo stlačuje špičku letadla podle vzájemného poměru smyslu rotace a směru zatáčky. Obdobné problémy nastávají při konstruování lodí a automobilů.

Stabilita rotace „setrvačnicků“ kolem jejich osy symetrie bývá technicky využívána. Rychle roztočený „setrvačnick“ poháněný elektromotorem slouží jako přístroj zvaný umělý horizont k určování polohy letadla při létání za snížené viditelnosti. Stabilita rotujících kol umožňuje jízdu na kole a motocyklu. Střely se roztáčejí v hlavních zbraních, aby po dobu letu lépe zachovávaly směr své osy v prostoru. Do osobních námořních lodí se montují velké „setrvačnick“, aby udržovaly polohu lodí při vlnobití. Poněkud jiný je princip přístroje zvaného gyrokompas, kterým bývá nahrazován klasický magnetický kompas. Přestože výklad pohybu gyrokompasu, tj. rychle se otáčejícího „setrvačnick“, jehož osa se smí pohybovat pouze v horizontální rovině, vyžaduje započtení precesního pohybu, výsledek je jednoduchý: gyrokompas rotuje stále kolem osy rovnoběžné s osou rotace Země a určuje tak směr poledníku.

## Řešené úlohy

1. Vypočítejte hlavní momenty setrvačnosti vůči osám procházejícím hmotným středem homogenních (hustota  $\rho = \text{konst}$ ) těles: a) kvádrů a tyče, b) válce, c) koule a elipsoidu. (Srovnej s obr. 7.23.)

Řešení. Ve všech případech budeme k výpočtu užívat rovnici 7(3.9), kterou pro homogenní těleso lze upravit na tvar

$$J = \rho \int_V R^2 dV. \quad (1)$$

a) Pro výpočet momentů setrvačnosti *kvádrů* uijeme kartézskou soustavu souřadnic s osami rovnoběžnými s hranami kvádrů,  $x \parallel a$ ,  $y \parallel b$ ,  $z \parallel c$  a s počátkem v hmotném středu kvádrů. Pro moment setrvačnosti  $J_z$  vůči ose  $z$  plyne z (1)

$$J_z = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV. \quad (2)$$

Platí

$$\int_V x^2 dV = \int_{-(c/2)}^{+(c/2)} \int_{-(b/2)}^{+(b/2)} \int_{-(a/2)}^{+(a/2)} x^2 dx dy dz = cb \frac{2}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{Va^2}{12}$$

a analogicky

$$\int_V y^2 dV = \frac{Vb^2}{12}.$$

Po dosazení do (2), uvědomíme-li si, že hustota  $\rho$  vynásobená objemem  $V$  dá hmotnost tělesa  $M$ , dostaneme

$$J_z = M(a^2 + b^2)/12. \quad (3)$$

Cyklickou záměnou lze získat vyjádření pro další dva hlavní momenty setrvačnosti  $J_x$  a  $J_y$ .

Limitním postupem plyne z (3) výraz pro moment setrvačnosti *tyče* délky  $l$  vůči ose procházející jejím středem kolmo k délce

$$J_t = Ml^2/12. \quad (4)$$

b) Pro výpočet hlavních momentů setrvačnosti *válce* o poloměru  $r$  a výšce  $v$  uijeme cylindrické soustavy souřadnic D(1.22) s počátkem v hmotném středu válce. Osu  $z$  proložíme osou rotační symetrie válce a polární souřadnici

(v D(1.22)  $\rho$ ) označíme  $u$ . Pro hlavní moment setrvačnosti  $J_z$  vůči ose válce pak  $z$  (1) s uvážením vztahů  $u = R$  a (viz D(1.33))

$$dV = u \, du \, d\varphi \, dz \quad (5)$$

dostaneme

$$J_z = \rho \int_{-(v/2)}^{+(v/2)} \int_0^{2\pi} \int_0^r u^2 u \, du \, d\varphi \, dz = \frac{\pi \rho v r^4}{2}.$$

Tedy

$$J_z = \frac{M r^2}{2}. \quad (6)$$

Hlavními momenty setrvačnosti jsou též momenty setrvačnosti vůči osám kolmým k ose rotační symetrie. Vůči všem osám procházejícím jedním bodem osy symetrie jsou tyto momenty stejné. Je-li bodem osy symetrie hmotný střed tělesa, označíme tento moment setrvačnosti  $J_k$  a vypočteme jej. Pro vzdálenost  $R$  uvažovanou v rovnici (1) nyní dostáváme vztah

$$R^2 = z^2 + u^2 \sin^2 \varphi, \quad (7)$$

když úhel počítáme vůči ose, pro kterou hledáme  $J_k$ .

Potom

$$J_k = \rho \int_V (z^2 + u^2 \sin^2 \varphi) \, dV. \quad (8)$$

Analogicky jako v a)

$$\int_V z^2 \, dV = \frac{V v^2}{12}$$

a

$$\int_V u^2 \sin^2 \varphi \, dV = \int_{-(v/2)}^{+(v/2)} \int_0^{2\pi} \int_0^r u^2 \sin^2 \varphi \, u \, du \, d\varphi \, dz = \frac{V r^2}{4}.$$

(Při poslední úpravě jsme užili vztah  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \pi$ .) Po dosazení do (8) dostáváme konečně vyjádření

$$J_k = \frac{M}{4} \left( r^2 + \frac{v^2}{3} \right). \quad (9)$$



c) Hlavní osy setrvačnosti homogenního *elipsoidu* pro hmotný střed jsou totožné s osami elipsoidu  $a, b, c$ . Proložíme jimi kartézskou soustavu souřadnic  $x, y, z$ . Pro moment setrvačnosti  $J_c$  vůči ose  $z$  ( $c$  osa elipsoidu) z (1) dostáváme

$$J_c = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV. \quad (10)$$

Vypočteme nejprve  $\int_V x^2 dV$ ; upravíme jej

$$\int_V x^2 dV = 2 \int_0^a S(x) x^2 dx. \quad (11)$$

V rovnici (11)  $S(x)$  je velikost plochy kolmé k ose  $x$  v místě o souřadnici  $x$ . Tato plocha je eliptická, její osy v místě  $x$  označíme  $b_x$  a  $c_x$

$$S(x) = \pi b_x c_x. \quad (12)$$

Elipsoid má rovnici  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ . Osa  $b_x$  leží v rovině  $z = 0$ . Potom z rovnice  $x^2/a^2 + b_x^2/b^2 = 1$  plyne

$$b_x^2 = b^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad (13)$$

a analogicky

$$c_x^2 = c^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2}. \quad (14)$$

Po dosazení (13) a (14) do (12) dostáváme

$$S(x) = \pi bc \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad (15)$$

a po dosazení (15) do (11)

$$\int_V x^2 dV = \frac{2\pi bc}{a^2} \int_0^a x^2 (a^2 - x^2) dx = \frac{Va^2}{5}. \quad (16)$$

Analogicky

$$\int_V y^2 dV = \frac{Vb^2}{5} \quad (17)$$

a po dosazení posledních dvou rovnic do (10) dostáváme konečné vyjádření pro moment setrvačnosti elipsoidu vůči své ose  $c$

$$J_c = M \frac{a^2 + b^2}{5}. \quad (18)$$

Cyklickou záměnou lze dostat zbývající hlavní momenty setrvačnosti elipsoidu  $J_a$  a  $J_b$ .

Koule je zvláštní případ elipsoidu pro  $a = b = c = r$ . Pro všechny osy procházející hmotným středem koule o poloměru  $r$  je moment setrvačnosti

$$J_0 = \frac{2Mr^2}{5}. \quad (19)$$

2. Stanovte pohyb těžké kladky (viz obr. 7.19). Předpokládejte, že tření mezi vláknem spojujícím závaží  $m_1$  a  $m_2$  a kladkou zamezí klouzání vlákna po kladce.

Řešení. Pohybová rovnice těžké kladky je uvedena v textu jako rovnice 7(3.18)

$$F_1R - F_2R = J \left( \frac{d\omega}{dt} \right). \quad (1)$$

Síla velikosti  $F_1$  je přenášena částí vlákna, na kterém visí závaží o hmotnosti  $m_1$ , síla  $F_2$  druhou částí vlákna. Kladka má poloměr  $R$  a moment setrvačnosti  $J$  vůči ose otáčení  $o$ . Označíme-li  $a$  zrychlení závaží o hmotnosti  $m_1$ , dostáváme podle 2(1.4) pro sílu  $F_1$  vyjádření

$$F_1 = m_1(g - a) \quad (2)$$

a pro sílu  $F_2$ , kde orientace  $a$  je opačná, vyjádření

$$F_2 = m_2(g + a). \quad (3)$$

Úhlová rychlost  $\omega$  otáčení kladky a postupná rychlost  $v$  závaží  $m_1$  jsou vázány vztahem  $v = R\omega$ , z něhož derivováním podle času plyne

$$a = R \left( \frac{d\omega}{dt} \right). \quad (4)$$

Dosadíme-li (2), (3) a (4) do (1), získáme po jednoduché algebraické úpravě

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{J/R^2 + m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Zrychlení  $a$  je konstantní, tedy podle (4) též úhlové zrychlení  $d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2 = a/R$  je konstantní. Pro časovou závislost úhlu  $\varphi = \varphi(t)$  popisujícího otáčení kladky pak integrací dostáváme

$$\varphi = \frac{at^2}{2R} + \omega_0 t + \varphi_0, \quad (6)$$

kde  $\omega_0$  je úhlová rychlost kladky a  $\varphi_0$  úhel  $\varphi$  v čase  $t = 0$ .

3. Najděte rovnoběžné osy, kolem kterých fyzické kyvadlo kýve se stejnou dobou kmitu.

Řešení. Doba kmitu fyzického kyvadla je podle 7(3.24)

$$T = 2\pi \left( \frac{J}{MgR} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

kde  $R$  je vzdálenost hmotného středu kyvadla od osy otáčení. Stejnou dobu kmitu má tedy kyvadlo (hmotnost kyvadla  $M$  a tíhové zrychlení  $g$  jsou konstanty) kolem os, pro které platí rovnost

$$\frac{J}{R} = \frac{J'}{R'}. \quad (2)$$

Jsou-li osy rovnoběžné, můžeme podle Steinerovy věty 7(4.37) psát

$$J = J_S + MR^2, \quad J' = J_S + MR'^2, \quad (3)$$

přičemž  $J$  je moment setrvačnosti kolem osy  $o$ ,  $J'$  kolem osy  $o'$  a  $J_S$  kolem osy  $o_S$  procházející hmotným středem tělesa. Dosazením (3) do (2) dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$R'^2 - R' \frac{J_S + MR^2}{MR} + \frac{J_S}{M} = 0 \quad (4)$$

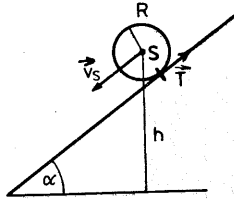
pro hledanou vzdálenost  $R'$  hmotného středu od osy otáčení. Jedním řešením rovnice (4) je  $R' = R$ ; fyzické kyvadlo kývá se stejnou dobou kmitu kolem všech rovnoběžných os stejně vzdálených od hmotného středu. Označíme-li  $R'_2$  druhé řešení (kořen) rovnice (4), dostáváme

$$\frac{J_S + MR^2}{MR} = R'_2 + R, \quad (5)$$

neboť součet kořenů kvadratické rovnice je roven záporně vzatému koeficientu u lineárního členu. Podle (3)  $J = J_S + MR^2$  a podle 7(3.26)  $J/MR$  je rovno redukované délce fyzického kyvadla  $l_r$ . Platí tedy

$$l_r = R'_2 + R. \quad (6)$$

Uvažujeme-li pouze osy  $o, o'$  takové, že hmotný střed  $S$  kyvadla leží v rovině jimi určené, plyne z (6), že kromě případu  $R = R'$  kýve kyvadlo se stejnou dobou



Obr. 7.37 Valení rotačně symetrického tělesa po nakloněné rovině

kmitu též kolem os  $o, o'$  vzdálených o redukovanou délku kyvadla  $l_r$ . Najdeme-li tedy v kyvadle dvě osy se stejnou dobou kmitu, v jejichž rovině, různě vzdálen od obou os, leží hmotný střed, je vzdálenost os rovna redukované délce fyzického kyvadla. Jak lze tuto skutečnost užít k přesnému měření tíhového zrychlení  $g$ , je uvedeno v citované učebnici Brožově.

4. Má větší zrychlení těleso, které se po nakloněné rovině valí nebo těleso, které se po ní smýká bez tření?

Řešení. Valením (srovnej s čl. 7.5) rozumíme pohyb rotačně symetrického tělesa, při kterém styčná přímka mezi tělesem a podložkou je pevná, nepodklouzává a tvoří okamžitou osu otáčení. Pro zodpovězení zadané otázky budeme předpokládat, že osa rotační symetrie tělesa je po celou dobu pohybu po nakloněné rovině vodorovná (viz obr. 7.37). Je-li těleso homogenní, což budeme též předpokládat, leží jeho hmotný střed  $S$  na ose rotační symetrie. Síla smykového tření  $T$  mezi podložkou a valícím se tělesem musí být dostatečně velká, aby těleso nepodklouzávalo. Splňuje-li  $T$  tuto podmínku, nedochází k disipaci energie  $W$  a ta je po celou dobu rovna konstantní hodnotě  $k$

$$W = \frac{Mv_S^2}{2} + \frac{J_S \omega^2}{2} + Mgh = k. \quad (1)$$

V soulase s Königovou větou 5(3.9) (viz též 7(4.50)) vyjadřujeme kinetickou energii valícího se tělesa jako součet kinetické energie  $Mv_S^2/2$  příslušné pohybu hmotného středu  $S$  tělesa ( $M$  – hmotnost tělesa,  $v_S$  – rychlost hmotného středu) a jeho vnitřní kinetické energie, kterou podle 7(4.46) vyjadřujeme jako  $J_S \omega^2/2$

( $J_S$  – moment setrvačnosti vůči ose procházející hmotným středem  $S$ ). Zůstává-li směr rotační osy symetrie rovnoběžný s okamžitou osou otáčení, kterou je styčná přímka tělesa a nakloněné roviny, je moment setrvačnosti  $J_S$  momentem setrvačnosti vůči rotační ose symetrie tělesa a rychlost hmotného středu

$$v_S = \omega R . \quad (2)$$

( $R$  značí vzdálenost obou rovnoběžných os.)

Za uvedených podmínek pro válec platí (rov. (6) úl. 1)

$$J_{S,V} = \frac{MR^2}{2} \quad (3)$$

a pro kouli (rov. (19) úl. 1)

$$J_{S,K} = \frac{2Mr^2}{5} . \quad (4)$$

(Přitom např. s kuželem uvedené podmínky nelze splnit, valení kužele je složitější.) Potenciální energie  $Mgh$  ( $h$ ... výška hmotného středu v tíhovém poli) při uvažovaném valení s časem klesá;  $h = h(t)$ ,  $dh/dt < 0$ . Mezi rychlostí  $v_S$  a derivací  $dh/dt$  plyne z geometrie pohybu vztah ( $\alpha$ ... úhel sklonu nakloněné roviny)

$$v_S \sin \alpha = - \frac{dh}{dt} . \quad (5)$$

Do rovnice (1) dosadíme z (2) a vypočteme

$$v_S^2 = \frac{2h - Mgh}{M + J_S/R^2} . \quad (6)$$

Derivujeme-li rovnici (6) podle času, dostaneme

$$2v_S \frac{dv_S}{dt} = \frac{-Mg}{M + J_S/R^2} \frac{dh}{dt} \quad (7)$$

a po dosazení z (5) můžeme napsat hledaný výraz pro zrychlení valivého pohybu

$$a_S = \frac{Mg \sin \alpha}{M + J_S/R^2} . \quad (8)$$

Pro  $J_S = 0$  přechází výraz (8) ve známé zrychlení

$$a = g \sin \alpha \quad (9)$$

pohybu hmotného bodu po nakloněné rovině, které je stejné jako zrychlení tělesa smýkajícího se po nakloněné rovině bez tření. Jelikož všechny členy v rovnici (8) jsou kladné, je zřejmé, že

$$a > a_S, \text{ když } J_S \neq 0; \quad (10)$$

zrychlení při valení je menší než zrychlení při smýkání bez tření. Dosazením (3), resp. (4) do (8) dostáváme pro válec  $a_{S,V} = 2a_0/3$  a pro kouli  $a_{S,K} = 5a_0/7$ , tedy  $a_{S,K} > a_{S,V}$ . Vypustíme-li z jednoho místa nakloněné roviny současně kouli a válec, koule válec předběhne. Tento závěr si každý může pokusně ověřit.

5. Dokažte, že koeficienty  $J_{ij}$  definované rovnicemi 7(4.9) se při transformaci souřadnic

$$\xi'_i = a_{ik}\xi_k \quad (1)$$

transformují jako složky tenzoru. Tedy podle D(3.3)

$$J'_{ij} = a_{ik}a_{jl}J_{kl}. \quad (2)$$

Řešení. Vyjdeme z rovnice 7(4.10)

$$\beta_i = \Omega_j J_{ij}. \quad (3)$$

Tato rovnice mezi vektory  $\beta_i$ ,  $\Omega_j$  může být splněna, jen když výraz  $J_{ij}$  je tenzor. Ukážeme to podrobněji. Mezi složkami  $\beta_i$  a  $\beta'_i$ , resp.  $\Omega_j$  a  $\Omega'_j$  platí podle definice vektoru D(3.2) vztahy

$$\beta_i = a_{li}\beta'_l \text{ a } \Omega_j = a_{kj}\Omega'_k, \quad (4)$$

uvažujeme-li inverzní transformaci (viz D(2.8))

$$\xi_j = a_{ij}\xi'_i \quad (5)$$

k transformaci (1). Dosadíme-li (4) do (3), dostáváme

$$a_{li}\beta'_l = a_{kj}\Omega'_k J_{ij}. \quad (6)$$

Poslední rovnici vynásobíme koeficientem transformace  $a_{mi}$

$$a_{mi}a_{li}\beta'_l = a_{mi}a_{kj}\Omega'_k J_{ij} \quad (7)$$

a po užití vztahu D(2.9)  $a_{mi}a_{li} = \delta_{ml}$  a zřejmé identity  $\delta_{ml}\beta'_l = \beta'_m$ , získáme rovnici

$$\beta'_m = \Omega'_k a_{mi}a_{kj}J_{ij}. \quad (8)$$

Poslední rovnice je vyjádřením vztahu (3) v čárkované soustavě souřadnic. Musí tedy mít tvar

$$\beta'_m = \Omega'_k J'_{mk} . \quad (9)$$

Porovnáním (8) a (9) dostáváme

$$J'_{mk} = a_{mi} a_{kj} J_{ij} , \quad (10)$$

což je (až na nepodstatné označení indexů) dokazovaný vztah.

6. Mějme válec poloměru  $r = 0,3 \text{ m}$ , výšky  $v = 0,1 \text{ m}$  a hustoty  $\rho = 7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Vypočítejte moment setrvačnosti  $J$  tohoto válce vůči ose, která s osou rotační symetrie válce svírá úhel  $\alpha = 30^\circ$ . Stanovte také deviační složky momentu setrvačnosti a velikost silové dvojice působící na osu, když se válec kolem zvolené osy rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí 10 otáček za sekundu.

Řešení. Momenty setrvačnosti vůči ose symetrie válce

$$J_{11} = \frac{1}{2} M r^2 \quad (1)$$

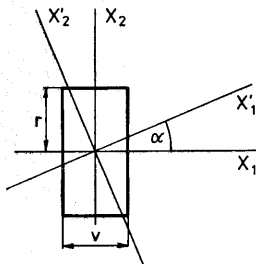
a ose k ní kolmé

$$J_{22} = \frac{1}{4} M \left( r^2 + \frac{v^2}{3} \right) \quad (2)$$

známe z výsledku řešení úlohy 1. Na obr. 7.38 je znázorněna kartézská soustava souřadnic  $x_1, x_2, x_3$ , v které právě uvedené momenty setrvačnosti jsou složkami  $J_{11}$  a  $J_{22}$  tenzoru setrvačnosti. Nově zvolenou osou proložíme osu  $x'_1$  čárkované soustavy souřadnic, osy  $x_3$  a  $x'_3$  ztotožníme, takže osy  $x_1, x_2, x'_1, x'_2$  leží v jedné rovině.

Transformační rovnice D(2.4) pro tuto transformaci mají tvar

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha , \\ x'_2 &= -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha , \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (3)$$



Obr. 7.38 Válec a soustavy souřadnic uvažované v řešené úloze č. 6

Tedy transformační koeficienty jsou

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha, & a_{12} &= \sin \alpha, & a_{21} &= -\sin \alpha, \\ a_{22} &= \cos \alpha, & a_{33} &= 1, & \text{ostatní } a_{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Hledaný moment setrvačnosti  $J$  je roven složce  $J'_{11}$  tenzoru setrvačnosti v nové soustavě souřadnic. Podle 7(4.11), resp. D(3.3) máme

$$J'_{11} = a_{1i} a_{1j} J_{ij}. \quad (5)$$

Potom s přihlédnutím k (4) a ke skutečnosti, že nečárkovaná soustava souřadnic má osy v hlavních osách setrvačnosti ( $J_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ , třetí hlavní moment setrvačnosti  $J_{33} = J_{22}$ ), dostáváme

$$\begin{aligned} J &= J'_{11} = a_{11} a_{11} J_{11} + a_{12} a_{12} J_{22} + a_{13} a_{13} J_{33} = \\ &= \cos^2 \alpha J_{11} + \sin^2 \alpha J_{22}. \end{aligned} \quad (6)$$

Výsledek (6) by bylo možno najít rychleji užitím rovnice 7(4.34), zvolený postup však umožní stejným způsobem jako  $J$  určit i deviační momenty, tj. složky  $J'_{12}$  a  $J'_{13}$  tenzoru setrvačnosti v čárkované soustavě souřadnic. Platí

$$\begin{aligned} J'_{12} &= a_{1i} a_{2j} J_{ij} = a_{11} a_{21} J_{11} + a_{12} a_{22} J_{22} + a_{13} a_{23} J_{33} = \\ &= -\cos \alpha \sin \alpha J_{11} + \sin \alpha \cos \alpha J_{22}, \\ J'_{13} &= a_{1i} a_{3j} J_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Složky momentu síly  $\mu$ , který působí na osu otáčení při rovnoměrné rotaci úhlovou rychlostí  $\omega$ , vypočteme podle soustavy rovnic 7(4.22). Cyklickou záměnou je upravíme na tvar popisující otáčení kolem první osy souřadnicové a dostaneme

$$-\omega^2 J'_{21} = \mu_3, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0. \quad (8)$$

Dosadíme-li do (6) a (7) hodnoty momentů setrvačnosti (1) a (2), hodnoty  $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$ ,  $\sin \alpha = 1/2$  pro uvažovaný úhel  $\alpha = 30^\circ$  a posléze další číselné hodnoty, dostaneme

$$\begin{aligned} J &= M \frac{21r^2 + v^2}{48} = \pi r^2 v \rho \frac{21r^2 + v^2}{48} = 7,83 \text{ kg m}^2, \\ J'_{12} &= \sqrt{3} M \frac{v^2/3 - r^2}{16} = -1,86 \text{ kg m}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Z druhé rovnice (9) je zřejmé, že pro válec s  $v = \sqrt{3}r$  deviační moment  $J'_{12}$  vymizí. To je však případ, kdy momenty setrvačnosti (1) a (2) jsou stejné a válec se stává kulovým setrvačником.



Pro zadanou rychlost otáčení 10 ot./s, tj.  $\omega = 20 \pi \text{ s}^{-1}$ , plyne z (8) a (9)

$$\mu_3 = -\omega^2 \sqrt{3} M \frac{v^2/3 - r^2}{16} = 7\,330 \text{ Nm}, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0. \quad (10)$$

Uvědomíme-li si orientaci os na obr. 7.38, můžeme říci, že v našem případě moment síly  $\mu_i$ , jehož velikost je značná, se snaží stočit osu otáčení od osy rotační symetrie válce, v případě válce s  $v > \sqrt{3}r$  je osa otáčení stáčena k ose rotační symetrie.

# Mechanika spojitých prostředí – Reologie

## 8.1 Kinematika spojitého prostředí – kontinua

Pro vyšetřování pohybu kapalin, plynů a pro vyšetřování mechanických dějů, při nichž se mění vzájemná vzdálenost jednotlivých bodů pevné látky, se zavádí představa spojitého prostředí – *kontinua*. Naše představy o struktuře látek neodpovídají spojitému rozložení hmotnosti, které v kontinuu předpokládáme. Přesto lze makroskopický popis pohybu kapalin i plynů a popis deformačního chování pevných látek dobře provést na základě představy o spojitém prostředí – kontinuu. V mechanice kontinua připisujeme charakteristické veličiny prostředí k jednotlivým geometrickým bodům. Tuto skutečnost je nutno chápat jako matematickou pomůcku, která nám umožní využít rozpracovanou teorii spojitých funkcí více proměnných. Z fyzikálního hlediska je nutno chápat veličiny připisované jednotlivým bodům kontinua jako nejlépe vyhovující průměrné hodnoty z tak velkého okolí bodu, aby se v tomto okolí již neprojevovala nespojitá struktura skutečné látky.

Popis pohybu kontinua můžeme provést tak, že sledujeme pohyb částic, které v čase  $t = 0$ , kdy zahajujeme pozorování, se nacházejí v místech o souřadnicích  $x_i$ . Souřadnice těchto částic v čase  $t$  označíme  $y_j$  a píšeme

$$y_j = y_j(x_i, t). \quad 8(1.1)$$

Rovnice 8(1.1) se liší od rovnic užívaných pro popis pohybu hmotného bodu (viz rovnice 1(2.15)) přítomností souřadnic  $x_i$  jako dalších nezávisle proměnných. Souřadnice  $x_i$  vymezují částici, jejíž pohyb sledujeme. Obdobně jako v kinematice bodu užíváme pro křivku popsanou rovnicemi 8(1.1) při pevně zadaných  $x_i$  název *trajektorie* částice kontinua. V mechanice kontinua předpokládáme spojitě rozložení bodů  $x_i$ , a tedy pro každou konečnou oblast kontinua, jejíž pohyb vyšetřujeme, představuje rovnice 8(1.1) nekonečný počet rovnic. Často je však možno vybrat z nich konečný počet, tj. konečný počet trajektorií, který umožní dobrou představu o pohybu celého kontinua.

Druhým často užívaným popisem pohybu kontinua je udání rychlostí všech jeho částic. Částice, která se v okamžiku  $t$  nachází v místě  $y_j$ , má rychlost

$$v_i = v_i(y_j, t). \quad 8(1.2)$$

V každém okamžiku  $t$  z uvažovaného časového intervalu udává rovnice 8(1.2) rozložení rychlostí v celé vyšetřované oblasti (oboru uvažovaných  $y_j$ ) kontinua. Budeme předpokládat, že rychlosti částic v sousedních místech kontinua nejsou příliš rozdílné, přesněji vyjádřeno budeme předpokládat, že funkce 8(1.2) nenabývají současně nulových hodnot a jsou jednoznačné a spojité i se svými parciálními derivacemi podle souřadnic. Potom v každém okamžiku  $t$  lze kontinuem proložit křivky, jejichž tečny v každém bodě mají směr rychlosti  $v_i$ . Takovým křivkám říkáme *proudnice*. Rovnici proudnice, jakožto rovnici křivky, lze v pevně daném čase  $t$  zapsat v parametrickém tvaru

$$y_i = y_i(s), \quad 8(1.3)$$

kde  $s$  je libovolný parametr. Má-li křivka 8(1.3) být proudnicí, musí její tečný vektor  $dy_i/ds$  mít směr shodný s rychlostí  $v_i$ , tedy

$$\frac{dy_i}{ds} = kv_i, \quad 8(1.4)$$

kde  $k$  je konstanta. Rovnice 8(1.4) jsou diferenciálními rovnicemi určujícími tvar proudnic  $y_i = y_i(s)$  při známém poli rychlostí 8(1.2), které v pevně zvolený časový okamžik můžeme psát jako  $v_i = v_i(y_j)$ . Parametr  $s$  je libovolný, a proto rovnice 8(1.4) bývají pro výpočet upravovány na tvar

$$\frac{dy_1}{v_1} = \frac{dy_2}{v_2} = \frac{dy_3}{v_3}. \quad 8(1.5)$$

Za výše učiněných předpokladů o funkcích 8(1.2) prochází každým bodem ve zvoleném okamžiku  $t$  jediná proudnice.

Uvážíme-li časovou závislost pole rychlostí 8(1.2), je zřejmé, že rovnice 8(1.4) a 8(1.5) jsou v různých okamžicích různé. Tedy i obraz proudnic se s časem mění. Obraz proudnic je dán rychlostmi různých částic v jednom daném okamžiku. Trajektorie jsou dráhami pohybu jednotlivých částic. Obecně trajektorie a proudnice jsou různé křivky. Pouze v případě, kdy rychlosti 8(1.2) jsou na čase nezávislé, a lze je tedy psát ve tvaru  $v_i = v_i(y_j)$ , oba druhy křivek splývají. Takový často uvažovaný případ nazýváme *stacionárním* nebo též *ustáleným pohybem kontinua*. Určujeme-li pohyb kontinua rovnicemi 8(1.1), mluvíme o *Lagrangeově metodě* popisu, užíváme-li rovnic 8(1.2), mluvíme o *Eulerově metodě*.

Uvedeme nyní případy, kdy se kontinuum pohybuje jako tuhý celek. Nezávislí-li tvar trajektorií 8(1.1) na původní poloze  $x_i$  částic, tj. když

$$y_j = y_j(x_i, t) = y_j(t) + x_j, \quad 8(1.6)$$

rychlosti  $v_j = [dy_j/dt](t)$  jsou v každém okamžiku stejné pro všechny částice

a kontinuum koná *translační pohyb*. Další možný pohyb kontinua jako tuhého celku (tuhého tělesa) je jeho otáčení. Při *otáčení kontinua* jako tuhého celku jsou výrazy  $\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i$  nulové a výrazy  $\partial v_i/\partial y_j - \partial v_j/\partial y_i$  nenulové. Důkaz tohoto tvrzení a podrobnější rozbor všech zde uvedených výsledků lze nalézt v knize Brdička M.: *Mechanika kontinua* (viz seznam doporučené literatury).

Pohybuje-li se kontinuum jako celek, jedná se o pohyb tuhého tělesa, který jsme podrobně vyšetřovali v čl. 7.1. Vlastní oblastí zájmu mechaniky kontinua jsou případy, kdy dochází ke změně vzájemných vzdáleností částic. Vydeme z rovnic 8(1.2), které udávají rychlost jednotlivých částic kontinua a budeme vyšetřovat pole rychlosti v okolí libovolného bodu o souřadnicích  $y_j$ . Je-li  $v_i(y_j, t)$  rychlost v bodě  $y_j$ , dostáváme pro rychlost  $v_i(y_j + dy_j, t)$  v místě  $y_j + dy_j$  v diferenciálním přiblížení

$$v_i(y_j + dy_j, t) = v_i(y_j, t) + \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right) dy_j. \quad 8(1.7)$$

Výraz  $\partial v_i/\partial y_j$ , který jakožto derivace vektoru podle souřadnice je tenzorem 2. řádu (viz D(5.15)), rozepíšeme podle zřejmé identity

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right). \quad 8(1.8)$$

Rozpis 8(1.8) je rozkladem tenzoru na symetrickou část  $\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i$  a antisymetrickou část  $\partial v_i/\partial y_j - \partial v_j/\partial y_i$  (srovnej s D(4.16)). Vyjádření 8(1.8) dosadíme do 8(1.7), dostaneme

$$v_i(y_j + dy_j, t) = v_i(y_j, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j. \quad 8(1.9)$$

První dva členy na pravé straně rovnice 8(1.9) odpovídají pohybu kontinua jako celku, první je rychlostí translace a druhý rychlostí rotace. Poslední člen  $\frac{1}{2}(\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i) dy_j$ , který při rotaci kontinua jako celku je nulový, udává rychlost, s jakou se mění vzdálenost částic v okolí uvažovaného bodu  $y_j$ . Obsah rovnice 8(1.9) lze vyslovit jako *1. Helmholtzovu větu: Pohyb kontinua v okolí určitého bodu lze rozložit na pohyb translační (posuvný), na pohyb rotační (otáčivý) a na pohyb deformační*. Pro mechaniku kontinua je podstatný poslední člen rovnice 8(1.9). Vyšetřování změn vzdáleností částic neboli deformací a rychlostí, s jakou se tyto změny dějí, bude předmětem našich úvah v následujících dvou článcích.

## 8.2 Deformace

Uvedli jsme, že výrazy  $\frac{1}{2}(\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i)$  z rovnice 8(1.9) popisují rychlost, s jakou se mění vzdálenost jednotlivých částic kontinua. Nyní si všimneme, jak je možno určit konečnou změnu vzdálenosti, ke které dojde za určitý časový interval. Vyjdeme z popisu kontinua podle rovnic 8(1.1)  $y_j = y_j(x_i, t)$ . Pro jednoduchost budeme pokládat začátek zmíněného časového intervalu do okamžiku  $t = 0$ , kdy, vzhledem k tomu, že  $x_i$  pokládáme za souřadnice částic v čase  $t = 0$ , platí

$$y_j = y_j(x_i, 0) = x_j.$$

Souřadnice částic v čase  $\Delta t$ ,  $y_j = y_j(x_i, \Delta t)$ , budeme dále stručně označovat  $y_j$ . V tomto článku nás nebude zajímat časová závislost deformace, tedy ani velikost intervalu  $\Delta t$ , a pro  $y_j$  budeme stručně psát

$$y_j = y_j(x_i). \quad 8(2.1)$$

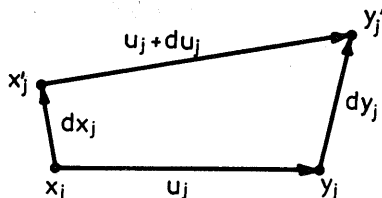
Částice z místa o souřadnicích  $x_i$  se přemístí do místa o souřadnicích  $y_j$ . Vzhledem k tomuto smyslu rovnic 8(2.1) budeme předpokládat, že přiřazení jimi zavedené je vzájemně jednoznačné, jednomu bodu  $x_i$  odpovídá jeden bod  $y_j$  a jednomu bodu  $y_j$  odpovídá jeden bod  $x_i$ . Dále zavedeme *vektor posunutí*

$$u_i = y_i - x_i, \quad 8(2.2)$$

jehož počátek je v místě, kde se částice nacházela na začátku uvažovaného děje a konec vektoru je v místě konečné polohy částice. S užitím vektoru posunutí  $u_i$  lze funkci 8(2.1) rozepsat na tvar

$$y_j = y_j(x_i) = x_j + u_j(x_i). \quad 8(2.3)$$

Rovnice 8(2.1) nebo 8(2.3) určují jednoznačně, kam se která částice kontinua původně se nacházející v místě  $x_i$  na konci uvažovaného děje dostane. Zahrnují v sobě posunutí kontinua a jeho otáčení jako celku i jeho deformaci. Abychom z těchto rovnic izolovali jejich deformační část, budeme sledovat, jak se mění vzdálenosti částic v okolí libovolně zvoleného bodu  $x_j$ . Bod  $x_j$ , vektor posunutí



Obr. 8.1 Rozdílná posunutí dvou sousedních bodů  $x_j$  a  $x'_j$  vedou ke vzniku deformace

$u_j$  a konečná poloha  $y_j$  částice původně se nacházející v bodě  $x_j$  jsou znázorněny na obr. 8.1. Původní souřadnice libovolného bodu v okolí  $x_j$  budeme psát jako  $x_j + dx_j$ . Jeden z bodů  $x_j + dx_j$  je na obr. 8.1 označen  $x'_j$ . Vektor posunutí odpovídající tomuto bodu je označen  $u_j + du_j$ . Bod  $x'_j$  se posune do bodu  $y'_j$ . Uvažujeme-li pouze diferenciální okolí bodu  $x_j$ , můžeme složky vektoru  $y'_j - y_j$  pokládat za diferenciály  $dy_j$  funkcí 8(2.3) a psát pro ně vyjádření

$$dy_j = dx_j + du_j = dx_j + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i. \quad 8(2.4)$$

Velikost vektoru  $dx_j$ , a tedy vzdálenost bodů  $x_j$  a  $x'_j$  na začátku děje je  $(dx_j, dx_j)^{1/2}$ . Velikost vektoru  $dy_j$ , a tedy konečná vzdálenost částic původně se nacházejících v místech  $x_j$  a  $x'_j$ , je  $(dy_j, dy_j)^{1/2}$ . Rozdíl těchto dvou vzdáleností ( $x'_j$  je libovolný bod z okolí bodu  $x_j$ ) by bylo přirozené zvolit k popisu deformace kontinua v okolí bodu, jehož původní souřadnice jsou  $x_i$  a konečné  $y_i$ . Z početních důvodů je výhodnější použít k popisu rozdíl čtverců těchto délek, tj. výraz

$$dy_j dy_j - dx_j dx_j. \quad 8(2.5)$$

Vypočteme jej jako funkci výchozích poloh  $x_i$  částic a zvoleného diferenciálního vysunutí  $dx_i$  z těchto poloh. Z rovnice 8(2.4) dostáváme

$$\begin{aligned} dy_j dy_j &= [dx_j + du_j] [dx_j + du_j] = \\ &= \left[ dx_j + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) dx_l \right] \left[ dx_j + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_k \right]. \end{aligned}$$

Výraz  $dx_j + (\partial u_j / \partial x_l) dx_l$  lze užitím Kroneckerova symbolu  $\delta_{ij}$  (viz D(2.6)) přepsat na tvar  $(\delta_{jl} + \partial u_j / \partial x_l) dx_l$  a obdobně  $dx_j + (\partial u_j / \partial x_k) dx_k = (\delta_{jk} + \partial u_j / \partial x_k) dx_k$ ; tedy

$$\begin{aligned} dy_j dy_j &= \left( \delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) dx_l \left( \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_k = \\ &= \left[ \delta_{jl} \delta_{jk} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \delta_{jk} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \delta_{jl} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] dx_l dx_k. \end{aligned}$$

Uvážíme-li, že  $\delta_{jl} \delta_{jk} dx_l dx_k = dx_j dx_j$  a  $(\partial u_j / \partial x_l) \delta_{jk} = \partial u_k / \partial x_l$ ,  $(\partial u_j / \partial x_k) \delta_{jl} = \partial u_l / \partial x_k$ , je možno psát

$$dy_j dy_j = dx_j dx_j + \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] dx_l dx_k$$

a pro hledaný výraz 8(2.5) dostáváme vyjádření

$$dy_j dy_j - dx_i dx_i = 2\varepsilon_{lk} dx_l dx_k, \quad 8(2.6)$$

kde jsme pro výraz  $\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k + (\partial u_j / \partial x_l) (\partial u_j / \partial x_k)$  zavedli označení  $2\varepsilon_{lk}$ . Jelikož pravá strana definiční rovnice

$$\varepsilon_{lk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] \quad 8(2.7)$$

výrazu  $\varepsilon_{lk}$  je složena z derivací vektoru podle souřadnic, je výraz  $\varepsilon_{lk}$  tenzorem. Z definice 8(2.7) dále plyne, že  $\varepsilon_{lk} = \varepsilon_{kl}$ , a tedy  $\varepsilon_{lk}$  je symetrický tenzor. Tento symetrický tenzor druhého řádu popisuje deformaci.

Podle způsobu odvození je zřejmé, že tenzor deformace  $\varepsilon_{lk}$  je funkcí souřadnic  $x_i$

$$\varepsilon_{lk} \equiv \varepsilon_{lk}(x_i). \quad 8(2.8)$$

Známe-li funkce 8(2.8) pro oblast kontinua, jehož deformaci vyšetřujeme, známe pro každý bod  $x_i$  kontinua šest čísel  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ , které udávají, jak se změnila délka v diferenciálním okolí tohoto bodu. Zvolíme-li vektor  $dx_m$ , čímž volíme směr výchylky z bodu  $x_i$ , rovnice 8(2.6) udá změnu čtverce délky příslušnou danému směru.

Zatím jsme počítali změnu délky 8(2.5) jako funkci původních poloh částic  $x_i$ . Nyní vypočteme změnu této délky jako funkci konečných poloh částic  $y_j$ . Jelikož funkce 8(2.1) je vzájemně jednoznačná, můžeme psát  $x_i = x_i(y_j)$  a rovnici 8(2.2) upravit na tvar

$$x_i = y_i - u_i(y_j),$$

kde vektor posunutí pokládáme za funkci  $y_j$ . Postupem analogickým, jaký byl použit při odvození rovnice 8(2.6), dostaneme

$$dy_i dy_i - dx_i dx_i = 2\bar{\varepsilon}_{kl} dy_k dy_l, \quad 8(2.9)$$

kde

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_l} - \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_k} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_l} \right) \right]. \quad 8(2.10)$$

Jelikož vektor posunutí  $u_i$  pokládáme nyní za funkci souřadnic  $y_j$ , je zřejmé, že i tenzor  $\bar{\varepsilon}_{kl}$  je funkcí  $y_j$

$$\bar{\varepsilon}_{kl} \equiv \bar{\varepsilon}_{kl}(y_j). \quad 8(2.11)$$

Rovnicí 8(2.10) je definován tenzor deformace vyjádřený vzhledem k deformovanému stavu – souřadnicím  $y_j$  – kontinua. Známe-li funkce 8(2.11), můžeme

podle rovnice 8(2.9) pro každý bod deformovaného tělesa určit, jak se deformací změni délka elementu v jeho okolí. Směr výchylky z uvažovaného bodu určíme volbou vektoru  $dy_m$ , délka výchylky je stanovena vzhledem k rozměrům deformovaného tělesa. Složky tenzorů  $\varepsilon_{kl}$  a  $\hat{\varepsilon}_{kl}$  jsou obecně různé i pro vzájemně si odpovídající pár bodů  $x_i, y_j$ . Vzájemně si odpovídajícími rozumíme ty body, v nichž se nachází před deformací a po ní stejná částice.

Tenzory 8(2.8) nebo 8(2.11) popisují obecně, tedy i velké deformace. Užívá se pro ně označení *tenzory velkých deformací*. Dále budeme předpokládat, že deformace jsou malé. Potom jsou malé i změny vektoru posunutí  $u_i$  se souřadnicemi  $x_j$ , parciální derivace  $\partial u_i / \partial x_j$  nabývají malých hodnot. Vzájemné násobky parciálních derivací  $(\partial u_j / \partial x_i)$   $(\partial u_j / \partial x_k)$  z rovnice 8(2.7) jsou malými veličinami druhého řádu a lze je zanedbat proti členům  $\partial u_k / \partial x_i$  a  $\partial u_l / \partial x_k$ , kde se parciální derivace vyskytují samostatně. Deformaci lze popsat tenzorem

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 8(2.12)$$

který se nazývá *tenzor malých deformací*. Pro malé deformace tedy předpokládáme, že výraz 8(2.5) můžeme v dobrém přiblížení vyjádřit jako

$$dy_i dy_i - dx_i dx_i = 2e_{lk} dx_l dx_k. \quad 8(2.13)$$

Vycházíme-li z deformovaného stavu, můžeme zavést tenzor malých deformací vztahem

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) \quad 8(2.14)$$

a výraz 8(2.5) vyjádřit jako

$$dy_i dy_i - dx_i dx_i = 2\bar{e}_{lk} dy_l dy_k. \quad 8(2.15)$$

Předpokládáme-li malé deformace, jsou velikosti posunů  $dx_i$  v nedeformovaném stavu a jim odpovídající  $dy_j$  v deformovaném stavu v dobrém přiblížení stejné. Porovnáním rovnic 8(2.13) a 8(2.15) potom plyne, že nemusíme rozlišovat tenzory malých deformací  $e_{lk}(x_j)$  a  $e_{lk}(y_j)$ . Zanedbání rozdílu posuvu v nedeformovaném a deformovaném stavu neboli zanedbání rozdílu metrik nedeformovaného a deformovaného stavu je typické pro celou teorii malých deformací. Nadále budeme tedy obojí vyjádření tenzoru malých deformací 8(2.12) a 8(2.14) považovat za ekvivalentní. Budeme pro něj užívat jediné označení  $e_{ij}$ .

Tenzor malých deformací odpovídá svým tvarem členu  $\frac{1}{2} (\partial v_i / \partial y_j + \partial v_j / \partial y_i)$  z rovnice 8(1.9). Tento člen udává v rovnici 8(1.9) rychlost, s jakou se při pohybu kontinua mění vzájemné vzdálenosti částic. Abychom našli vztah mezi tenzorem



malých deformací a tenzorem  $\frac{1}{2}(\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i)$ , budeme, podobně jako na začátku tohoto článku, uvažovat o průběžně se měnící deformaci. Konečnou polohu částice  $y_j$  budeme pokládat nejen za funkci původní polohy  $x_i$ , ale i za funkci času

$$y_j = y_j(x_i, t). \quad 8(1.1)$$

V rovnici 8(2.3) je potom nutno vektor posunutí také pokládat za funkci souřadnic a času

$$y_j = x_j + u_j(x_i, t). \quad 8(2.16)$$

Jelikož původní poloha  $x_j$  částice není funkcí času, plyne z rovnice 8(2.16) pro rychlost  $v_j$  částice vyjádření

$$v_j = \frac{\partial y_j}{\partial t} = \frac{\partial u_j}{\partial t}. \quad 8(2.17)$$

Derivujeme-li tenzor malých deformací 8(2.14) parciálně podle času  $t$ , dostáváme

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial y_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial t \partial y_i} \right).$$

O funkcích  $u_i$  budeme, jak je obvyklé, předpokládat, že jejich první parciální derivace jsou spojité. Potom je možno zaměnit pořadí derivací u druhých parciálních derivací funkcí  $u_i$  a parciální derivace  $\partial e_{ij}/\partial t$  přepsat s užitím rovnice 8(2.17) na tvar

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right). \quad 8(2.18)$$

Z rovnice 8(2.18) plyne, že tenzor  $\frac{1}{2}(\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i)$  je roven časové derivaci tenzoru malých deformací. Budeme jej dále nazývat *tenzorem rychlosti deformace* a značit  $D_{ij}$ .

Ukážeme nyní, jaký význam mají jednotlivé složky tenzoru malých deformací

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad 8(2.12)$$

Nejprve budeme uvažovat změnu délky elementu, který v nedeformovaném stavu byl rovnoběžný s osou  $x_1$ . Element  $dx_m$  ve směru osy  $x_1$  je vektor o složkách  $(dx_1, 0, 0)$ . Podle rov. 8(2.13) změna čtverce jeho délky je dána vztahem

$$dy_i dy_i - dx_1 dx_1 = 2e_{11} dx_1 dx_1, \quad 8(2.19)$$

neboť ve všech ostatních členech  $2e_{kl} dx_l dx_k$  na pravé straně rovnice 8(2.13) se vždy vyskytne některý nulový výraz  $dx_2$  nebo  $dx_3$  a rovněž tak na levé straně z výrazu  $dx_i dx_i = dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3$  zůstává nenulový pouze  $dx_1 dx_1$ . Výraz  $dx_1 dx_1$  značí čtverec délky zvoleného elementu před deformací, označíme jej  $l_0^2$ . Výraz  $dy_i dy_i$  znamená čtverec délky elementu po deformaci, označíme jej  $l^2$ . Rovnici 8(2.19) pak přepíšeme na tvar

$$\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = 2e_{11}. \quad 8(2.20)$$

Jelikož uvažujeme o malých deformacích,  $l \doteq l_0$ , levou stranu rovnice 8(2.20) můžeme postupně upravit

$$\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} = \frac{(l - l_0)(l + l_0)}{l_0^2} \doteq \frac{(l - l_0) 2l_0}{l_0^2} = \frac{2(l - l_0)}{l_0}$$

a místo rovnice 8(2.20) psát přibližnou rovnici

$$e_{11} = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad 8(2.21)$$

Složka  $e_{11}$  tenzoru malých deformací značí relativní změnu délky elementu, který byl původně rovnoběžný s osou  $x_1$  kartézské soustavy souřadnic. Význam složek  $e_{22}$  a  $e_{33}$  je analogický.

Jaký je význam složek se smíšenými indexy  $e_{12} = e_{21}$ ,  $e_{13} = e_{31}$  a  $e_{23} = e_{32}$ ? Pro jednoduchost výkladu budeme uvažovat rovinnou deformaci, tj. deformaci popsanou rovnicemi

$$y_i = y_i(x_j),$$

kde  $i$  a  $j$  nabývají pouze hodnot 1 a 2. Potom tenzor malých deformací  $e_{ij}$  má jenom složky  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  a  $e_{12} = e_{21}$ . Abychom našli význam složky se smíšenými indexy  $e_{12} = e_{21}$ , budeme uvažovat deformaci, při které ostatní dvě složky tenzoru jsou nulové. Je-li  $e_{11} = e_{22} = 0$  a  $e_{12} \neq 0$ , z rovnice 8(2.12) plyne

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \neq 0. \quad 8(2.22)$$

Vrátíme se k rovnici 8(2.4). Budeme uvažovat, kam při deformaci popsané tenzorem  $e_{11} = 0$ ,  $e_{22} = 0$ ,  $e_{12} \neq 0$  přejde element původně rovnoběžný s osou  $x_1$ . Takový element  $dx_m^I$  má složky  $(dx_1^I, 0)$ . Složky jemu po deformaci odpovídajícího elementu  $dy_m^I$  vypočteme podle rovnic 8(2.4). Dostaneme

$$dy_1^I = dx_1^I + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) dx_1^I + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_2^I.$$

Podle 8(2.22) je  $(\partial u_1 / \partial x_1) = 0$  a podle volby elementu  $dx_2 = 0$ , tedy  $dy_1^I = dx_1^I$ . Pro druhou složku  $dy_2^I$  elementu  $dy_m^I$  z 8(2.4) plyne

$$dy_2^I = dx_2^I + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1^I + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx_2^I.$$

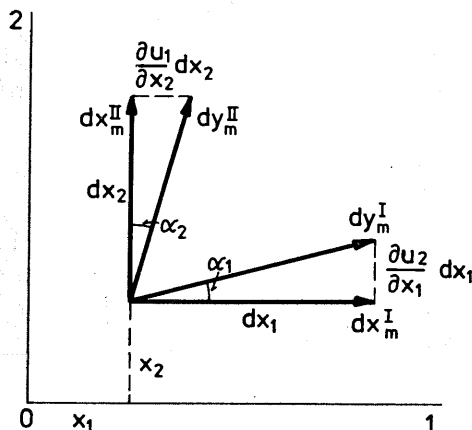
Jelikož  $dx_2^I = 0$  a  $\partial u_2 / \partial x_2 = 0$ , je  $dy_2^I = (\partial u_2 / \partial x_1) dx_1^I$ . Element  $dy_m^I$  odpovídající po deformaci elementu  $dx_m^I(dx_1^I, 0)$  má složky  $dy_m^I(dx_1^I, [\partial u_2 / \partial x_1] dx_1^I)$ . Analogicky zjistíme, kam při uvažované deformaci přejde element  $dx_m^{II}$  původně rovnoběžný s druhou osou kartézské soustavy souřadnic, tedy element  $dx_m^{II}(0, dx_2^{II})$ . Z rovnice 8(2.4) nyní dostáváme užitím hodnot 8(2.22) a konkrétního tvaru  $dx_m^{II}$  pro složky elementu  $dy_m^{II}$  vyjádření

$$dy_1^{II} = dx_1^{II} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) dx_1^{II} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_2^{II} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_2^{II},$$

$$dy_2^{II} = dx_2^{II} + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1^{II} + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx_2^{II} = dx_2^{II}.$$

Element  $dy_m^{II}$  odpovídající po deformaci elementu  $dx_m^{II}$  má složky  $dy_m^{II}([\partial u_1 / \partial x_2] dx_2, dx_2)$ . Na obr. 8.2 jsou naznačeny všechny čtyři vektory  $dx_m^I$ ,  $dx_m^{II}$ ,  $dy_m^I$ ,  $dy_m^{II}$ . Pro úhel  $\alpha_1$  mezi směry vektorů  $dx_m^I$  a  $dy_m^I$  zřejmě platí

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad 8(2.23)$$



Obr. 8.2 Náčrt k objasnění významu smíšené složky  $\epsilon_{12}$  tenzoru deformace

a pro úhel  $\alpha_2$  mezi směry vektorů  $dx_m^H$  a  $dy_m^H$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad 8(2.24)$$

Předpokládáme-li, že deformace jsou malé, můžeme užít přibližné rovnice  $\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha$  a psát

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Jelikož

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

dostáváme konečně

$$2e_{12} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

*Smíšená složka tenzoru deformace  $e_{12}$  je rovna polovině úhlu  $(\alpha_1 + \alpha_2)$ , o který se deformací změni pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s první a druhou osou kartézské soustavy souřadnic. Úhel  $(\alpha_1 + \alpha_2)$  se nazývá úhel smyku.*

Závěr, ke kterému jsme došli, není podstatně ovlivněn tím, že jsme se při jeho odvození omezili na rovinnou deformaci. Kdybychom vycházeli z prostorového případu a pokládali  $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0$ ,  $e_{12} \neq 0$ , elementy původně rovnoběžné s první a druhou osou souřadnic by po deformaci mohly mít nenulové složky ve směru třetí osy. Tyto diferenciální složky jsou však natolik malé, že podstatně nezmění úhel mezi elementy po deformaci, a tedy ani závěr, že složka  $e_{12}$  je rovna polovičnímu úhlu smyku mezi první a druhou osou. Obdobně složka  $e_{13}$  je rovna polovičnímu úhlu smyku mezi první a třetí souřadnicovou osou a složka  $e_{23}$  polovičnímu úhlu smyku mezi druhou a třetí osou.

### 8.3 Rychlost deformace

Rychlost deformace poprvé uvažovaná v rovnici 8(1.9) je další základní veličinou uvažovanou v mechanice kontinua. Rovnice 8(2.18) udává, že *tenzor rychlosti deformace*

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right), \quad 8(3.1)$$

který v Helmholtzově rovnici 8(1.9) určuje deformační pohyb, je možno vyjádřit jako časovou derivaci tenzoru malých deformací  $e_{ij}$ . Význam pojmu rychlost deformace si přiblížíme na jednoduchém příkladu. Budeme uvažovat pohyb kontinua zadaný rovnicemi

$$\begin{aligned}y_1 &= kx_2t + x_1, \\y_2 &= x_2, \\y_3 &= x_3.\end{aligned}\tag{8(3.2)}$$

Vektor posunutí 8(2.2) příslušný pohybu 8(3.2) má složky

$$\begin{aligned}u_1 &= y_1 - x_1 = kx_2t = ky_2t, \\u_2 &= y_2 - x_2 = 0, \\u_3 &= y_3 - x_3 = 0\end{aligned}\tag{8(3.3)}$$

a rychlost 8(1.2) tohoto pohybu je

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} = kx_2 = ky_2, \\v_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial t} = 0.\end{aligned}\tag{8(3.4)}$$

Z parciálních derivací  $\partial u_i/\partial x_j$  a  $\partial u_i/\partial y_j$  jsou, jak plyne z 8(3.3), nenulové pouze

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial y_2} = kt.\tag{8(3.5)}$$

Tenzor deformace 8(2.7) má potom složky

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{k^2t^2}{2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{kt}{2}\end{aligned}\tag{8(3.6)}$$

a tenzor deformace 8(2.10) složky

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= \bar{\varepsilon}_{33} = \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{23} = 0, \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= -\frac{k^2t^2}{2}, \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \frac{kt}{2},\end{aligned}\tag{8(3.7)}$$

Složky tenzoru malých deformací 8(2.12) nebo 8(2.14) jsou

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0, \quad e_{12} = \frac{kt}{2}.\tag{8(3.8)}$$

Pouze pro velmi malá  $t$  lze deformaci při pohybu 8(3.2) popsat tenzorem malé deformace, v obecném případě vede pohyb 8(3.2) k velkým deformacím kontinua.

Z rovnice 8(3.4) dostáváme pro složky tenzoru rychlosti deformace 8(3.1) vyjádření

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{13} = D_{23} = 0, \quad D_{12} = \frac{k}{2}. \quad 8(3.9)$$

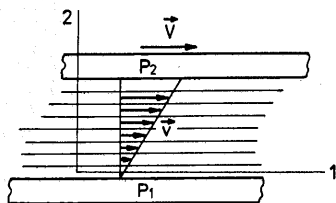
Pro malá  $t$  je adekvátní popis deformace tenzorem 8(3.8) a zřejmě platí vztah  $\partial e_{ij}/\partial t = D_{ij}$ . Při větších  $t$  nemůžeme deformaci popsanou rovnicemi 8(3.2) pokládat za malou a tenzor 8(3.8) ji nevystihuje, pak nemá ani smysl uvažovat o platnosti vztahu  $\partial e_{ij}/\partial t = D_{ij}$ . Rozpor vzniká tím, že při popisu deformace rovnicemi 8(3.2) srovnáváme stav kontinua v čase  $t = 0$  s jeho stavem v nějakém konečném čase  $t_1$ . Při vyšetřování pohybu kontinua často nebývá podstatné (např. při jednoduchém pohybu kapalin), který stav bereme za výchozí. Potom pro libovolný čas  $t_1$  můžeme pohyb kontinua místo rovnicemi 8(3.2) popsat rovnicemi stejného tvaru, v nichž čas  $t$  nahradíme časovým intervalem  $(t - t_1)$ , tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_2(t - t_1) + x_1, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned} \quad 8(3.2')$$

Rychlost při takovém pohybu je dána shodnými rovnicemi s 8(3.4) a složky tenzoru rychlosti deformace jsou dány rovnicemi 8(3.9). Tenzor malých deformací má nenulovou pouze složku  $e_{12} = k(t - t_1)/2$  a jeho derivace podle času  $\partial e_{ij}/\partial t$  jedinou nenulovou složku  $\partial e_{12}/\partial t = k/2$ . Platí tedy vztah  $\partial e_{ij}/\partial t = D_{ij}$  a v uvedeném popisu má význam pro malé hodnoty časového intervalu  $(t - t_1)$ , tj. pro  $t$  blízká  $t_1$ , kdy tenzor malých deformací dobře popisuje deformaci kontinua. Vztah  $\partial e_{ij}/\partial t = D_{ij}$  platí, uvažujeme-li deformaci kontinua v diferenciálním časovém okolí uvažovaného okamžiku.

Sledování deformace při pohybu kontinua 8(3.2) není obvyklé a bylo zde provedeno především pro procvičení dříve zavedených pojmů. Při vyšetřování pohybu 8(3.2) se zpravidla vychází až z rovnic 8(3.4), které jsou stejné pro pohyb popsaný rovnicemi 8(3.2) a 8(3.2'). Tyto rovnice popisují velice často uvažovaný případ proudění tekutiny, při kterém rychlost vzrůstá rovnoměrně ve směru kolmém ke směru pohybu tekutiny. Takové proudění vznikne mezi dvěma rovnoběžnými deskami  $P_1$  a  $P_2$ , z nichž jedna je pevná a druhá se pohybuje rychlostí  $\mathbf{V}$ , jestliže rychlost  $\mathbf{v}$  vrstev tekutiny bezprostředně přilehlých k deskám je shodná s rychlostí desek a mezi deskami se rychlost vrstev mění rovnoměrně. Proudění tohoto typu znázorněné na obr. 8.3 se nazývá *Couettovo*. Na obrázku jsou naznačeny též směry první a druhé karétské osy souřadnic užívané v rov-

nicích 8(3.2) až 8(3.11). Couettovo proudění se uvažuje při elementárním odvození Newtonova zákona pro proudění viskózních tekutin (viz rov. 8(6.35)).



Obr. 8.3 Couettovo proudění

Ukázali jsme, že změna rychlosti kontinua se souřadnicí určuje rychlost, s jakou se kontinuum deformuje. Přesný tvar závislosti udává tenzor rychlosti deformace 8(3.1). Při uvažovaném proudění mezi dvěma deskami má tento tenzor jedinou nenulovou složku

$$D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \right) = \frac{k}{2}. \quad 8(3.10)$$

Jak jsme ukázali, platí pro ni, uvažujeme-li malou deformaci kolem okamžitého stavu kontinua, vztah

$$D_{12} = \frac{\partial e_{12}}{\partial t}. \quad 8(3.11)$$

Složka  $D_{12}$  při proudění z obr. 8.3 bude dále často sloužit jako charakteristická hodnota pro veličinu rychlost deformace. Budeme vynechávat značení složek a místo rovnice 8(3.11) napíšeme symbolickou rovnici

$$D = \frac{\partial e}{\partial t}, \quad 8(3.12)$$

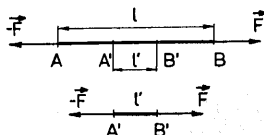
která vystihne skutečnost, že v rozměrovém pojetí lze psát

$$D = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial e}{\partial t}. \quad 8(3.13)$$

V rovnici 8(3.13) je  $v$  rychlost,  $x$  souřadnice,  $u$  posunutí,  $t$  čas a  $e$  deformace. Rychlost  $v$  lze pokládat za derivaci posunutí podle času,  $v = \partial u / \partial t$ , a deformaci  $e$  za derivaci posunutí podle souřadnice,  $e = \partial u / \partial x$ . Vztah 8(3.13), který dává do vztahu derivaci rychlosti podle souřadnice s rychlostí deformace, je výchozím vztahem při popisu viskózního, viskoelastického a plastického chování látek.

## 8.4 Napětí

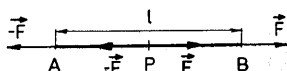
Doposud jsme pouze popisovali pohyb kontinua a neuvažovali jsme o silách, které na ně působí. Tuhé těleso, na které v různých místech působí síly, jejichž vektorový součet a výsledný moment jsou rovny nule, je v rovnováze (viz čl. 7.2). Pro stav tuhého tělesa není podstatné, jak velké jsou síly, které těleso udržují v rovnováze. V kontinuu vede různá velikost sil, které na ně v jednotlivých



Obr. 8.4 Přenášení sil, které jsou v rovnováze, tyčí

místech působí, i když kontinuum jako celek je v rovnováze, k různému stavu kontinua. Podle velikosti sil dochází k různě velkým deformacím, případně rychlostem deformací kontinua. Stav kontinua podrobeného vnějšímu silovému působení charakterizujeme veličinou, kterou nazýváme *napětí*.

Nejjednodušší případ tělesa v rovnováze, na něž působí vnější síly v různých bodech, je tyč  $l$ , na kterou v koncových bodech  $A, B$  působí ve směru tyče stejně velké síly opačného smyslu  $F$  a  $-F$  (viz obr. 8.4). Dále budeme předpokládat,



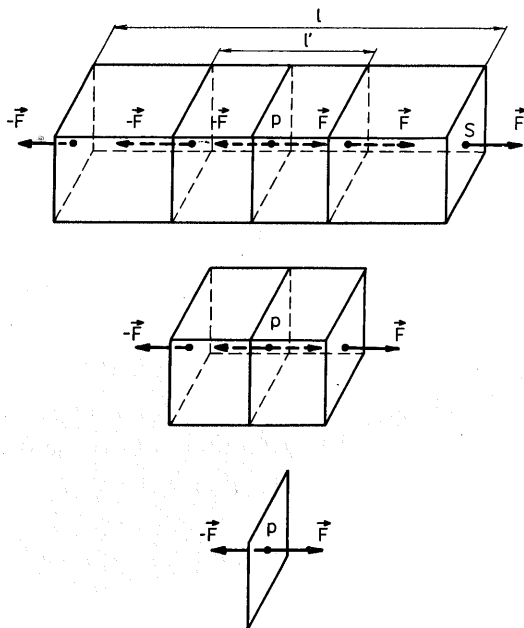
Obr. 8.5 Stav napjatosti v bodě  $P$  tyče

že libovolný úsek  $l'$  tyče je v rovnováze. V koncových bodech  $A', B'$  úseku  $l'$  pak působí stejné síly  $F$  a  $-F$  jako v koncových bodech  $A, B$  tyče  $l$ . V limitním případě nekonečně krátkého úseku  $l'$  můžeme připsat síly  $F$  a  $-F$  jako dvě síly charakterizující stav napjatosti v bodě. Na obr. 8.5 jsme tento bod označili  $P$ . Bod  $P$  je libovolný bod tyče, a proto v uvažovaném případě je stav napjatosti stejný v každém bodě tyče. Doposud jsme neuvažovali o příčných rozměrech tyče, a proto mluvíme o stavu napjatosti a ne přímo o napětí v bodě  $P$ .

Na obr. 8.6 je znázorněna tyč délky  $l$ , jejíž průřez má velikost  $S$ . Opět předpokládáme, že na koncích tyče působí síly  $F$  a  $-F$  a stejné dvě síly působí na libovolný úsek  $l'$  tyče. V limitním případě nekonečně krátké tyče  $l'$  docházíme k představě sil  $F$  a  $-F$  působících na jedinou plochu  $p$ . Jelikož plocha  $p$  vznikla limitním zkracováním tyče, mohli bychom též mluvit o dvojploše  $p$ . Pro stav kontinua v jednotlivých bodech plochy  $p$  je jistě důležité, jak velkým průřezem  $S$  jsou síly  $F$  a  $-F$  přenášeny. *Veličinu napětí zavedeme proto tak, že dělíme*

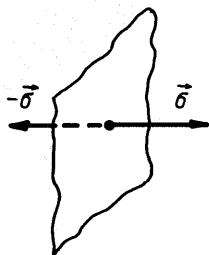


velikost působících sil velikostí průřezu  $S$ . Pro uvažovanou plochu  $p$  procházející libovolným bodem tyče je si pak možno představit napětí jako dvojici vektorů  $\sigma$  a  $-\sigma$ , jak je znázorněno na obr. 8.7. Velikost  $\sigma$  vektorů  $\sigma$  a  $-\sigma$  je rovna  $F/S$ .



Obr. 8.6 Napětí na ploše  $p$  kolmé k ose tyče

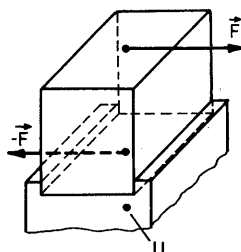
Předpokládáme, že v dostatečné vzdálenosti od konců tyče je silové působení rovnoměrně rozprostřeno podél celého příčného průřezu tyče, a tedy nezávisí na konkrétním způsobu, jakým je síla  $F$  na konci tyče realizována. Uvedenému,



Obr. 8.7 Čistý tah

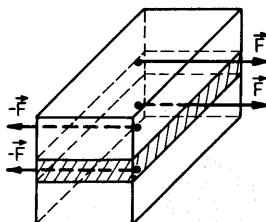
experimentálně ověřenému předpokladu se říká *Saint-Venantův princip*. Napětí na plochách kolmých k ose tyče má potom přesně tvar znázorněný na obr. 8.7 pouze pro body dostatečně vzdálené od konců tyče.

Tím, že silové působení  $F$  vydělíme velikostí průřezu  $S$  a zavedeme pojem napětí  $\sigma$  – rozměr veličiny je zřejmě síla/délka<sup>2</sup>, tj. v SI soustavě  $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$  (pascal) – přestáváme být vázáni na konkrétní příčný průřez tyče a pro stanove-



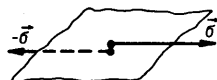
Obr. 8.8 Smykové namáhání kvádrů

ní napětí je důležitá pouze orientace plochy a ne její velikost. Napětí na různě orientovaných plochách procházejících daným bodem je obecně různé. Napětí na ploše kolmé k ose tyče z obr. 8.6 znázorněné na obr. 8.7 je velmi jednoduchým typem napětí, kdy vektor  $\sigma$  je kolmý k uvažované ploše. Takovému napětí budeme říkat *čistý tah*.



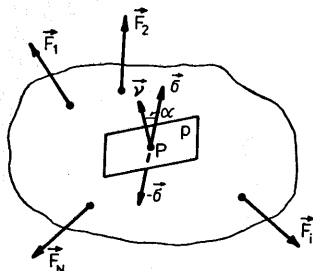
Obr. 8.9 Přenášení smykového namáhání kvádrem

Jiným jednoduchým a často uvažovaným případem napětí je *čistý smyk*. Uvažujeme kvádr namáhaný způsobem znázorněným na obr. 8.8. Uložení  $U$  kvádrů je takové, aby zabránilo jeho převrhnutí. Síly působící od uložení na kvádr vyrovnají nenulový výsledný moment sil  $F$  a  $-F$  na nulovou hodnotu, takže kvádr jako celek je v rovnováze. Obdobně jako v případě tahu budeme předpokládat, že na každý menší kvádr – na obr. 8.9 je jeden z takových kvádrů znázorněn šrafováním – znovu působí síly  $F$  a  $-F$ . Jestliže výška šrafovaného kvádrů konverguje k nule a předpokládáme-li, že vzniklá plocha (dvojplacha)



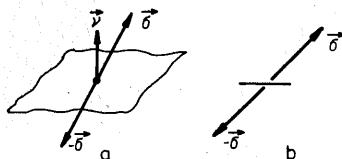
Obr. 8.10 Čistý smyk

je natolik vzdálená od spodní i vrchní podstavy kváдру, aby silové působení podél plochy bylo rovnoměrné, docházíme k představě smykového napětí znázorněného na obr. 8.10. Velikost  $\sigma$  vektoru napětí  $\sigma$  je rovna velikosti  $F$  síly  $F$  dělené plochou  $S$  podstavy kváдру;  $\sigma = F/S$ .



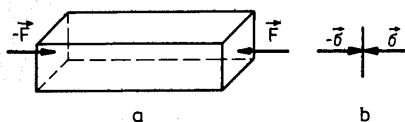
Obr. 8.11 Napětí na ploše  $p$  procházející bodem  $P$  kontinua, které je namáháno silami  $F_i$

Mějme kontinuum libovolného tvaru, na něž působí v různých bodech síly  $F_1, F_2, \dots, F_p, \dots, F_N$  (obr. 8.11). Potom na plochu  $p$  proloženou libovolným bodem  $P$  kontinua působí vektor napětí  $\sigma$ , který svírá nějaký obecný úhel



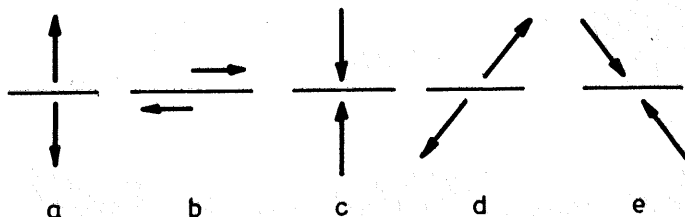
Obr. 8.12 Obecné tahové napětí (část  $a$  obrázku) a jeho symbol ( $b$ )

s normálou  $\vec{v}$  plošky. Je-li takové napětí typu znázorněného na obr. 8.12a, nazýváme je *obecné tahové napětí*. Stručně je budeme graficky značit způsobem označeným na obr. 8.12b. Působí-li síly na tyč způsobem naznačeným na obr. 8.13a, říkáme, že tyč je vystavena tlakovému namáhání. Na plochách kolmých ke směru sil  $F$  a  $-F$  působí pak v dostatečné vzdálenosti od konců tyče *čistě tlakové napětí*, stručně *čistý tlak*, který je schematicky znázorněn na obr. 8.13b. Směřuje-li vektor napětí  $\sigma$  k uvažované ploše, ale není-li k ní kolmý, mluvíme o *obecném tlakovém napětí*. Na obr. 8.14 jsou schematicky znázorněny všechny právě popsané druhy napětí.



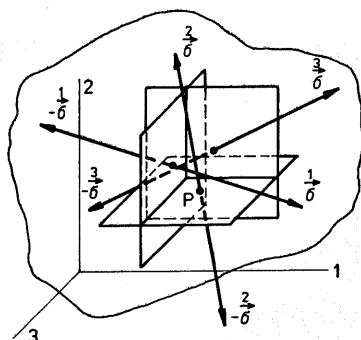
Obr. 8.13 Tyč namáhaná tlakem ( $a$ ) a symbol čistého tlaku ( $b$ )

Obdobně, jako jsme se v čl. 1.2 snažili zavést rychlost a v předcházejících dvou člancích deformaci a rychlost deformace jako charakteristiky bodu, je z početních důvodů velmi výhodné zavést i napětí jako veličinu udanou pro každý bod kontinua. V případě rychlosti jsme problém vyřešili tak, že jsme hmotnému



Obr. 8.14 Schematické znázornění různých typů napětí: a) čistý tah, b) čistý smyk, c) čistý tlak d) obecné tahové napětí, e) obecné tlakové napětí

bodu přiřadili vektorovou veličinu charakterizující jeho rychlost  $\mathbf{v}$  v každém okamžiku. V případě napětí, stejně jako jsme to provedli pro deformaci a rychlost deformace, přiřadíme každému bodu kontinua symetrický tenzor druhého řádu, který popisuje stav napětí v daném bodě. Každým bodem kontinua lze proložit nekonečně mnoho různě orientovaných plošek. Napětí na každé plošce



Obr. 8.15 Napětí na plochách procházejících bodem  $P$  kolmo k osám kartézské soustavy souřadnic

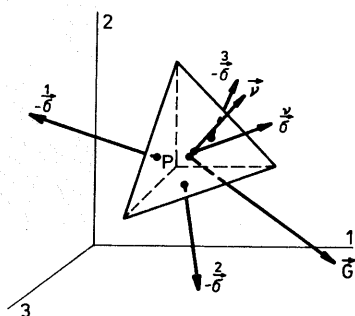
může být obecně různé. Zjistíme nyní, do jaké míry mohou napětí na různých plochách procházejících daným bodem být různá a zda je možné, známe-li napětí na některých z nich, vypočítat napětí na plochách zbývajících.

V bodě  $P$  kontinua budeme uvažovat napětí na plochách kolmých k osám kartézské soustavy souřadnic (viz obr. 8.15). Na obr. 8.15 kreslíme tato napětí jako obecná tahová napětí. Napěťový vektor působící na plochu kolmou k  $i$ -té

ose souřadnicové značíme  $\sigma^{i*}$ ). Kladnou hodnotu napěťového vektoru kreslíme na stěnách ploch přivrácených ke kladnému smyslu příslušných kartézských os. Kartézské složky napěťového vektoru  $\sigma^1$  budeme značit  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$  a obdobně značení užijeme i pro další dva vektory, tedy

$$\begin{aligned} \sigma^1 & (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}), \\ \sigma^2 & (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}), \\ \sigma^3 & (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}). \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Zjistíme nyní, zda na základě znalostí těchto devíti složek vektorů  $\sigma^i$  lze určit složky  $\sigma_i^v$  vektoru napětí  $\sigma^v$ , který působí na ploše procházející bodem  $P$ , jejíž



Obr. 8.16 Čtyřstěn užitý k výpočtu napětí  $\sigma^v$  na ploše o normále  $v$  procházející bodem  $P$

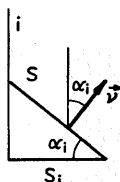
normálový vektor  $v$  má složky  $v_i$ . Budeme uvažovat v okolí bodu  $P$  elementární čtyřstěn tvořený třemi plochami kolnými k souřadnicovým osám a jednou plochou, jejíž normála je  $v$ . Čtyřstěn je znázorněn spolu s napěťovými vektory  $-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3$  a  $\sigma^v$  na obr. 8.16. Předpokládáme, že čtyřstěn je v rovnováze. Pro rovnováhu jsou podstatné vnější síly působící na čtyřstěn. Na obr. 8.16 jsou to ze sil působících na jeho stěny – takovým silám říkáme *plošné síly* – síla  $\sigma^v S$  a síly na plochách odvrácených od kladného smyslu kartézských os, tj. síly  $-\sigma^1 S_1, -\sigma^2 S_2$  a  $-\sigma^3 S_3$ . Velikost plochy kolmé k první ose souřadnic je označena  $S_1$  a analogický význam mají výrazy  $S_2$  a  $S_3$ . Velikost plochy s normálou  $v$  je označena  $S$ . Kromě plošných sil působí na čtyřstěn ještě *objemová síla*  $\mathbf{G}$ .

\*) Na obrázcích místo pravého horního indexu je užit index nad středem písmen označujících napětí. V textu nebylo možno z technických důvodů takové značení užit. V případě, kdy napětí se vyskytuje ve vyšší mocnině, je celý symbol napětí uzavřen závorkou a vrchní index za závorkou pak označuje stupeň mocniny. Např.  $(\sigma^2)^2$  znamená čtverec napětí, které působí na ploše kolmé k 2. souřadnicové ose.

Objemovou sílu zavádíme obdobně jako hustotu (viz 7(1.2)) limitním vztahem

$$\mathbf{G} = \lim_{V \rightarrow 0} \mathbf{F}/V, \quad 8(4.2)$$

kde  $\mathbf{F}$  je síla působící na konečný objem  $V$  obklopující bod, v němž vztahem 8(4.2) určujeme objemovou sílu. Nejčastěji uvažovanou objemovou silou je tíže.



Obr. 8.17 Pohled na plochy  $S$  a  $S_i$  čtyřstěnu ve směru jejich průsečnice

Čtyřstěn z obr. 8.16 pokládáme za elementární. Potom napěťové vektory  $\sigma^i$  a  $\sigma^v$  pokládáme za konstantní podél příslušných stěn čtyřstěnu a sílu  $\mathbf{G}$  za konstantní v celém objemu čtyřstěnu. Označíme-li  $V$  objem čtyřstěnu a uvědomíme-li si, že  $S$  je velikost plochy, na níž působí vektor  $\sigma^v$ , a  $S_i$  velikost ploch, na něž působí vektory  $-\sigma^i$ , můžeme podmínku rovnováhy čtyřstěnu zapsat v tvaru

$$\sigma^v S - \sigma^1 S_1 - \sigma^2 S_2 - \sigma^3 S_3 + V \mathbf{G} = 0. \quad 8(4.3)$$

Objem čtyřstěnu vyjádříme jako

$$V = \frac{Sh}{3}, \quad 8(4.4)$$

když plochu  $S$  pokládáme za jeho základnu a  $h$  za jeho výšku kolmou k ploše  $S$ . Plocha  $S_i$  je rovna ploše  $S$  násobené kosinem úhlu  $\alpha_p$ , který svírají roviny  $S$  a  $S_i$ . Na obr. 8.17 je pohled na roviny  $S$  a  $S_i$  ve směru jejich průsečnice. Z obrázku je patrné, že úhel  $\alpha_i$  je totožný s úhlem, který svírá normála  $\mathbf{v}$  plochy  $S$  s  $i$ -tou osou souřadnic. Složky jednotkového vektoru, a tedy i normálového vektoru  $\mathbf{v}$ , jsou rovny kosinům úhlů, které vektor svírá s osami souřadnic. Tedy  $v_i = \cos \alpha_p$ , a jelikož  $S_i = S \cos \alpha_p$ , můžeme psát

$$S_i = v_i S. \quad 8(4.5)$$

Použijeme vztahů 8(4.4), 8(4.5) a rovnici 8(4.3) přepíšeme na tvar

$$\sigma^v S - \sigma^1 v_1 S - \sigma^2 v_2 S - \sigma^3 v_3 S + \frac{Sh \mathbf{G}}{3} = 0. \quad 8(4.6)$$

Rovnici 8(4.6) vykrátíme nenulovým výrazem  $S$ . Dále budeme předpokládat, že objem čtyřstěnu, a tedy i jeho výška  $h$  konvergují k nule. V limitě vymizí poslední člen rovnice 8(4.6) a rovnici můžeme přepsat na tvar

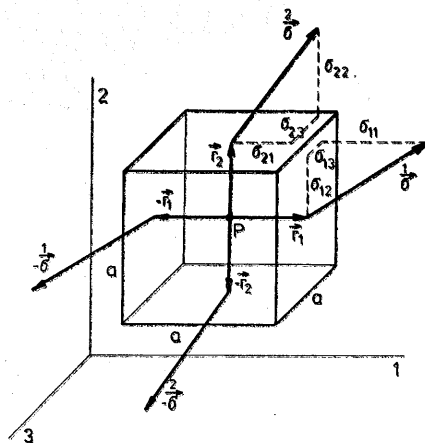
$$\sigma^v = \sigma^1 v_1 + \sigma^2 v_2 + \sigma^3 v_3. \quad 8(4.7)$$

Při konvergenci objemu čtyřstěnu k nule předpokládáme, že jeho tvar, tj. orientace jeho stěn, zůstává zachovaný. Pak plocha  $S$  čtyřstěnu konverguje k poloze, kdy prochází bodem  $P$  a její směr je dán stejným normálovým vektorem  $v$  jako dříve. Pro stanovení napětí na ploše není rozhodující velikost této plochy, ale pouze její orientace. Proto lze rovnicí 8(4.7) určit napětí na ploše s normálou  $v$ , i když velikost odpovídající plochy čtyřstěnu v limitě konverguje k nule. Rovnice 8(4.7) říká, že napěťovou sílu na ploše procházející bodem  $P$ , která má normálu  $v(v_1, v_2, v_3)$ , můžeme určit, známe-li napěťové síly  $\sigma^j$  působící na plochách kolmých ke kartézským souřadnicovým osám, a dává předpis, jak tuto napěťovou sílu vypočítáme. Ve složkové symbolice s užitím sčítacího pravidla můžeme rovnici 8(4.7) přepsat na tvar

$$\sigma_i^v = \sigma_{ji} v_j, \quad 8(4.8)$$

kde  $\sigma_i^v$  značí složky vektoru  $\sigma^v$  a  $\sigma_{ji}$  jsou v tabulce 8(4.1) udané složky vektorů  $\sigma^j$ . Z rovnice 8(4.8) je zřejmé, že k určení napětí na libovolné ploše procházející bodem  $P$  — její orientaci udává normálový vektor  $v_j$  — stačí znát devět složek  $\sigma_{ji}$  napěťových vektorů  $\sigma^j$ . Těchto devět složek určuje stav napětí v daném bodě.

Při odvození vztahu 8(4.8) jsme vyšli z podmínky, že při rovnováze musí výsledná síla působící na konečný objem kontinua být nulová. Co plyne z druhé podmínky, která praví, že výsledný moment sil působící na konečný objem kontinua je nulový? Kolem bodu  $P$  z obr. 8.15 si budeme myslet v kontinuu



Obr. 8.18 Náčrt k odvození vztahu  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

vymezenou krychli o hraně  $a$  se středem v bodě  $P$ . Stěny krychle jsou kolmé ke kartézským osám souřadnic (viz obr. 8.18). Budeme předpokládat, že celá krychle se nachází v diferenciálním okolí bodu  $P$ , neboli budeme předpokládat, že stav napětí v každém bodě krychle je stejný jako v bodě  $P$ . Je-li v nějaké oblasti kontinua stejný stav napětí v každém bodě, mluvíme o *homogenním napětí*. V celé uvažované krychli je homogenní napětí, což znamená, že napětí v každém jejím bodě včetně stěn je určeno stejnými vektory napětí  $\sigma^i$ , tj. stejnými složkami  $\sigma_{ij}$  těchto vektorů. V uvažovaném diferenciálním objemu i objemová síla  $\mathbf{G}$  má v každém bodě stejnou hodnotu, a tedy výsledný moment této síly vůči bodu  $P$  je nulový. Výsledný moment  $\mathbf{M}$  vnějších sil je potom dán pouze výsledným momentem vnějších plošných sil. Vnější plošné síly na stěnách kolmých k  $i$ -té ose souřadnic jsou  $a^2\sigma^i$  pro stěnu, jejíž normála má smysl shodný s kladným smyslem  $i$ -té osy a  $-a^2\sigma^i$  pro stěnu, jejíž vnější normála má opačný smysl, než je kladný smysl  $i$ -té osy. Vzhledem k homogenitě napětí je možno působíště sil  $a^2\sigma^i$ , respektive  $-a^2\sigma^i$ , položit do středu příslušných stěn krychle. Polohový vektor stěny, na níž působí síla  $a^2\sigma^i$ , vůči bodu  $P$  označíme  $\mathbf{r}_i$ , polohový vektor síly  $-a^2\sigma^i$  je potom  $-\mathbf{r}_i$ . S tímto označením dostáváme pro výsledný moment  $\mathbf{M}$  vnějších sil působících na uvažovanou krychli vyjádření

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_1 \times \sigma^1 a^2 + \mathbf{r}_2 \times \sigma^2 a^2 + \mathbf{r}_3 \times \sigma^3 a^2 + (-\mathbf{r}_1) \times (-\sigma^1 a^2) + \\ &+ (-\mathbf{r}_2) \times (-\sigma^2 a^2) + (-\mathbf{r}_3) \times (-\sigma^3 a^2) = \\ &= 2\mathbf{r}_1 \times \sigma^1 a^2 + 2\mathbf{r}_2 \times \sigma^2 a^2 + 2\mathbf{r}_3 \times \sigma^3 a^2. \end{aligned} \quad 8(4.9)$$

Z obr. 8.18 je zřejmé, že vektory  $\mathbf{r}_i$  mají složky

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \left( \frac{a}{2}, 0, 0 \right), \\ \mathbf{r}_2 &= \left( 0, \frac{a}{2}, 0 \right), \\ \mathbf{r}_3 &= \left( 0, 0, \frac{a}{2} \right). \end{aligned} \quad 8(4.10)$$

Uvážíme-li, že složky vektorů  $\sigma^i$  jsou dány výrazy 8(4.1), dostáváme přímým výpočtem z 8(4.9) pro jednotlivé složky momentu  $\mathbf{M}$  vyjádření

$$\begin{aligned} M_1 &= a^3 \sigma_{23} - a^3 \sigma_{32}, \\ M_2 &= -a^3 \sigma_{13} + a^3 \sigma_{31}, \\ M_3 &= a^3 \sigma_{12} - a^3 \sigma_{21}. \end{aligned} \quad 8(4.11)$$



Jelikož předpokládáme, že krychle je v rovnováze, musí výsledný moment  $\mathbf{M}$  vnějších sil být nulový. Z rovnice 8(4.11) potom plyne

$$\begin{aligned}\sigma_{23} &= \sigma_{32}, \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21},\end{aligned}\tag{8(4.12)}$$

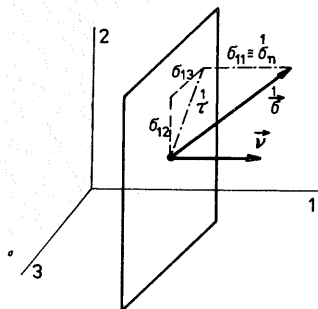
neboť zřejmě  $a \neq 0$ . Složky napěťových vektorů 8(4.1) nejsou nezávislé, ale musí splňovat vztahy 8(4.12). Devět složek vektorů  $\sigma^i$ , ze kterých lze podle 8(4.8) vypočítat napětí na libovolné plošce, není nezávislých, ale musí splňovat vztahy 8(4.12), které můžeme stručně zapsat ve tvaru

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.\tag{8(4.13)}$$

Pro  $i \neq j$  je rovnice 8(4.13) obecným vyjádřením rovnic 8(4.12) a pro  $i = j$  je samozřejmou identitou. Vzhledem k platnosti vztahů 8(4.12), resp. 8(4.13) stačí k úplnému určení stavu napětí v libovolném bodě  $P$  kontinua znalost šesti čísel  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  a  $\sigma_{23}$ . Složky vektorů napěťových sil 8(4.1) na plochách kolmých ke kartézským osám souřadnic se transformují podle rovnic D(4.4), tedy jako složky tenzoru druhého řádu.

Můžeme shrnout: *Stav napětí v každém bodě kontinua je popsán symetrickým tenzorem napětí  $\sigma_{ij}$ .* Složky tenzoru odpovídají (viz 8(4.1)) složkám vektorů napěťových sil  $\sigma^i$  působících na plochách proložených daným bodem kolmo ke směru kartézských os souřadnic. Vektory  $\sigma^i$  nejsou vzájemně zcela nezávislé, jejich složky musí splňovat vztahy 8(4.13).

Ze způsobu zavedení složek tenzoru  $\sigma_{ij}$  je zřejmé, že složky se shodnými



Obr. 8.19 Rozklad vektoru napětí  $\sigma^1$  na tahovou složku  $\sigma_{11} = \sigma_n^1$  a smykovou složku  $\tau^1$

indexy  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  a  $\sigma_{33}$  značí čistě tahové (případně čistě tlakové, když mají zápornou hodnotu) složky napěťových vektorů. Složky tenzoru se smíšenými indexy  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  a  $\sigma_{23}$  skládají smykové složky vektoru napětí; např. složky  $\sigma_{12}$  a  $\sigma_{13}$  skládají smykovou složku  $\tau^1$  vektoru  $\sigma^1$  (Pro označení smykové složky

napětí, tj. pro tečná napětí, se užívá písmene  $\tau$ ). Na obr. 8.19 je znázorněn rozklad vektoru napětí  $\sigma^1$  na tahovou či tlakovou složku  $\sigma_n^1 = \sigma_{11}$  a smykovou složku  $\tau^1$ . Na obrázku jsou též naznačeny kartézské složky vektoru  $\sigma^1$  neboli složky  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  a  $\sigma_{13}$  tenzoru napětí. Index  $n$  v symbolu  $\sigma_n^1$  značí složku vektoru  $\sigma^1$  do směru normály plochy.

V článku 7.4 jsme zavedli symetrický tenzor momentu setrvačnosti a naznačili jsme, jak lze nalézt jeho hlavní osy (srovnej s D.4). Jsou-li hlavní osy zvoleny za osy kartézské soustavy souřadnic, složky tenzoru se smíšenými indexy jsou v této soustavě souřadnic nulové. U tenzoru momentu setrvačnosti jsme složky se smíšenými indexy nazývali deviačními momenty. Hlavní osy lze nalézt pro každý symetrický tenzor druhého řádu, tedy i pro tenzor deformace a tenzor napětí. Podmínka analogická rovnici 7(4.24), tj. podmínka pro diagonalizaci tenzoru, je pro tenzor napětí velmi názorná. Hledáme-li osy, vůči kterým jsou nulové složky tenzoru  $\sigma_{ij}$  se smíšenými indexy, znamená to najít plochy, na kterých napětí je buď čistým tahem, nebo čistým tlakem. Složky vektoru napětí  $\sigma_i^v$  procházející daným bodem udává rovnice 8(4.8)

$$\sigma_i^v = \sigma_{ji}v_j .$$

Má-li napětí na určité ploše být čistým tahem nebo čistým tlakem, musí vektor napětí na této ploše mít stejný směr jako normála  $v_i$  plochy; vektor  $\sigma_i^v$  musí být skalárním násobkem normály

$$\sigma_i^v = \sigma v_i . \quad 8(4.14)$$

V rovnici 8(4.14) jsme skalár označili  $\sigma$ , abychom naznačili, že má fyzikální rozměr stejný jako  $\sigma_p$ , tedy rozměr napětí. Dosadíme-li požadavek 8(4.14) do rovnice 8(4.8), dostáváme rovnici

$$\sigma v_i = \sigma_{ji}v_j . \quad 8(4.15)$$

jejímž řešením najdeme směr  $v_p$ , v kterém je podmínka 8(4.14) splněna. Rovnice 8(4.15) je formálně shodná s rovnicí 7(4.24), a proto i její řešení bude stejné. Prohlédneme-li v čl. 7.4 naznačený postup řešení sekulární rovnice 7(4.24), vidíme, že i rozdíl mezi hledaným vektorem úhlové rychlosti  $\Omega_i$  v rovnici 7(4.24) a hledaným bezrozměrným normálovým vektorem  $v_i$  v rovnici 8(4.15) je nepodstatný. Zopakujeme v 7.4 uvedený výsledek řešení sekulární rovnice a vyslovíme jej v pojmech rovnice 8(4.15). Existují tři navzájem kolmé směry, ve kterých je rovnice 8(4.15) splněna. Proložíme-li těmito směry kartézskou soustavou souřadnic, budou napětí na plochách kolmých k osám souřadnic čistými tahy nebo čistými tlaky (na některé ploše může být čistý tah, na jiné čistý tlak). Vzhledem k významu složek tenzoru napětí budou v této soustavě souřadnic nenulové pouze složky  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  a  $\sigma_{33}$ . Budeme je nazývat *hlavní napětí* a užívat pro ně zkrácené označení  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ . Rovinám, na kterých tato napětí působí, budeme

říkat *hlavní roviny napětí* a osám kolným k těmto rovinám, tj. osám kartézské soustavy souřadnic, jejichž směr je dán řešením rovnice 8(4.15), budeme říkat *hlavní osy napětí* nebo *hlavní směry napětí*.

Při řešení konkrétních problémů často nastane případ, kdy všechny napěťové síly  $\sigma$  v různých bodech kontinua leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách. Položíme-li do jedné z těchto rovin první a druhou osu kartézské soustavy souřadnic, budou třetí složky tenzoru deformace ve všech bodech uvažovaného kontinua nulové. Napětí tohoto druhu označujeme jako rovinné. Ve zvolené soustavě souřadnic je *rovinné napětí* popsáno třemi složkami tenzoru deformace

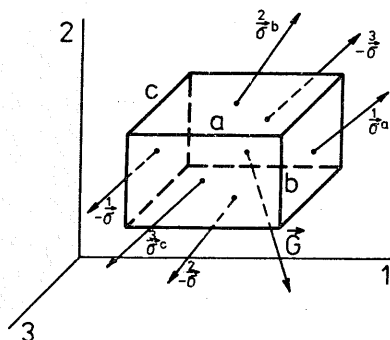
$$\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \text{a} \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} . \quad 8(4.16)$$

## 8.5 Rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua

O kontinuu v rovnováze mluvíme tehdy, je-li v rovnováze každá jeho část. Při odvozování rovnice rovnováhy vyjdeme z úvah týkajících se konečného objemu kontinua, jako při odvození rovnic 8(4.2) a 8(4.13). Výhodné je zvolit objem ve tvaru kvádru, jehož hrany o délkách  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou rovnoběžné s osami souřadnicovými (obr. 8.20). Podmínka rovnováhy o nulové výslednici vnějších sil pro uvažovaný kvádr zní

$$(\sigma^{1a} - \sigma^1)bc + (\sigma^{2b} - \sigma^2)ac + (\sigma^{3c} - \sigma^3)ab + \mathbf{G} abc = 0 . \quad 8(5.1)$$

V rovnici 8(5.1) stejně jako v článku 8.4 značíme  $\sigma^i$  vektor napětí působící na tu stranu plochy kolmé k  $i$ -té ose souřadnicové, která je obrácena k jejímu kladné-



Obr. 8.20 Náčrt k odvození rovnice rovnováhy kontinua

mu smyslu. Postupujeme-li ve směru rostoucích souřadnic  $x_i$ , napětí na první ploše kvádru kolmé k první ose souřadnic značíme  $-\sigma^1$ , napětí na druhé ploše kvádru kolmé k první ose značíme  $\sigma^{1a}$ . Obdobný je význam symbolů  $-\sigma^2$ ,  $\sigma^{2b}$ ,

$-\sigma^3, \sigma^{3c}$  (viz obr. 8.20). Plošné síly  $\sigma^{1abc}, -\sigma^{1bc}, \sigma^{2bac}, -\sigma^{2ac}, \sigma^{3cab}, -\sigma^3ab$  a objemová síla  $\mathbf{G}$ .  $abc$  jsou všechny vnější síly, které působí na uvažovaný kvádr, a proto jejich součet klademe v 8(5.1) roven nule. Ve smyslu vět o středních hodnotách diferenciálního počtu pokládáme  $\sigma^i$  za vhodně volenou hodnotu napětí v jednom bodě příslušné stěny kváдру a  $\mathbf{G}$  za hodnotu ve vhodně voleném bodu uvnitř kváдру. Podle 8(4.1) složky vektorů  $\sigma^i$  jsou složkami  $\sigma_{ij}$  tenzoru napětí. První složku vektorové rovnice 8(5.1) můžeme tedy zapsat v tvaru

$$(\sigma_{11}^a - \sigma_{11})bc + (\sigma_{21}^b - \sigma_{21})ac + (\sigma_{31}^c - \sigma_{31})ab + G_1abc = 0. \quad 8(5.2)$$

Podle úvah užívaných ve větách o střední hodnotě lze rozdíl hodnot složek napětí na dvou protilehlých stěnách vyjádřit jako násobek vzdálenosti obou ploch a derivace složky podle souřadnice kolmé k uvažovaným plochám, přičemž hodnota derivace přísluší některému vnitřnímu bodu kváдру. Tedy

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^a - \sigma_{11} &= \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right) a, \\ \sigma_{21}^b - \sigma_{21} &= \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \right) b, \\ \sigma_{31}^c - \sigma_{31} &= \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) c. \end{aligned} \quad 8(5.3)$$

S uvážením rovnice 8(5.3) přepíšeme rovnici 8(5.2) na tvar

$$\left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right) abc + \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \right) abc + \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) abc + G_1abc = 0. \quad 8(5.4)$$

Provádíme-li limitní zmenšování objemu kváдру, hodnotu objemu  $abc$  můžeme v rovnici 8(5.4) vykrátit a hodnoty  $\partial \sigma_{11}/\partial x_1$ ,  $\partial \sigma_{21}/\partial x_2$ ,  $\partial \sigma_{31}/\partial x_3$  a  $G_1$ , původně příslušné různým vnitřním bodům kváдру, v limitě přejdou na hodnoty příslušné stejnému bodu, ke kterému limitním postupem kvádr stáhneme. Pro tento bod pak platí rovnice

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_1 = 0. \quad 8(5.5)$$

Volba polohy kváдру v kontinuu i poloha bodu, ke kterému tento kvádr limitním postupem stáhneme, je libovolná, a proto rovnice 8(5.5) platí pro každý bod kontinua, které je v rovnováze.

Stejným postupem, jakým jsme z první složky vektorové rovnice 8(5.1) odvodili rovnici 8(5.5), můžeme z druhé složky rovnice 8(5.1) odvodit rovnici

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + G_2 = 0 \quad 8(5.6)$$

a z třetí složky rovnice 8(5.1) rovnici

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + G_3 = 0. \quad 8(5.7)$$

Rovnice 8(5.5), 8(5.6) a 8(5.7) tvoří hledanou *rovnici rovnováhy kontinua*, kterou s užitím složkové symboliky a sčítacího pravidla stručně zapíšeme

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0. \quad 8(5.8)$$

Síly uvažované v rovnici 8(5.1) představují všechny vnější síly působící na kvádr, i když kontinuum není v rovnováze. Pro kvádr pak můžeme napsat větu o pohybu hmotného středu soustavy (rovnice 5(2.32))

$$(\sigma^{1a} - \sigma^1)bc + (\sigma^{2b} - \sigma^2)ac + (\sigma^{3c} - \sigma^3)ab + \mathbf{G} abc = M \mathbf{a}_S, \quad 8(5.9)$$

ve které  $M$  je hmotnost kvádru,  $\mathbf{a}_S$  je zrychlení hmotného středu kvádru. Hmotnost  $M$  vyjádříme jako  $\rho abc$ , kde  $\rho$  je hustota v některém vnitřním bodě kvádru. Vektor posunutí je  $u_i = x_i - y_i$  (viz 8(2.2)). Při pohybu kontinua se s časem mění pouze konečná poloha částice  $y_i$  a ne výchozí poloha  $x_i$ . Tedy zrychlení částice  $a_i = d^2 y_i / dt^2 = d^2 u_i / dt^2$ . Zrychlení  $\mathbf{a}_S = d^2 \mathbf{u}_S / dt^2$ , kde  $\mathbf{u}_S$  je vektor posunutí končící v hmotném středu, tj. vnitřním bodu kvádru  $abc$ . Rovnici 8(5.9) můžeme pak přepsat na tvar

$$(\sigma^{1a} - \sigma^1)bc + (\sigma^{2b} - \sigma^2)ac + (\sigma^{3c} - \sigma^3)ab + \mathbf{G} abc = \rho \left( \frac{d^2 \mathbf{u}_S}{dt^2} \right) abc. \quad 8(5.10)$$

Užijeme úpravy 8(5.4) levé strany rovnice 8(5.10) a pro její první složku dostaneme

$$\left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right) abc + \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \right) abc + \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \right) abc + G_1 abc = \rho abc \frac{d^2 u_{S1}}{dt^2}. \quad 8(5.11)$$

Limitním zmenšováním kvádru získáme z 8(5.11) rovnici

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + G_1 = \rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad 8(5.12)$$

platnou v každém bodě kontinua. Rovnice 8(5.12) spolu s rovnicemi

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + G_2 = \rho \frac{d^2 u_2}{dt^2}$$

a

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + G_3 = \rho \frac{d^2 u_3}{dt^2},$$

kteří plynou z druhých dvou složek rovnice 8(5.10), tvoří *pohybovou rovnici kontinua*. Stručně ji v složkové symbolice zapíšeme

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}. \quad 8(5.13)$$

Rovnice 8(5.13) je výchozí rovnicí dynamiky kontinua. Užívá se například při vyšetřování pohybu tekutin (viz čl. 10.3) a při sledování vln šířících se kontinuem (srovnej kap. 11).

## 8.6 Reologická klasifikace látek, zobecněný Hookův zákon

Na začátku této kapitoly jsme zavedli pojmy deformace, rychlost deformace a napětí popisující stav kontinua. Vzájemný vztah mezi nimi závisí na charakteru kontinua neboli na vlastnostech látky, kterou jako kontinuum vyšetřujeme. Jiný bude pro plyn, kapalinu a pevnou látku a v rámci tohoto hrubého dělení bude různý např. pro vodu a med, pro kovy, krystaly, dřevo a gumu. Složité vztahy nastávají u látek ležících na pomezí mezi kapalnými a pevnými látkami, jakými jsou např. asfalty, laky, hlína, různé stavební, potravinářské materiály apod. Stanovit vztah mezi napětím, deformací a rychlostí deformace pro jednotlivé látky je úkolem reologie. Přesné řešení tohoto úkolu je zpravidla nemožné, proto reologie zavádí modely přibližně vystihující charakter deformačního chování různých skupin látek. Z Hookova zákona je známý nejjednodušší model předpokládající přímou úměrnost mezi napětím a deformací. Tento model dobře vystihuje chování řady kovových materiálů při nepřiliš velkých napětích a je základem klasické teorie pružnosti (viz kap. 9). Obecnější je předpoklad, že deformace je složitější funkcí napětí, který se užívá v teoriích nelineární elasticity. Nejjednodušší model viskózní tekutiny (název tekutina budeme dále užívat jako společné označení pro kapalinu a plyn) předpokládá přímou úměrnost mezi napětím a rychlostí deformace. Tento předpoklad je obsažen v Newtonově viskózním zákonu, a proto látku, která jej splňuje, nazýváme newtonovskou tekutinou. Je-li vztah mezi napětím a rychlostí defor-

mace složitější, mluvíme o neneutronovských tekutinách. Látky vykazující jak elastické, tak i viskózní vlastnosti, jsou popisovány viskoelastickými modely. Obecnější reologické modely popisují látky, u nichž se kombinuje elastické, viskózní i plastické chování. Dále v tomto článku se budeme zabývat podrobněji jednotlivými typy látek a jejich reologickými modely.

Předpoklad o přímé úměrnosti mezi napětím a deformací, známý z elementárního Hookova zákona pro tah nebo smyk, lze zobecnit a vyjádřit vztahem

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} , \quad 8(6.1)$$

kteřý udává, že složky  $\sigma_{ij}$  tenzoru napětí jsou lineární kombinací složek  $e_{kl}$  tenzoru deformace. Rovnice 8(6.1) je *nejobecnějším tvarem Hookova zákona*. Koeficienty  $C_{ijkl}$  v rovnici 8(6.1) vystihují vlastnosti látky, budeme jim říkat elastické koeficienty. Rovnice 8(6.1) platí v každém bodě uvažované látky. Je-li látka homogenní, tj. má-li ve všech svých bodech stejné vlastnosti, budou při dané orientaci os souřadnicových hodnoty jednotlivých koeficientů  $C_{ijkl}$  v celé látce stejné. Složky  $\sigma_{ij}$  a  $e_{kl}$  jsou složkami tenzoru, potom též koeficienty  $C_{ijkl}$  musí být složkami tenzoru, a to tenzoru čtvrtého řádu (viz mat. dodatek, čl. D.4). Kdyby byly všechny složky vzájemně nezávislé, bylo by jich  $3^4$ , tj. 81. Symetrie tenzorů  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{kl}$  a další podmínky redukuje počet nezávislých elastických koeficientů  $C_{ijkl}$  na 21 pro vystižení elastického chování krystalů triklinické (trojklonné) soustavy, tj. soustavy, která má nejmenší počet prvků symetrie. Počet nezávislých elastických koeficientů krystalových soustav vyšších symetrií je nižší, např. elastické vlastnosti krystalů krychlové soustavy jsou popsány třemi elastickými koeficienty. *Pro izotropní* (ve všech směrech stejné vlastnosti) *těleso se počet nezávislých elastických koeficientů redukuje na dva*. V teoretických úvahách bývají jako nezávislé voleny *Laméovy konstanty*  $\lambda$  a  $\mu$ . V měrné praxi se spíše užívá *modulu pružnosti v tahu* (Youngova modulu), označovaného  $E$ , a *modulu pružnosti ve smyku*  $G$ , který je totožný s Laméovou konstantou  $\mu$ . Význam modulů  $E$  a  $G$  bude podrobně vysvětlen v čl. 9.2 a 9.3. Užijeme-li Laméových konstant pro charakteristiku elastických vlastností izotropní látky, redukuje se rovnice 8(6.1) na tvar

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_1 + 2\mu e_{ij} , \quad 8(6.2)$$

kde  $e_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  je první invariant (viz rovnice D 4.4) tenzoru malých deformací a  $\delta_{ij}$  Kroneckerův symbol (viz D(2.6)). Rovnice 8(6.2), platná pro izotropní látku, se nazývá *zobecněný Hookův zákon*.

Jsou-li elastické vlastnosti látky popsány moduly  $E$  a  $G$ , zobecněný Hookův zákon je vyjádřen rovnicí

$$\sigma_{ij} = \frac{G(E - 2G)}{3G - E} \delta_{ij} e_1 + 2G e_{ij} . \quad 8(6.3)$$

Rovnice 8(6.2) a 8(6.3) lze napsat též jako závislosti  $e_{ij}$  na  $\sigma_{ij}$ , jak je ukázáno v řešené úloze č. 1.

Zobecněný Hookův zákon pro izotropní prostředí lze odvodit též z představy, že deformace izotropního tělesa se skládá ze dvou nezávislých částí, z deformace objemové a deformace tvarové. Ukážeme nejprve, jak lze tenzor malých deformací  $e_{ij}$  rozdělit na část popisující změnu objemu a část popisující tvarové změny. Užijeme-li invariant  $e_1$ , lze tenzor  $e_{ij}$  rozložit podle zřejmé identity

$$e_{ij} = \frac{e_1 \delta_{ij}}{3} + \left( e_{ij} - \frac{e_1 \delta_{ij}}{3} \right) \quad 8(6.4)$$

na dvě části, z nichž první označíme

$$e_{ij}^{(s)} = \frac{e_1 \delta_{ij}}{3} \quad 8(6.5)$$

a druhou

$$e_{ij}^{(o)} = e_{ij} - \frac{e_1 \delta_{ij}}{3}. \quad 8(6.6)$$

Část  $e_{ij}^{(s)}$  budeme nazývat *izotropní část* tenzoru malých deformací a část  $e_{ij}^{(o)}$  *deviátor* tenzoru malých deformací. Podle schématu 8(6.4) lze rozložit na izotropní část a deviátor každý tenzor druhého řádu. Izotropní část tenzoru  $e_{ij}^{(s)}$  má podle 8(6.5) v libovolné soustavě stejnou velikost rovnou  $e_1/3$ ;  $e_{11}^{(s)} = e_{22}^{(s)} = e_{33}^{(s)} = e_1/3$ . Takovému tenzoru odpovídá ve všech směrech stejné relativní prodloužení o velikosti  $e_1/3$ , smykové úhly jsou nulové, tvar objemových elementů se deformací nemění (viz úvahy na konci článku 8.2). První invariant  $e_1^{(s)} = e_{11}^{(s)} + e_{22}^{(s)} + e_{33}^{(s)} = 3e_1/3$  izotropní části  $e_{ij}^{(s)}$  tenzoru  $e_{ij}$  je shodný s prvním invariantem  $e_1$  celého tenzoru  $e_{ij}$

$$e_1^{(s)} = e_1. \quad 8(6.7)$$

Z 8(2.21) však elementárně plyne (viz řešená úloha č. 2), že v přiblížení malých deformací, které vždy při užití tenzoru  $e_{ij}$  předpokládáme, první invariant

$$e_1 = \frac{V - V_0}{V_0}, \quad 8(6.8)$$

kde  $V_0$  je objem libovolného tělesa v diferenciálním okolí bodu, v němž uvažujeme tenzor  $e_{ij}$ , před deformací a  $V$  objem téhož tělesa po deformaci. První invariant  $e_1$  tedy popisuje relativní objemovou změnu, tj. objemovou deformaci. Rovnice 8(6.7) tedy udává, že objemová deformace odpovídající izotropní části  $e_{ij}^{(s)}$  tenzoru malých deformací  $e_{ij}$  je rovna objemové deformaci odpovídající



celému tenzoru  $e_{ij}$ . První invariant deviátoru  $e_{ij}^{(o)}$  tenzoru  $e_{ij}$ , který vypočteme podle definiční rovnice 8(6.6),

$$e_1^{(o)} = e_{11} + e_{22} + e_{33} - \frac{3(e_{11} + e_{22} + e_{33})}{3}, \quad 8(6.9)$$

je nulový. Relativní objemová změna odpovídající deviátoru tenzoru malých deformací je nulová. Složky se smíšenými indexy deviátoru  $e_{ij}^{(o)}$  jsou nenulové a složky se shodnými indexy mají různou velikost. Úhly smyku deformace popsané takovým způsobem jsou nenulové, tvar objemových elementů se deformací mění. Shrňme: *Izotropní část  $e_{ij}^{(s)}$  popisuje objemovou deformaci a deviátor  $e_{ij}^{(o)}$  tvarovou deformaci odpovídající tenzoru malých deformací  $e_{ij}$ .*

Obdobně jako tenzor deformace rozložíme i tenzor napětí  $\sigma_{ij}$  na izotropní část a deviátor

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_1 \delta_{ij}}{3} + \left( \sigma_{ij} - \frac{\sigma_1 \delta_{ij}}{3} \right). \quad 8(6.10)$$

Vektor napětí  $\sigma_i^{(s)}$  na ploše o normále  $v_i$  odpovídající izotropní části

$$\sigma_{ij}^{(s)} = \frac{\sigma_1 \delta_{ij}}{3} \quad 8(6.11)$$

tenzoru napětí je dán podle 8(4.8) výrazem

$$\sigma_i^{(s)} = \sigma_{ij}^{(s)} v_j = \frac{\sigma_1 \delta_{ij}}{3} v_j = \frac{\sigma_1 v_i}{3}. \quad 8(6.12)$$

Z rovnice 8(6.12) plyne, že pro libovolnou plošku má vektor napětí  $\sigma_i^{(s)}$  směr normály plošky a na každé plošce stejnou hodnotu  $\sigma_1/3$ . Izotropní rásti  $\sigma_{ij}^{(s)}$  tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  odpovídá čistý tah nebo tlak stejné velikosti pro všechny orientace plošek procházejících bodem, pro nějž je tenzor  $\sigma_{ij}$  zadán. Je-li  $\sigma_1 < 0$ , odpovídá popisované napětí známému případu tlaku v kapalině, přičemž velikost tlaku p je rovna

$$p = -\frac{\sigma_1}{3}. \quad 8(6.13)$$

Napětí odpovídající deviátoru

$$\sigma_{ij}^{(o)} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_1 \delta_{ij}}{3} \quad 8(6.14)$$

tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  má obecný charakter.

Při odvození Hookova zákona pro izotropní látku předpokládáme, že izotropní část tenzoru napětí je úměrná izotropní části tenzoru deformace

$$\sigma_{ij}^{(s)} = K_1 e_{ij}^{(s)} \quad 8(6.15)$$

a deviator tenzoru napětí je úměrný deviatoru tenzoru deformace

$$\sigma_{ij}^{(o)} = K_2 e_{ij}^{(o)}. \quad 8(6.16)$$

Konstanty úměrnosti  $K_1$  a  $K_2$  jsou vzájemně různé. Za těchto předpokladů dostáváme pro tenzor napětí vyjádření

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_{ij}^{(o)} = K_1 e_{ij}^{(s)} + K_2 e_{ij}^{(o)}. \quad 8(6.17)$$

Dosadíme-li za  $e_{ij}^{(s)}$  a  $e_{ij}^{(o)}$  z 8(6.5) a 8(6.6), dostaneme po jednoduché úpravě

$$\sigma_{ij} = (K_1 - K_2) \frac{\delta_{ij} e_1}{3} + K_2 e_{ij}. \quad 8(6.18)$$

Poslední rovnice je až na značení konstant totožná s rovnicí 8(6.2) nebo 8(6.3), a je tedy *zobecněným Hookovým zákonem pro izotropní těleso*. Porovnáním rovnic dostáváme vztahy mezi konstantami užívanými v rovnicích 8(6.18) a 8(6.2)

$$\frac{K_1 - K_2}{3} = \lambda, \quad K_2 = 2\mu \quad 8(6.19)$$

a mezi konstantami z rovnic 8(6.18) a 8(6.3)

$$\frac{K_1 - K_2}{3} = \frac{G(E - 2G)}{3G - E}, \quad K_2 = 2G. \quad 8(6.20)$$

Ukázali jsme, že pro izotropní těleso získáme z předpokladů 8(6.15) a 8(6.16) zobecněný Hookův zákon stejně, jako když upravujeme užitím prvků symetrie rovnicí 8(6.1).

Objasníme nyní význam rovnic 8(6.15) a 8(6.16). Dosadíme-li do rovnice 8(6.15) vyjádření  $\sigma_{ij}^{(s)}$  podle 8(6.11) a  $e_{ij}^{(s)}$  podle 8(6.5), dostáváme po zkrácení

$$\sigma_1 = K_1 e_1. \quad 8(6.21)$$

Invariant  $\sigma_1$  pro  $\sigma_1 < 0$  je podle rovnice 8(6.13) roven záporně vzaté trojnásobné hodnotě tlaku  $p$ . Při  $\sigma_1 > 0$  je invariant  $\sigma_1$  roven trojnásobné hodnotě velikosti vektoru napětí 8(6.12), který v tomto případě popisuje ve všech směrech stejný čistý tah, pro nějž budeme užívat názvu *izotropní tah*. Velikost izotropního tahu můžeme, oprostíme-li se od vžité představy, že písmenem  $p$  musí být označen

tlak, tež označit  $p$ . Tlak bude odpovídat hodnotám  $p > 0$  a izotropní tah hodnotám  $p < 0$ . Rovnici 8(6.13)

$$\sigma_I = -3p \quad 8(6.22)$$

budeme pak pokládat za platnou pro kladné i záporné hodnoty  $\sigma_I$ . Invariant  $e_1$  má podle rovnice 8(6.8) význam relativní změny objemu  $(V - V_0)/V_0$ . Dále budeme pokládat přibližnou rovnici 8(6.8) za přesně splněnu a rovnici 8(6.21) přepíšeme na tvar

$$\frac{V - V_0}{V_0} = -\frac{3p}{K_1} \quad 8(6.23)$$

Rovnice 8(6.23) má velmi názorný význam; říká, že relativní změna objemu je úměrná působícímu tlaku, případně izotropnímu tahu  $p$ . Přitom tlaku, tj. hodnotě  $p > 0$ , odpovídá zmenšení objemu a izotropnímu tahu ( $p < 0$ ) odpovídá zvětšení objemu. Takovýto jednoduchý fyzikální předpoklad je obsahem rovnice 8(6.15) popisující objemovou deformaci. Koeficient úměrnosti  $3/K_1$  je roven převrácené hodnotě modulu stlačitelnosti  $k$ . *Modul stlačitelnosti* je definován vztahem

$$k = -V_0 \frac{dp}{dV} \quad 8(6.24)$$

a o platnosti vztahu  $k = K_1/3$  se lze přesvědčit, vypočteme-li podle definiční rovnice 8(6.24) modul příslušný závislosti  $p$  na  $V$  dané rovnicí 8(6.23).

Abychom objasnili význam rovnice 8(6.16), obrátíme pozornost na deformaci vyjádřenou tenzorem

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{23} = e_{13} = 0, \quad e_{12} \neq 0. \quad 8(6.25)$$

Jak jsme ukázali na konci čl. 8.2, vyjadřuje takový tenzor smyk o úhel

$$\alpha = 2e_{12} \quad 8(6.26)$$

v rovině kolmé k třetí ose souřadnic. Jeho první invariant  $e_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  je zřejmě nulový. Proto je nulová celá izotropní část tenzoru 8(6.25) a tenzor je shodný se svým deviatorem  $e_{ij} = e_{ij}^{(0)}$ . Rovnice 8(6.16) pro tenzor 8(6.25) se redukuje na jedinou rovnici

$$\sigma_{12} = K_2 e_{12}. \quad 8(6.27)$$

Smykové napětí  $\sigma_{12}$  je úměrné smykové deformaci  $e_{12}$ . To je stejný vztah, jaký uvažujeme v *elementárním Hookově zákonu pro smyk*, který bývá uváděn v tvaru

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}. \quad 8(6.28)$$

V rovnici 8(6.28) je úhel smyku  $\alpha$  označen  $\gamma$ ,  $G$  je modul pružnosti ve smyku a  $F/S$  je uvažováno jako smykové napětí, které v soustavě souřadnic, v níž uvažujeme tenzor 8(6.25), je vyjádřeno složkou  $\sigma_{12}$  tenzoru napětí. Rovnici 8(6.28) můžeme tedy přepsat na tvar

$$\sigma_{12} = G\alpha,$$

a užijeme-li vztahu 8(6.26), dostáváme dále

$$\sigma_{12} = 2Ge_{12}. \quad 8(6.29)$$

Porovnáme-li poslední rovnici s rovnicí 8(6.27), dostáváme vztah

$$K_2 = 2G = 2\mu \quad 8(6.30)$$

mezi konstantou  $K_2$  a modulem pružnosti  $G$ , který je totožný s Laméovým koeficientem  $\mu$ . Ukázali jsme, že pro deformaci popsanou tenzorem 8(6.25), rovnice 8(6.16) je až na užité označení totožná s elementárním Hookovým zákonem pro smyk. Pro obecnou deformaci rovnice 8(6.16) udává, že poměr složek se stejnými indexy deviatoru napětí a deviatoru deformace je stejný jako poměr smykového napětí ke smykové deformaci daný Hookovým zákonem pro smyk 8(6.28).

V rovnici 8(6.16) nahradíme víceindexové značení složek označením, ve kterém libovolnou složku deviatoru napětí označíme  $\sigma_s$  a jí odpovídající složku deviatoru deformace  $e_s$ . Dále v téže rovnici nahradíme podle 8(6.30) koeficient  $K_2$  dvojnásobnou hodnotou modulu smyku  $2G$ . Dostaneme tak rovnici

$$e_s = \frac{\sigma_s}{2G}, \quad 8(6.31)$$

kterou budeme užívat pro reologickou charakteristiku chování izotropní lineárně elastické látky při tvarové, tj. např. smykové deformaci. Charakteristiku doplníme rovnicí 8(6.23) určující chování látky při objemové deformaci. Relativní objemovou změnu  $(V - V_0)/V_0$ , která pro uvažované malé deformace je ve velmi dobrém přiblížení rovna invariantu  $e_p$ , označíme pro reologické úvahy

$e_v$  a budeme ji nazývat *objemová deformace*. Se symbolem  $e_v$  má rovnice 8(6.23), nahradíme-li v ní konstantu  $K_1/3$  modulem stlačitelnosti  $k$ , tvar

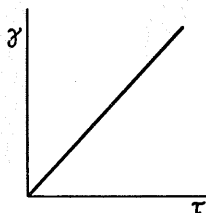
$$e_v = -\frac{p}{k}. \quad 8(6.32)$$

Izotropní lineárně elastická látka, které v reologické klasifikaci říkáme *hookovská látka* nebo též *klasická elastická látka*, je charakterizována dvěma rovnicemi 8(6.31) a 8(6.32), které udávají závislost tvarové a objemové deformace na působícím napětí. Vlastnosti jednotlivých hookovských látek se liší velikostí dvou charakteristických konstant, kterými v rovnicích 8(6.31) a 8(6.32) jsou modul pružnosti ve smyku  $G$  a modul stlačitelnosti  $k$ . Kromě konstant  $G$  a  $k$  je možno určit i jinou dvojici konstant, např. Laméovy koeficienty  $\lambda$ ,  $\mu$ , moduly  $E$ ,  $G$  a konstanty  $K_1$  a  $K_2$  z rovnic 8(6.15) a 8(6.16). Některé vztahy mezi uvedenými konstantami byly již uvedeny (viz např. rovnice 8(6.19), 8(6.20) a 8(6.30)), podrobná tabulka přepočtů je uvedena např. ve výše citované Brdičkově knize.

Při vyšetřování dalších izotropních lineárních látek budeme předpokládat, že jejich objemová deformace je popsána stejnou rovnicí 8(6.32) jako objemová deformace hookovské látky. Jednotlivé modelové látky se budou lišit pouze různou závislostí tvarové deformace na napětí. V reologické klasifikaci je budeme klasifikovat jedinou rovnicí, rovnicí pro tvarovou deformaci. Pro hookovskou látku je to rovnice 8(6.31). Pro další zjednodušení zápisu přepíšeme vztah 8(6.31) jako závislost úhlu smyku (viz rov. 8(6.26)) na smykovém napětí, tj. pro charakteristiku látky užijeme elementární rovnici 8(6.28)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad 8(6.33)$$

Rovnice 8(6.33) plyne z 8(6.31), uvědomíme-li si, že podle 8(6.26)  $\alpha = \gamma = 2e_{12}$  a pro smykové napětí  $F/S = \tau_{12}$  užijeme obvyklé jednoduché označení  $\tau$ . Gra-



Obr. 8.21 Závislost deformace  $\gamma$  na napětí  $\tau$  pro hookovskou látku

fické znázornění přímé úměrnosti  $\gamma$  na  $\tau$  charakteristické pro hookovskou látku je na obr. 8.21. Podrobnějšímu rozboru chování hookovské látky při různých typech namáhání a též odchýlkám od přímé úměrnosti mezi napětím a deforma-

cí, které u reálných látek zpravidla nastávají, se budeme věnovat v kapitole 9. Nyní si všimneme některých dalších modelových látek s jinými typy tvarové deformace, než má hookovská látka. Začneme u tekutin.

Při pohybu tekutin se jejich deformace může měnit s časem. Příklad pohybu, při kterém se deformace neustále mění, jsme probrali v čl. 8.3, kde jsme též ukázali, že k popisu takového pohybu je vhodnější užít tenzor rychlosti deformace  $D_{ij}$  než tenzor deformace  $e_{ij}$ . V předešlém studiu byl z tekutin podrobněji probrán model dokonalé kapaliny a dokonalého plynu. O dokonalé kapalině se předpokládá, že je nestlačitelná, o dokonalém plynu, že je stlačitelný. Pro obě dokonalé tekutiny se předpokládá nulová viskozita. Představa dokonalé tekutiny je vhodná k popisu základních mechanických jevů v tekutinách. Podrobněji se tímto modelem budeme zabývat v kapitole 10. Podobně jako model tuhého tělesa probraný v kap. 7 ani modely dokonalých tekutin neberou v úvahu materiálové zvláštnosti látek. V rovnicích odvozených na jejich základě se vyskytuje jen celková hmotnost tělesa nebo hustota látky. Materiálové konstanty určující deformační chování látek chybí. Proto model tuhého tělesa a modely dokonalých tekutin do reologické klasifikace zpravidla neuvažujeme.\*)

Reologicky jsou zajímavé až ty modely, které uvažují nenulovou viskozitu reálných látek. Mluvíme o *viskózních látkách*. Většina viskózních látek jsou tekutiny a z nich výraznější viskózní vlastnosti mají kapaliny. Proto se užívá též názvů *viskózní tekutiny* a *viskózní kapaliny*.

Nejjednodušší je model, který předpokládá přímou úměrnost mezi libovolnou složkou  $D_s$  deviatoru rychlosti deformace a odpovídající složkou  $\sigma_s$  deviatoru napětí

$$D_s = \frac{\sigma_s}{2\eta} . \quad 8(6.34)$$

Rovnice 8(6.34), jejíž tvar je analogický rovnici 8(6.31), se nazývá *Newtonův viskózní zákon*. Tato rovnice je charakteristickou rovnicí *newtonovské látky*. Konstantu  $\eta$  vystihující viskózní vlastnosti tekutiny nazýváme *koeficient viskozity* nebo stručně *viskozita*. Význam rovnice 8(6.34) bývá zpravidla objasňován na proudění popsaném rovnicemi 8(3.4) a znázorněném na obr. 8.3, který zde překreslujeme, avšak s poněkud obměněným značením (obr. 8.22). Rychlost  $dv/dy_2$ , s jakou se mění velikost rychlosti  $v$  od desky  $P_1$  k desce  $P_2$ , je úměrná velikosti  $\sigma$  vektoru napětí  $\sigma$  působícího na desce  $P_2$  (pevná deska  $P_1$  musí být držena nejméně vektorem napětí  $-\sigma$ ), přičemž konstanta úměrnosti je  $1/\eta$

\*) U dokonalých plynů je hustota proměnná a v jejich změnách se mohou projevit individuální vlastnosti plynu. Jedná se však o objemové změny, které ve zde uvedené jednoduché reologické klasifikaci neuvažujeme.

$$\frac{dv}{dy_2} = \frac{1}{\eta} \sigma . \quad 8(6.35)$$

V soustavě souřadnic zvolené na obr. 8.22 je velikost  $v$  rovna složce  $v_1$  rychlosti a  $v = v_1$  je funkcí pouze souřadnice  $y_2$ , tedy  $dv/dy_2 = \partial v_1/\partial y_2$ . Velikost napětí  $\sigma$  je rovna složce  $\sigma_{12}$  tenzoru napětí. Rovnici 8(6.35) můžeme přepsat na tvar

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_2} = \frac{\sigma_{12}}{\eta} . \quad 8(6.36)$$

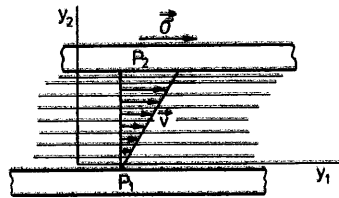
Přihlédneme-li k rovnici 8(3.10), dostáváme

$$D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \right) ,$$

a tedy

$$D_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\eta} . \quad 8(6.37)$$

Jelikož v uvažovaném případě proudění je  $D_{12}$  jedinou nenulovou složkou tenzoru rychlosti deformace a  $\sigma_{12}$  jedinou nenulovou složkou tenzoru napětí, jsou složky  $D_{12}$  a  $\sigma_{12}$  také jedinými složkami deviátoru rychlosti deformace a deviátoru napětí (viz úvahy mezi rovnicemi 8(6.26) a 8(6.27)). Rovnice 8(6.34) je tedy rozšířením rovnice 8(6.37) na obecný případ proudění, kdy předpokládáme, že vztah typu 8(6.37) platí mezi každou dvojicí složek se stejnými indexy deviátoru napětí a deviátoru rychlosti deformace.



Obr. 8.22 Proudění viskózní newtonovské tekutiny mezi pohybuující se deskou  $P_2$  a pevnou deskou  $P_1$

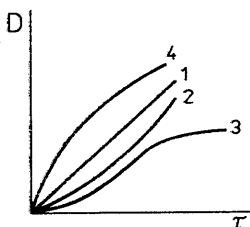
Dále v této kapitole budeme při charakteristice látky vycházet z rovnice 8(6.37), ve které vynecháme index u  $D$  a smykové napětí  $\sigma_{12}$  označíme obvyklým  $\tau$ ; dostaneme

$$D = \frac{\tau}{2\eta} . \quad 8(6.38)$$

Užitím vztahů 8(3.11), 8(6.26)  $\gamma = 2e_{12}$  ( $\alpha$  z rovnice 8(6.26) a  $\gamma$  z rovnice 8(6.28) jsou identické) a  $\sigma_{12} = \tau$  můžeme rovnici 8(6.37) přepsat též na tvar

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\tau}{\eta}. \quad 8(6.39)$$

Poslední dvě rovnice vystihují přehledně hlavní charakteristiku newtonovských tekutin, tj. přímou úměrnost mezi rychlostí deformace a aplikovaným smykovým napětím. Přímá úměrnost mezi rychlostí deformace a napětím odpovídající rovnici 8(6.34) je v dobrém přiblížení splněna jen pro plyny za běžných podmínek, pro vodu, líh, benzén a mnoho dalších nízkomolekulárních látek. Takové látky lze pokládat za newtonovské a k vystižení jejich viskózních vlastností stačí



Obr. 8.23 Závislost rychlosti deformace  $D$  na napětí  $\tau$  pro newtonovskou (křivka č. 1) a různé druhy nenewtonovských (křivky č. 2 až 4) látek

udat jedinou materiálovou konstantu – viskozitu  $\eta$ . Pro roztoky a taveniny vysokomolekulárních látek, pro různé látky užívané ve stavebnictví a potravinářství a řadu dalších látek však přímá úměrnost mezi napětím a rychlostí deformace není splněna ani přibližně. Takovým látkám, které nesplňují Newtonův viskózní zákon 8(6.34), říkáme *nenewtonovské látky*. Na obr. 8.23 je křivkou č. 1 znázorněna závislost rychlosti deformace  $D$  na napětí  $\tau$  pro newtonovskou látku, křivky č. 2, 3 a 4 udávají stejnou závislost pro různé druhy nenewtonovských látek. Rychlost deformace není pro nenewtonovské látky úměrná napětí – nebo obecněji není lineární funkcí napětí – a proto nenewtonovským viskózním látkám říkáme též *nelineárně viskózní látky*. Chování nelineárně viskózních látek je přesně popsáno pouze, známe-li průběh celé křivky

$$D = D(\tau). \quad 8(6.40)$$

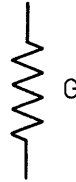
Závislost  $D = D(\tau)$  nebo inverzní závislost  $\tau = \tau(D)$  se nazývají *rovniciemi toku* dané látky. Pro praktické účely je nutno skutečnou rovnici toku i pro nenewtonovské látky aproximovat jednoduchými funkcemi, jejichž konstanty charakterizují v daném přiblížení skutečnou látku. Jednou z nejznámějších



rovnice aproximujících rovnice toku neneutronovských látek je rovnice *Ostwaldova-de Waeleova*

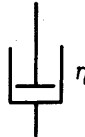
$$D = \frac{(\tau)^n}{2\eta^*} \quad 8(6.41)$$

Tato rovnice vystihuje chování látky dvěma konstantami  $n$  a  $\eta^*$ . Konstanta  $\eta^*$  je opatřena hvězdičkou, protože pro  $n \neq 1$  má jiný fyzikální rozměr než viskozita  $\eta$ . Pro  $n = 1$  splývá rovnice 8(6.41) s rovnicí 8(6.34). Mocninná funkce 8(6.41) zřejmě umožní přijatelně vystihnout chování látek odpovídající



Obr. 8.24 Hookova pružina

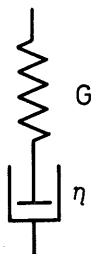
křivkám č. 2 a 4 na obr. 8.23. Pro křivku č. 2 bude exponent  $n$  z rovnice 8(6.41) větší než 1, pro křivku č. 4 bude  $n < 1$ . Křivku č. 3 z obr. 8.23 zřejmě závislosti tvaru 8(6.41) aproximovat nelze. Pro její vystižení je nutno užít složitější aproximační rovnice, než je rovnice Ostwaldova-de Waeleova. To je však již oblast podrobnější reologie kapalin, kterou zde probírat nebudeme.



Obr. 8.25 Newtonův píst

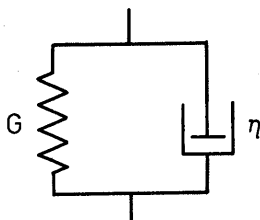
Ostrý přechod mezi kapalnou a pevnou fází nastává pouze pro jednoduché nízkomolekulární látky, které v pevné fázi vytvářejí pravidelnou krystalickou strukturu. Avšak ani pro takové látky z reologického hlediska hranice mezi kapalinou a pevnou látkou není zcela ostrá. Např. voda při rychle probíhajících dějích vykazuje elastické vlastnosti a led při dlouhodobém působení větší vnější síly trvale mění svůj tvar. Látky se složitější molekulární strukturou, jakými jsou různá skla, kaučuky, plastické hmoty, laky, asfalty, malty apod., nemají ostrý přechod mezi kapalnou a pevnou fází ani z termodynamického hlediska. Pro reologický popis látek, které leží na pomezí mezi kapalinami a pevnými látkami, je nutno zavést modely kombinující vlastnosti obou druhů látek. Nejjednoduš-

ším takovým modelem je model *viskoelastické látky*, která vznikne kombinací vlastností newtonovské viskózní kapaliny a hookovské viskózní látky. Pro větší názornost přiřazujeme modelům reologických látek grafické symboly. Vztah mezi napětím a deformací hookovské látky (rovnice 8(6.32) a obr. 8.21) je stejný



Obr. 8.26 Maxwellův model

jako vztah mezi silou protahující kovové spirálové pero a relativním prodloužením tohoto pera. Proto chování hookovské látky symbolizujeme spirálovým perem, pro nějž užíváme grafický záznam znázorněný na obr. 8.24. Chování newtonovské viskózní látky lze vystihnout pístem pohybujícím se ve viskózní kapalině; užívané symbolické označení pístu je znázorněno na obr. 8.25. Předpokládáme, že rychlost pohybu pístu je přímo úměrná síle na něj působící, což je závislost odpovídající vztahu mezi rychlostí deformace a napětím newtonov-



Obr. 8.27 Kelvinův (Voigtův) model

ské látky (viz rovnici 8(6.34) a křivku 1 z obr. 8.23). Nejjednodušší modely získáme, spojíme-li sériově nebo paralelně modely hookovské a newtonovské látky. Tak vznikne *model Maxwellův* znázorněný na obr. 8.26 a *model Kelvinův* (užívá se též názvu *Voigtův*) znázorněný na obr. 8.27. Hookovu pružinu z obr. 8.24 označíme písmenem  $H$ , newtonovský píst písmenem  $N$ , Maxwellův model  $M$ , Kelvinův model  $K$ , sériové spojení vodorovnou čarou – a paralelní spojení šikmou čarou  $/$ . Pro Maxwellův model  $M$  pak můžeme psát stručné označení  $M = H - N$ , které ukazuje, jak je model sestaven. Obdobně pro Kelvinův model dostáváme vyjádření  $K = H/N$ .

Každému modelu odpovídá reologická rovnice určující časovou závislost vztahu mezi napětím a deformací. Pro model  $H$  je takovou rovnicí rovnice 8(6.31), resp. 8(6.33), pro model  $N$  rovnice 8(6.34), resp. 8(6.39). Dále budeme pro modely užívat jednoduché rovnice 8(6.33) a 8(6.39), deformaci vystihneme úhlem smyku  $\gamma$  a napětí smykovým napětím  $\tau$ . Rovnice  $H$  modelu předpokládá, že deformace úměrná napětí se ustavuje v látce okamžitě. Změny deformace bezprostředně sledují změny napětí a obráceně, změny napětí bezprostředně sledují změny deformace. Časová závislost vztahu deformace a napětí v rovnici 8(6.39) je již složitější. Deformace a napětí mají stejný vztah jako funkce a její derivace. Například stálé deformaci odpovídá nulové napětí, stálému napětí odpovídá deformace probíhající konstantní rychlostí. Jak získáme reologické rovnice odpovídající Maxwellovu modelu  $M$ , znázorněnému na obr. 8.26, a Kelvinovu modelu  $K$  z obr. 8.27? Při odvozování reologických rovnic neuvažujeme ani délku, ani příčné rozměry jednotlivých částí modelu. Přičítáme-li dvěma částem modelu spojeným sériově deformace  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ , předpokládáme, že celému modelu přísluší deformace  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Napětí  $\tau$  při sériovém spojení částí modelu pokládáme za stejné v celém modelu  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ . Při paralelním spojení předpokládáme, že napětí  $\tau_1$  a  $\tau_2$  působící v jednotlivých částech modelu se sčítají  $\tau_1 + \tau_2 = \tau$ , deformaci v obou částech modelu pokládáme za stejnou  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Maxwellův model vznikne sériovým spojením Hookova členu  $H$ , pro jehož deformaci  $\gamma_1$  z rovnice 8(6.33) dostáváme

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{G}, \quad 8(6.42)$$

s Newtonovým členem  $N$ , pro nějž z 8(6.39) plyne

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = \frac{\tau_2}{\eta}. \quad 8(6.43)$$

V reologických úvahách předpokládáme homogenní deformace. Neuvažujeme tedy závislost deformace  $\gamma$  na souřadnicích, parciální derivaci nahradíme totální derivací a rovnici 8(6.43) přepíšeme na tvar

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\tau_2}{\eta}. \quad 8(6.44)$$

Podle právě vyložených pravidel při sériovém spojení částí modelu, tj. při sériovém spojení  $H$  a  $N$  členu, platí

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau$$

a

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma. \quad 8(6.45)$$

Abychom mohli využít vztah 8(6.45), musíme nejprve zderivovat rovnici 8(6.42) podle času  $t$ ; dostáváme

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{1}{G} \frac{d\tau_1}{dt}. \quad 8(6.46)$$

Platí-li  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ , platí též  $d\gamma/dt = d\gamma_1/dt + d\gamma_2/dt$  a sečtením rovnic 8(6.44) a 8(6.46) dostáváme

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}, \quad 8(6.47)$$

když napětí  $\tau_1$  a  $\tau_2$  označíme společnou hodnotou  $\tau$ . Rovnice 8(6.47) je hledaná *reologická rovnice odpovídající Maxwellovu modelu*. Reologickou rovnicí Kelvinova modelu získáme, když na rovnice 8(6.42) a 8(6.44) aplikujeme pravidla pro paralelní spojování částí modelů:  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  a  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Vynásobíme-li rovnici 8(6.42) výrazem  $G$  a rovnici 8(6.44) výrazem  $\eta$  a obě rovnice sečteme, dostaneme

$$\eta \frac{d\gamma}{dt} + G\gamma = \tau. \quad 8(6.48)$$

Rovnice 8(6.48) je *reologická rovnice Kelvinova modelu*.

Podle reologické rovnice zjistíme časový průběh jedné z veličin  $\tau$ ,  $\gamma$ , známe-li časovou závislost druhé. Je-li např. dána časová závislost  $\gamma = \gamma(t)$  pro látku popsanou Maxwellovým modelem, zderivujeme tuto závislost a získáme levou stranu rovnice 8(6.47), kterou označíme  $f(t)$ . Rovnice 8(6.47) je pak diferenciální rovnicí

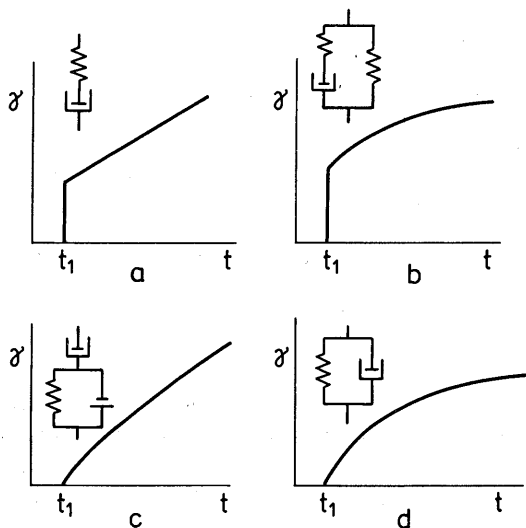
$$\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta} = f(t) \quad 8(6.49)$$

pro neznámý časový průběh  $\tau = \tau(t)$  napětí. Při konstantní deformaci  $\gamma = \gamma_0$  Maxwellova modelu  $f(t) = d\gamma/dt = 0$  a řešením rovnice 8(6.49) je

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{\eta t}{G}\right), \quad 8(6.50)$$

kde  $\tau_0$  je napětí v čase  $t = 0$ . Předpokládáme-li, že deformace  $\gamma_0$  byla v čase  $t = 0$  zavedena skokem, je  $\tau_0 = G\gamma_0$ . Je-li maxwellovská látka trvale defor-

mována, napětí v ní klesá s časem; mluvíme o relaxaci napětí. Pro  $M$ -model je relaxace napětí přesně exponenciální, vyjádřená rovnicí 8(6.50). Působí-li na  $M$ -model stálé napětí  $\tau = \tau_0$ , dostáváme po dosazení do rovnice 8(6.47)



Obr. 8.28 Modely a jim odpovídající závislosti deformace na čase  $t$  při konstantním napětí pro čtyři základní typy viskoelastických látek

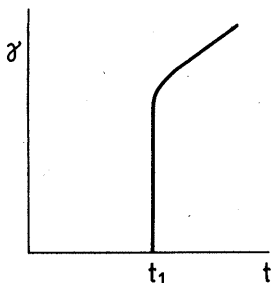
$d\gamma/dt = \tau_0/\eta$ , a tedy  $\gamma = (\tau_0/\eta)t + \gamma_0$ . Deformace  $\gamma_0$  je deformace v čase  $t = 0$ . Tato deformace, které říkáme okamžitá, je dána Hookovým členem  $M$ -modelu. Její velikost je tedy  $\tau_0/G$ . Pro celkovou deformaci  $\gamma$   $M$ -modelu při stálém napětí  $\tau = \tau_0$  dostáváme konečné vyjádření

$$\gamma = \tau_0 \left( \frac{t}{\eta} + \frac{1}{G} \right). \quad 8(6.51)$$

Podobně jako pro  $M$ -model lze nalézt závislost  $\tau(t)$  pro  $\gamma = \gamma_0$  a  $\gamma(t)$  pro  $\tau = \tau_0$  i pro Kelvinův model, vyjdeme-li z jeho reologické rovnice 8(6.48).

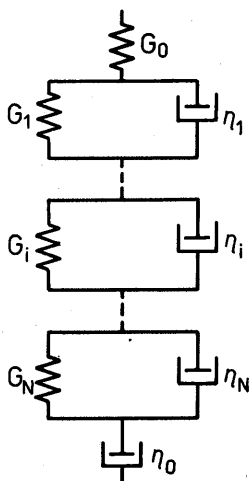
Jak jsme již uvedli, časovou závislost napětí  $\tau(t)$  při konstantní deformaci  $\gamma = \gamma_0$  nazýváme *relaxací napětí*. Časovou závislost deformace  $\gamma = \gamma(t)$  při konstantním napětí nazýváme *tečením (creepem)*. Jak probíhá creep způsobený konstantním napětím  $\tau = \tau_0$  zavedeným v čase  $t = t_1$  pro Maxwellův, Kelvinův a další dva poněkud složitější viskoelastické modely, je znázorněno na obr. 8.28. Čtyři modely z obr. 8.28 vystihují základní rysy chování čtyř typů viskoelastických látek. Při creepu se tyto typy liší tím, zda existuje okamžitá deformace a zda existuje neomezené tečení. Okamžitá deformace nastává u modelů z částí a) a b) obrázku, neomezené tečení u modelů z částí a) a c) obrázku. Všechny uvažované modely vystihují pouze základní charakter chování visko-

lastických látek. Lze např. těžko předpokládat, že creep u skutečné látky bude probíhat přesně podle křivky znázorněné na obr. 8.28 a). Je-li však creep skutečné látky dán křivkou znázorněnou na obr. 8.29, jeho základní rysy jsou vystiženy hrubým modelem 8.28 a). Stejně tak pro málokterou reálnou látku



Obr. 8.29 Příklad reálné creepové křivky

relaxace napětí bude mít přesně exponenciální průběh daný rovnicí 8(6.50), ale u řady látek bude napětí s časem relaxovat postupně od původní hodnoty až po hodnotu nulovou, což je druh závislosti vystižený Maxwellovým modelem. Význam obecných reologických modelů je vystihnout charakter závislosti, ne její detailní průběh. Při tom je důležité, že charakter závislosti při různých druzích namáhání modelu lze zpravidla podle tvaru modelu odhadnout i bez řešení příslušné reologické rovnice. V obecných reologických modelech je látka charakterizována několika málo konstantami. V modelech na obr. 8.28 jsou to dvě až tři konstanty. Chceme-li přesněji vystihnout chování reálné viskoelastické



Obr. 8.30 Obecný viskoelastický model

ké látky, musíme zvýšit počet konstant, kterými toto chování charakterizujeme. Místo jednoduchých modelů užíváme modelů s více členy, např. modelu znázorněného na obr. 8.30, který spojuje sériově  $N$  Kelvinových a jeden Maxwellův model. Reologická rovnice odpovídající modelu z obr. 8.30 je složitější než rovnice 8(6.47) nebo 8(6.48) a pro větší  $N$  je obtížně řešitelná.

Viskoelasticitu není nutno budovat na základě modelů. Pro chování viskoelastické látky je charakteristický průběh vzájemného poměru napětí a deformace při různých druzích namáhání. Známe-li např. časový průběh  $\tau = \tau(t)$  napětí v látce při stálé deformaci (relaxace napětí), tento průběh látku viskoelasticky charakterizuje a průběh vztahu napětí a deformace při jiných druzích namáhání vypočteme integrálními transformacemi funkce  $\tau(t)$ . Takto budovaná teorie viskoelastivity se nazývá nemodelová a je analogická obecné teorii elektrických sítí. Viskoelastická vybudovaná na základě Hookova modelu  $H$  a Newtonova modelu  $N$ , stejně jako zmíněná nemodelová teorie, jsou teoriemi lineárními; při stejném druhu namáhání látky předpokládáme, že  $n$ -krát větší hodnota napětí způsobí ve stejném čase  $t$   $n$ -krát větší deformaci. Ani tento předpoklad nebývá pro reálné látky splněn, K vystižení nelineárního chování viskoelastických látek se buduje nelineární teorie viskoelastivity. Pro matematickou obtížnost však zatím tato teorie dává jen málo experimentálně použitelných výsledků.

*Plastickými* nazýváme látky, u nichž tečení (tečením zde rozumíme pohyb, při kterém rychlost deformace  $D$  je různá od nuly) nastává až po překročení jisté mezní hodnoty napětí. Plastické vlastnosti vykazují kovy, mnohé makromolekulární látky, laky, stavební materiály a řada dalších látek. V reologické systematice charakterizujeme plastické chování *modelem Saint-Venantovým*, jehož



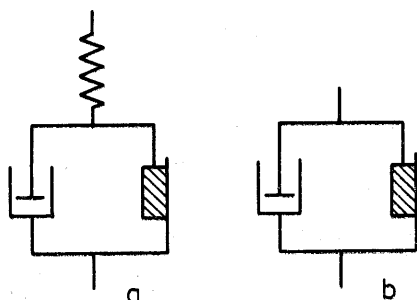
Obr. 8.31 Saint-Venantův model

grafický symbol je na obr. 8.31. *Saint-Venantova látka* (*StV-látka*) je modelová látka, která pro napětí menší, než je mezní napětí  $\tau_0$ , se chová jako tuhé těleso a pro napětí  $\tau = \tau_0$  teče nenulovou rychlostí. Dále se předpokládá, že pro  $\tau$  platí  $\tau \leq \tau_0$ . Chování *StV-látky* je popsáno rovnicemi

$$\begin{aligned} \gamma &= 0, \quad \text{a tedy též } D = 0 \quad \text{pro } \tau < \tau_0, \\ D &\neq 0 \quad \text{pro } \tau = \tau_0. \end{aligned} \quad 8(6.52)$$

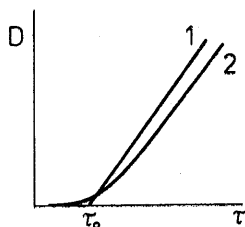
Grafický symbol na obr. 8.31 znázorňuje blok spočívající na rovné podložce, přičemž mezi blokem a podložkou působí síla smykového tření 2(5.7). Je-li vnější síla menší než síla smykového tření, k pohybu bloku nedojde, překročí-li vnější síla hodnotu smykového tření, dojde k pohybu. V *StV*-modelu budeme zde pokládat za totožný statický a dynamický součinitel smykového tření.

Kdyby vnější síla byla větší, než je síla tření, pohyb bloku by byl zrychlený. Tento případ vylučujeme tím, že u  $StV$ -modelu nepředpokládáme (viz 8(6.52)), že by napětí  $\tau$  mohlo být větší než  $\tau_0$ . Případu  $\tau = \tau_0$  odpovídá rovnost vnější síly a síly tření; blok se pohybuje konstantní rychlostí, jejíž velikost je určena



Obr. 8.32 Model Binghamův (a) a model (b) odpovídající rovnici 8(6.53)

počátečními podmínkami pohybu. Předpoklad, že při plastickém toku napětí nepřevyšuje hodnotu  $\tau = \tau_0$ , je idealizací, ale není to předpoklad zcela umělý. Jakmile látka začne plasticky téci, napětí se v ní už nemusí dále zvyšovat. Ve skutečných plastických látkách bývají poměry po dosažení mezního napětí složitější, ale přesto i v nejpodrobněji vypracované teorii plasticity, teorii plasticity kovů, je  $StV$ -model jedním z užívaných modelů chování látky.



Obr. 8.33 Závislost rychlosti deformace  $D$  na napětí  $\tau$  pro modely z obr. 8.32

$StV$ -model je základním modelem plastické látky podobně jako  $H$ -model a  $N$ -model jsou základními modely elastické a viskózní látky. Spojením  $H$ - a  $N$ -modelů jsme získali reologické modely viskoelastických látek, spojením  $StV$ -modelu s modely  $H$  a  $N$  získáme reologické modely dalších druhů látek. Takovým modelům budeme říkat *obecné reologické modely*. Spojíme-li sériově  $StV$ -model s modelem  $H$ , získáme *model*, který nazveme *Prandtlův* ( $P$ );  $P = H$ - $StV$ . Tento model vystihující chování látky, která před vznikem plastického tečení se elasticky deformuje, bývá užíván teorií plasticity kovů v oboru malých plastických deformací. Pro vystižení toku reologicky složitějších kapalin se často užívá *model Binghamův* ( $B$ );  $B = H$ -( $StV/N$ ). Jeho grafické vyjádření je



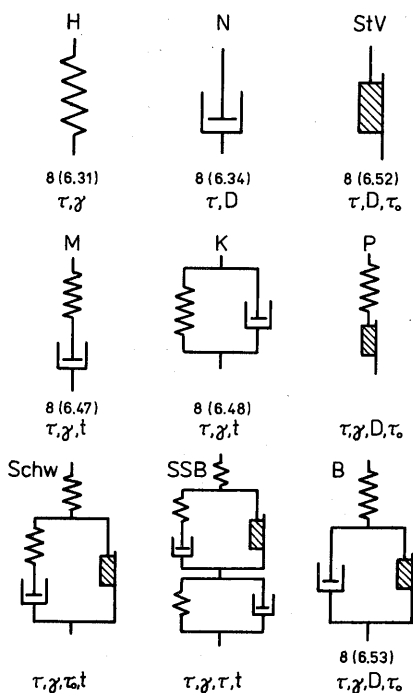
na obr. 8.32 a). Při výpočtech pohybu kapalin bývá někdy Hookův člen pokládán za tuhý (modul  $G \rightarrow \infty$ ) a uvažuje se pouze model z obr. 8.32 b). Takovému modelu odpovídá reologická rovnice

$$D = 0 \quad \text{pro } \tau < \tau_0,$$

$$D = \frac{\tau - \tau_0}{2\eta} \quad \text{pro } \tau > \tau_0. \quad 8(6.53)$$

Chování látky je charakterizováno dvěma konstantami, hodnotou mezního napětí  $\tau_0$  a viskozitou  $\eta$ , která určuje průběh toku pro  $\tau > \tau_0$ .

Na obr. 8.33 je křivkou 1 znázorněna závislost rychlosti deformace na napětí odpovídající rovnici 8(6.53), a tedy i modelu z obr. 8.32b). Křivkou 2 je znázorněn průběh závislosti pro reálnou kapalinu, jejíž tokové chování je vystiženo Binghamovým modelem. Kapaliny, jejichž reologické chování se blíží chování *B*-modelu, označujeme jako *binghamské* nebo též *plastické kapaliny*. Při sledování složitějších látek se zavádějí další modely, např. pro vystižení vlastností želatiny byl zaveden *model Schwedofův (Schw)*;  $Schw = H-(StV/M)$ ; pro moučné těsto byl použit *model Schofieldův* a *Scott-Blairův (SSB)*;  $SSB = Schw - K$ . Na obr. 8.34 podáváme přehled reologických modelů, které



Obr. 8.34 Přehled reologických modelů

jsme zavedli v této kapitole. U modelů uvádíme čísla jim odpovídajících reologických rovnic, pokud byly tyto rovnice v textu zavedeny, a symboly veličin, které mají pro chování modelu rozhodující význam.

## Řešené úlohy

1. Vypočítejte z rovnic 8(6.2), resp. 8(6.3) složky  $e_{ij}$  tenzoru deformace; obraťte zmíněné rovnice.

Řešení. Úžním rovnice 8(6.2)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_1 + 2\mu e_{ij} \quad (1)$$

dostáváme vztah mezi invarianty tenzorů napětí a deformace

$$\sigma_1 = \sigma_{ii} = \lambda \delta_{ii} e_1 + 2\mu e_{ii} = (3\lambda + 2\mu) e_1. \quad (2)$$

Dosadíme (2) do (1)

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda \delta_{ij} \sigma_1}{3\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{ij} \quad (3)$$

a vypočteme

$$e_{ij} = \frac{-\lambda \delta_{ij} \sigma_1}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (4)$$

Zcela analogicky z 8(6.3) plyne

$$e_{ij} = \frac{2G - E}{2GE} \delta_{ij} \sigma_1 + \frac{1}{2G} \sigma_{ij}. \quad (5)$$

2. Dokažte, že první invariant tenzoru deformace  $e_1$  popisuje objemovou deformaci, tj. že platí rovnice 8(6.8).

Řešení. V diferenciálním okolí bodu, v němž známe složky tenzoru  $e_{ij}$ , uvažujeme kvádr, jehož hrany délky  $l_{10}$ ,  $l_{20}$  a  $l_{30}$  jsou před deformací rovnoběžné se směry hlavních os deformace. Při této volbě soustavy souřadnic uvažovaný kvádr zůstane kvádrem i po deformaci, pouze délky jeho hran se změní na hodnoty  $l_1$ ,  $l_2$  a  $l_3$ . V přiblížení malých deformací platí vztah 8(2.21)

$$e_{11} = \frac{l_1 - l_{10}}{l_{10}} \quad (1)$$

a analogické vztahy pro složky  $e_{22}$  a  $e_{33}$  tenzoru deformace. Z (1) a z obou analogických vztahů plyne

$$l_1 = l_{10} + l_{10} e_{11}, \quad l_2 = l_{20} + l_{20} e_{22}, \quad l_3 = l_{30} + l_{30} e_{33}. \quad (2)$$

Vynásobením rovnic (2) dostáváme vyjádření pro objem kvádrů po deformaci

$$V = l_1 l_2 l_3 = l_{10} l_{20} l_{30} + l_{10} l_{20} l_{30} (e_{11} + e_{22} + e_{33}), \quad (3)$$

když zanedbáme jako malé všechny sčítance, ve kterých se složky tenzoru deformace vyskytují více než jednou. Uvědomíme-li si, že výraz  $l_{10} l_{20} l_{30}$  je roven objemu kvádrů před deformací  $V_0$  a  $e_{11} + e_{22} + e_{33}$  je první invariant tenzoru deformace  $e_1$ , plyne z (3) jednoduchou algebraickou úpravou dokazovaný vztah 8(6.8):

$$e_1 = \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (4)$$

3. Pro pět vyšetřovaných vzorků byly zjištěny následující vztahy mezi smykovým napětím  $\tau$ , deformací  $\gamma$  a případně i rychlostí deformace  $D$ . V posledních řádcích uvedených tabulek jsou uvedeny hodnoty veličin po odtižení vzorků.

a)

$\tau$ ( $10^5$ Pa)	$\gamma$
1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
20	$10^{-5}$
200	$10^{-4}$
2 000	$10^{-3}$
0	0

b)

$\tau$ ( $10^5$ Pa)	$\gamma$
1	$10^{-6}$
20	$2,5 \cdot 10^{-5}$
200	$3,5 \cdot 10^{-4}$
0	0

c) Při prvním pokusu, který byl prováděn až do napětí  $\tau = 2 \cdot 10^7$  Pa, byly zjištěny hodnoty:

$\tau$ ( $10^5$ Pa)	$\gamma$
1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
20	$10^{-5}$
200	$10^{-4}$
0	0

Při druhém pokusu, který byl prováděn do vyšších hodnot napětí, byla získána tabulka hodnot:

$\tau$ ( $10^5$ Pa)	$\gamma$
1	$0,5 \cdot 10^{-6}$
200	$10^{-4}$
1 000	$6 \cdot 10^{-4}$
1 200	$8 \cdot 10^{-4}$
1 450	$9 \cdot 10^{-4}$
	$- 3 \cdot 10^{-3}^*$ )
0	0

\* Po dosažení hodnoty  $\tau = 1 450 \cdot 10^5$  Pa začal vzorek přibližně konstantní rychlostí zvětšovat svou délku až do okamžiku, kdy byla síla působící deformací odstraněna. Tomuto okamžiku odpovídá hodnota deformace  $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ .

d)

$\tau(\text{Pa})$	$D(\text{s}^{-1})$
1	$10^3$
5	$5 \cdot 10^3$
10	$10^4$
0	0

e)

$\tau(10^3 \text{ Pa})$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1	$9 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$
5	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
10	$9 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$
20	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$

Symbolem  $\gamma_1$  je značena deformace po 10s, symbolem  $\gamma_2$  deformace po 60 s.

Určete o jaký druh látek – podle reologického chování – se jedná. Řešení:

a) Deformace je úměrná napětí a po odstranění napětí vymizí. Jedná se o hookovskou látku s modulem pružnosti ve smyku  $G = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ .

b) Deformace látky není úměrná napětí, po vymizení napětí deformace vymizí. Jedná se o nelineárně elastickou látku.

c) Při malých napětích se látka chová elasticky. Po překročení jistého mezního napětí začne téci a po odtížení deformace nevymizí. Jedná se o plastickou látku.

d) Rychlost deformace  $D$  je úměrná napětí. Jedná se o newtonovskou látku.

e) Deformace je úměrná napětí, ale časově závislá. Jedná se o lineární viskoelastickou látku. Pro viskoelastickou látku není podstatné, zda po odtížení je deformace nulová nebo není, proto v tabulce poslední řádka s údajem pro  $\tau = 0$  chybí.

# Pružnost

## 9.1 Základní úloha teorie pružnosti

Teorii pružnosti rozumíme ten obor mechaniky kontinua, který zkoumá rozložení deformace a napětí v elastické látce vystavené vnějšímu silovému poli obecného charakteru. Podrobně je tato teorie vysvětlena v řadě učebnic, např. v Brdičkové učebnici uvedené v seznamu literatury. Zde uvedeme pouze obecnou formulaci problému pro izotropní hookovskou látku a řešení několika jednoduchých příkladů. Část z nich lze řešit i elementárními prostředky, jak bylo ukázáno na střední škole. V předcházející kapitole jsme zavedli řadu základních pojmů teorie pružnosti: tenzor napětí  $\sigma_{ij}$  (čl. 8.4), tenzor malých deformací  $e_{ij}$  8(2.1), pojem objemové síly  $\mathbf{G}$  8(4.2), vektor posunutí  $u_i$  8(2.2), zobecněný Hookův zákon pro izotropní látku 8(6.2) a pohybovou rovnici kontinua (čl. 8.5).

Základní úlohou teorie pružnosti je najít napětí a deformaci v každém bodě tělesa, známe-li rozložení napětí nebo deformaci na povrchu tělesa. Přitom předpokládáme, že těleso je po deformaci v rovnováze. V klasické teorii pružnosti (hookovská látka) lze tuto úlohu pro izotropní tělesa formulovat takto: máme najít pro každý bod tělesa složky tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  a složky vektoru posunutí  $u_i$ , které vyhovují rovnicím rovnováhy 8(5.8)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = 0 \quad 9(1.1)$$

a Hookovu zákonu 8(6.2)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_1 + 2\mu e_{ij} \quad 9(1.2)$$

Rovnice 9(1.1) a 9(1.2) reprezentují devět rovnic pro devět neznámých funkcí  $\sigma_{ij}(x_l)$  a  $u_i(x_l)$ , uvážíme-li, že v rovnici 9(1.2) můžeme složky  $e_{ij}$  tenzoru deformace nahradit jejich vyjádřením podle složek vektoru posunutí 8(2.1)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 9(1.3)$$

Objemové síly  $G_i(x_j)$  jakožto vnější síly pokládáme za známé. Aby úloha byla jednoznačně řešitelná, je nutno zadat hodnoty funkcí  $\sigma_{ij}$  a  $u_i$  na okraji tělesa, neboli, jak se říká v teorii parciálních diferenciálních rovnic, je nutno zadat okrajové podmínky. Jsou-li na povrchu tělesa dána posunutí  $u_p$ , jsou tím také hned dány okrajové podmínky pro funkce  $u_i(x_j)$ . Dosazením do rovnic 9(1.3) získáme tenzor deformace  $e_{ij}$  pro body povrchu tělesa a dalším dosazením do Hookova zákona 9(1.2) i hodnoty složek  $\sigma_{ij}$  napětí v bodech povrchu tělesa, tedy okrajové podmínky pro hledané funkce  $\sigma_{ij}(x_j)$ . Známe-li vektory napětí  $\sigma^v$  na povrchu tělesa, vychází se při stanovení okrajových podmínek z rovnice 8(4.8)

$$\sigma_i^v = \sigma_{ij}v_j, \quad 9(1.4)$$

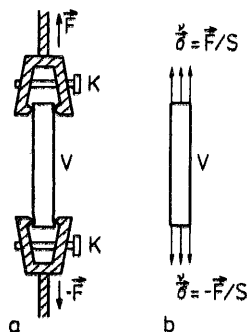
kteřá musí být splněna v bodech povrchu tělesa. Při řešení úlohy klasické teorie pružnosti vzhledem k předpokladu o malých deformacích není třeba rozlišovat mezi deformovaným a nedeformovaným stavem tělesa, čímž se problém zjednoduší.

Rovnice 9(1.1) a 9(1.2) pokládáme za rovnice určující tenzor napětí  $\sigma_{ij}$  a vektor posunutí  $u_i$ . Uvažujeme-li je jako rovnice pro neznámé složky  $\sigma_{ij}$  tenzoru napětí a  $e_{ij}$  tenzoru deformace, máme pouze devět rovnic pro dvanáct neznámých funkcí. Rovnicemi 9(1.3) je šest funkcí  $e_{ij}(x_j)$  určeno na základě tří funkcí  $u_i(x_j)$ . Mají-li funkce  $e_{ij}(x_j)$  popisovat deformaci spojitého tělesa, které zůstane spojitým i po deformaci, nelze je volit libovolně, ale musí splňovat jisté podmínky plynoucí z rovnic 9(1.3). Těmto podmínkám se říká *rovnice kompatibility deformací*. Rovnice kompatibility (viz učebnice Brdičková), je nutno připojit k rovnicím 9(1.1) a 9(1.2), chceme-li je řešit přímo pro neznámé  $e_{ij}$  a  $\sigma_{ij}$ .

Uvedením rovnic 9(1.1) až 9(1.4) jsme naznačili, co je problém teorie pružnosti. Při řešení jednotlivých úloh se základní formulace upravuje na tvary příhodnější ke konkrétním výpočtům. Jak se takové úpravy provádějí, způsoby řešení problémů, důkazy jednoznačnosti řešení apod., lze nalézt ve speciálních učebnicích teorie pružnosti.

Pro řešení konkrétních úloh teorie pružnosti je velmi důležitý *Saint-Venantův princip*, který umožňuje zjednodušit při analytickém zadání skutečné okrajové podmínky úlohy. Podle tohoto principu stav napětí a deformace v místech tělesa dostatečně vzdálených od povrchu, na kterém působí vnější síly, je téměř stejný, nahradíme-li jedno rozložení sil jiným o stejné výsledné síle a stejném výsledném momentu sil. Např. při běžné tahové zkoušce, kdy na vzorek  $V$  upevněný svorkami  $K$  působíme tahovými silami  $\mathbf{F}$  a  $-\mathbf{F}$  (viz obr. 9.1a), lze podle Saint-Venantova principu zanedbat vliv svorek na způsob, jakým jsou síly  $\mathbf{F}$ ,  $-\mathbf{F}$  na vzorek přenášeny. Napětí ve vzorku  $V$  v dostatečné vzdálenosti od jeho konců pokládáme za stejné, jako napětí způsobené napěťovým vektorem  $\sigma^v$ , jehož velikost by v obou čelních plochách vzorku byla konstantní a rovna  $F/S$ . Písmenem  $S$  je označena plocha průřezu vzorku. Směr a smysl vektoru  $\sigma^v$  na

každé z čelních ploch splývá se skutečně působícími silami  $-F$  a  $F$  (viz obr. 9.1b). Kdybychom skutečné rozložení vnějších sil při tahové zkoušce, z které je pro vzorek z hookovské látky odvozen elementární Hookův zákon pro

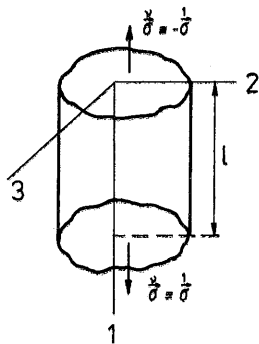


Obr. 9.1 Upevnění vzorku při tahové zkoušce (a) a předpokládaný stav napětí v něm (b)

tah, nemohli nahradit rozložením napěťových vektorů znázorněným na obr. 9.1b, bylo by analytické zpracování i tohoto nejjednoduššího elastického pokusu značně obtížné.

## 9.2 Tah

Tahem rozumíme namáhání vzorku znázorněné na obr. 9.1b. Vyšetříme podrobně, jak vypadá napětí a deformace ve vzorku při tomto jednoduchém typu namáhání. Soustavu souřadnic zvolíme způsobem naznačeným na obr. 9.2. O vzorku předpokládáme, že je kolmým válcem (tyčí) s obecným tvarem podstavy (kruh, obdélník nebo i obecnější plocha). Počátek soustavy souřadnic volíme v jednom bodě vrchní podstavy. Předpokládáme, že na válcových plochách je



Obr. 9.2 Soustava souřadnic, ve které popisujeme tahové namáhání vzorku

vnější napětí nulové a na podstavách válce působí vnější čistě tahové (případně čistě tlakové) napětí, které má podél celé plochy konstantní velikost rovnou poměru  $F/S$ , kde  $F$  je velikost vnější napěťové síly a  $S$  plocha průřezu válce. Příslušný napěťový vektor označíme  $\sigma^v$ . Vzhledem k volbě soustavy souřadnic a dříve užívanému označování vektorů napětí na plochách kolmých k osám souřadnic je  $\sigma^v = -\sigma^1$  na vrchní podstavě a  $\sigma^v = \sigma^1$  v bodech spodní podstavy válce.

Při vyšetřování tahu se zanedbává vliv vlastní tíhy vzorku, vnější objemová síla  $G_i$  se pokládá za nulovou. Rovnice rovnováhy 9(1.1) lze pak splnit, pokládáme-li složky tenzoru  $\sigma_{ij}$  za konstantní v celém objemu vzorku

$$\sigma_{ij}(x_l) = \sigma_{ij} . \quad 9(2.1)$$

Ve zvolené sestavě souřadnic vektor na vrchní podstavě válce má složky

$$\sigma^v = (-F/S, 0, 0)$$

a na spodní podstavě je

$$\sigma^v = (F/S, 0, 0) .$$

Okrajové podmínky 9(1.4)

$$\sigma_i^v = \sigma_{ij}v_j \quad 9(2.2)$$

pro vrchní podstavu, kde vektor vnější normály  $v$  má složky  $(-1, 0, 0)$ , dávají rovnice

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{F}{S} , \\ \sigma_{12} &= 0 , \\ \sigma_{13} &= 0 . \end{aligned} \quad 9(2.3)$$

Stejný výsledek plyne z podmínek 9(2.8) pro spodní podstavu, kde vnější normála  $v$  má složky  $(1, 0, 0)$  a  $\sigma^v$  složky  $(F/S, 0, 0)$ . Na válcové ploše má vektor normály  $v$  nulovou složku  $v_1$  a nenulovou alespoň jednu ze složek  $v_2, v_3$ . Napěťový vektor  $\sigma^v$  má na válcové ploše nulovou hodnotu. Rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{22}v_2 + \sigma_{32}v_3 , \\ 0 &= \sigma_{23}v_2 + \sigma_{33}v_3 , \end{aligned} \quad 9(2.4)$$

kteřé pro body válcové plochy plynou z podmínky 9(2.2), ukazují, že nulovou hodnotu musí mít též složky tenzoru napětí

$$\sigma_{22} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 . \quad 9(2.5)$$



Musíme totiž uvážit, že rovnice rovnováhy chceme splnit konstantními hodnotami  $\sigma_{ij}$  (viz 9(2.1)) v celém válci, a tedy i na jeho povrchu. V rovnicích 9(2.2)  $\nu_2$  a  $\nu_3$  mají různé hodnoty v různých bodech válcové plochy, ale hodnoty  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{32} = \sigma_{23}$  a  $\sigma_{33}$  musí ve všech bodech být stejné. Potom můžeme rovnice 9(2.4) splnit pouze, budou-li složky tenzoru napětí uvedené v rovnicích 9(2.4) nulové.

Položíme-li, jak ukazují rovnice 9(2.3) a 9(2.5),

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} \quad \text{a ostatní} \quad \sigma_{ij} = 0 \quad 9(2.6)$$

v celém objemu válce, bude splněna jak rovnice rovnováhy 9(2.1), tak i okrajové podmínky 9(2.2). Obraz napětí daný rovnicemi 9(2.6) bývá při tahovém namáhání vzorku rovnou předpokládán. Zde jsme si ukázali, že takový obraz je ve shodě s obecnými podmínkami řešení úloh teorie pružnosti, které jsme uvedli v předcházejícím článku.

Zjistíme, jaké deformace odpovídají napětí danému rovnicemi 9(2.6). Dosazením do Hookova zákona 9(1.2) dostáváme

$$\begin{aligned} F/S = \sigma_{11} &= \lambda e_1 + 2\mu e_{11}, \\ 0 &= \lambda e_1 + 2\mu e_{22}, \\ 0 &= \lambda e_1 + 2\mu e_{33}, \\ 0 &= 2\mu e_{12}, \\ 0 &= 2\mu e_{13}, \\ 0 &= 2\mu e_{23}. \end{aligned} \quad 9(2.7)$$

Z posledních tří rovnic soustavy 9(2.7) plyne

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0. \quad 9(2.8)$$

Osy rovnoběžné se zvolenou soustavou souřadnic jsou hlavními osami tenzoru deformace pro každý bod tělesa. Odečteme-li v soustavě rovnic 9(2.7) třetí rovnici od druhé, zjistíme, že

$$e_{22} = e_{33}. \quad 9(2.9)$$

Použijeme-li definiční rovnice (viz D 4.4)  $e_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  prvního invariantu tenzoru a rovnice 9(2.9), dostáváme z druhé nebo třetí rovnice soustavy 9(2.7) vztah mezi složkami  $e_{11}$  a  $e_{22}$  tenzoru deformace

$$e_{22} = \frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11}. \quad 9(2.10)$$

Jak jsme ukázali v článku 8.2 (rovnice 8(2.21)), složky  $e_{11}$  a  $e_{22}$  tensoru deformace mají význam relativního prodloužení ve směru první, resp. druhé osy souřadnic. Je-li vzorek z obr. 9.2 namáhán tahem, je  $e_{11}$  kladné a podle 9(2.10) je pak ( $\lambda$  a  $\mu$  jsou kladné konstanty)  $e_{22}$ , a tedy též  $e_{33}$  záporné. Ve směru tahu nastává ve vzorku relativní prodloužení, ve směru kolmém k tahu relativní zkrácení. Absolutní hodnota poměru relativního zkrácení k relativnímu prodloužení vzorku namáhaného tahem je další charakteristickou elastickou konstantou. Tato konstanta se nazývá *Poissonovo číslo* nebo též *Poissonův poměr*. Označíme ji  $\mu_P$  (aby nedošlo k záměně s Laméovým koeficientem  $\mu$ , přidáme index P k normou doporučenému označení) a z 9(2.10) pro ni dostáváme vyjádření

$$\mu_P = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad 9(2.11)$$

Rovnice 9(2.11) doplňuje v čl. 8.6 uvažované vztahy mezi charakteristickými elastickými koeficienty hookovské látky. V čl. 8.6 (rovnice 8(6.8)) jsme též ukázali, že invariant  $e_I$  má význam relativní změny objemu vzorku. Pro nestlačitelné materiály je

$$e_I = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0. \quad 9(2.12)$$

Při tahovém namáhání je podle 9(2.9)  $e_{22} = e_{33}$  a z 9(2.12) plyne

$$\left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{1}{2}. \quad 9(2.13)$$

Poissonovo číslo  $\mu_P$  pro nestlačitelné materiály má hodnotu 1/2. U stlačitelných látek při tahovém namáhání dochází ke zvětšení objemu, potom

$$e_{11} + 2e_{22} = e_I > 0.$$

Jelikož  $e_{11} > 0$  a  $e_{22} < 0$ , musí platit

$$2|e_{22}| < e_{11},$$

a tedy

$$\mu_P = \frac{|e_{22}|}{e_{11}} < \frac{1}{2}.$$

Pro běžné hookovské stlačitelné látky leží naměřená hodnota  $\mu_P$  v intervalu

$$\frac{1}{4} < \mu_P < \frac{1}{2}. \quad 9(2.14)$$

Užijeme-li rovnic 9(2.9) a 9(2.10), získáme pro první invariant tenzoru deformace vyjádření

$$e_I = e_{11} \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad 9(2.15)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu za  $e_I$  do první rovnice systému 9(2.7), dostáváme

$$\frac{F}{S} = \sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11}. \quad 9(2.16)$$

Rovnice 9(2.16), kterou, vyjádříme-li relativní prodloužení  $e_{11}$  jako poměr přírůstku délky  $\Delta l$  k původní délce  $l$  vzorku, můžeme psát ve tvaru

$$\frac{F}{S} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\Delta l}{l}, \quad 9(2.17)$$

je vyjádřením *elementárního Hookova zákona pro tah*. Porovnáme-li běžný zápis (známý např. ze středoškolského studia) tohoto zákona

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad 9(2.18)$$

s rovnicí 9(2.17), vidíme, že konstanta  $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  je rovna modulu pružnosti v tahu, neboli Youngovu modulu  $E$ ;

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad 9(2.19)$$

Tak jsme získali vyjádření Youngova modulu podle Laméových koeficientů.

Vektor posunutí  $u_i$  v soustavě souřadnic zvolené způsobem naznačeným na obr. 9.2 je dán rovnicemi

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1, \\ u_2 &= e_{22}x_2, \\ u_3 &= e_{33}x_3, \end{aligned} \quad 9(2.20)$$

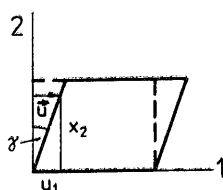
neuvažujeme-li, jak odpovídá vyšetřování deformace, možné posunutí a otočení tělesa jako celku. Lze se snadno přesvědčit, že vektor posunutí vyjádřený složkami 9(2.20) vyhovuje pro vyšetřované tahové namáhání vzorku rovnicím 9(1.3).

### 9.3 Smyk a torze

Vyjdeme-li při popisu smyku z vektoru posunutí  $u_i$ , je smyk v rovině kolmé k třetí ose souřadnic zadán rovnicemi

$$\begin{aligned} u_1 &= kx_2, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= 0. \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

Na obr. 9.3 je znázorněno posunutí řezu kvádrů kolmého k ose  $x_3$  odpovídající rovnicím 9(3.1). Obdélníkový průřez se deformuje na kosodélník. Pro jeden bod, původně ležící v rovině procházející počátkem kolmo k první ose souřadnic, je



Obr. 9.3 Deformace řezu kvádrů při smyku

naznačen vektor posunutí  $u$ . Z první rovnice soustavy 9(3.1) plyne pro úhel smyku  $\gamma$  vyjádření

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{u_1}{x_2} = k. \tag{9.3.2}$$

Vypočteme-li podle 9(1.3) složky tenzoru deformace odpovídající vektoru posunutí 9(3.1), dostáváme

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, & e_{22} &= e_{33} = 0, \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} k, \\ e_{13} &= e_{23} = 0. \end{aligned} \tag{9.3.3}$$

Pro další rozbor smyku vyjdeme z tenzoru malých deformací 9(3.3), který budeme uvažovat ve tvaru

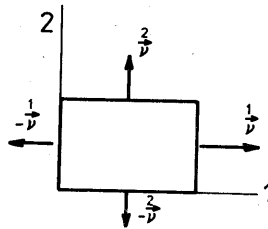
$$e_{12} = \frac{1}{2} \gamma, \quad \text{ostatní } e_{ij} = 0. \tag{9.3.4}$$

V posledním vyjádření jsme položili  $k = \operatorname{tg} \gamma = \gamma$ , kde  $\gamma$  je úhel smyku. Vzhledem k tomu, že deformace jsou podle předpokladu malé, píšeme rovnost

9(3.4) jako přesnou rovnici bez zdůraznění její přibližnosti. Deformaci 9(3.4) odpovídá podle Hookova zákona 9(1.2) napětí

$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12} = \mu\gamma, \quad \text{ostatní } \sigma_{ij} = 0. \quad 9(3.5)$$

Napětí dané v každém bodě tělesa rovnicemi 9(3.5) splňuje podmínky rovnováhy 9(1.1), když zanedbáme objemové síly  $G_i$ . Za smykově namáhané těleso budeme pokládat kvádr z obr. 9.3 a vyšetříme okrajové podmínky 9(2.3) na jeho



Obr. 9.4 Označení normál na hraničních plochách kvádrů

povrchu. Při formulaci okrajových podmínek budeme vycházet z nedeformovaného stavu tělesa, jak odpovídá klasické teorii pružnosti. Na obr. 9.4 jsou znázorněny normály na plochách kvádrů kolmých k souřadnicovým osám. Vektor normály  $v^1$  na ploše kolmé k první ose, orientujeme-li jej ve směru rostoucích hodnot  $x_1$ , má složky

$$v^1 \equiv (1, 0, 0).$$

Podobně složky normál  $v^2, v^3$  na plochách kolmých k druhé a třetí ose souřadnic při stejné orientaci jsou

$$v^2 \equiv (0, 1, 0) \quad v^3 \equiv (0, 0, 1).$$

Rovnice 9(1.4) pro hraniční plochu kvádrů kolmou k první ose, jejíž vnější normála je  $v$ , určuje složky vektoru napětí  $\sigma^v$ , který musí na plochu při smyku z vnějška působit

$$\sigma_1^v = \sigma_{j1} v_j^1 = 0,$$

$$\sigma_2^v = \sigma_{12} v_1^1 = \sigma_{12},$$

$$\sigma_3^v = 0.$$

Okrajové podmínky na protilehlé stěně kvádrů (tato plocha má vnější normálu  $-v^1$ ) dávají

$$\sigma_1^v = 0, \quad \sigma_2^v = -\sigma_{12}, \quad \sigma_3^v = 0.$$

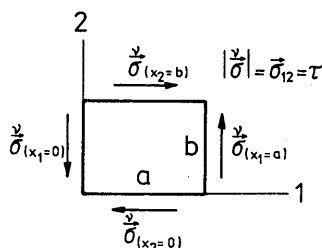
Na plochách kolmých k druhé ose souřadnic dostáváme

$$\begin{aligned}\sigma_1^v &= \sigma_{j1} v_j^2 = \sigma_{21}, \\ \sigma_2^v &= \sigma_3^v = 0\end{aligned}$$

pro plochu s vnější normálou  $\mathbf{v}^2$  a

$$\sigma_1^v = -\sigma_{21}, \quad \sigma_2^v = \sigma_3^v = 0$$

pro plochu s vnější normálou  $-\mathbf{v}^2$ . Obdobně lze vypočítat, že na plochách kolmých k třetí ose souřadnic je vektor napětí  $\sigma^v$  nulový. Vektory  $\sigma^v$  působící při smyku na kvádr jsou naznačeny na obr. 9.5. Působíme-li na vrchní podstavu kvádru silou  $\mathbf{F}$  a na spodní silou  $-\mathbf{F}$ , jak je naznačeno na obr. 8.8, bude, uvážíme-li tvrzení Saint-Venantova principu (konec čl. 9.1), smykové napětí  $\tau = F/S$ . Zvolíme-li v obr. 8.8 soustavu souřadnic tak, že druhá osa je kolmá k podstavám, na něž působí síly  $\mathbf{F}$  a  $-\mathbf{F}$ , a první osa má směr působící síly  $\mathbf{F}$ , dostáváme případ, který jsme právě vyšetřovali. Smykové napětí je rovno složce  $\sigma_{12}$  tenzoru napětí  $\sigma_{12} = F/S$ . Výpočtem jsme ukázali, že k vytvoření smyku je kromě sil  $\mathbf{F}$  a  $-\mathbf{F}$  působících na plochy kolmé ke druhé ose souřadnic nutno působit i silami, které vytvářejí stejně velké smykové napětí  $\sigma_{12}$  i na plochách kolmých k první ose souřadnic (viz. obr. 9.5). Při výkladu k obr. 8.8 jsme uváděli, že tyto síly přeneseme na vzorek uložení  $U$  zabraňující převrácení vzorku jako celku. Nyní vidíme, že toto uložení musí být takové, aby podle Saint-Venantova principu vytvořilo ve vzorku na plochách kolmých k druhé ose

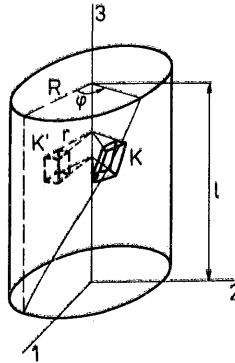


Obr. 9.5 Vektory napětí  $\sigma^v$  působící na povrchu kvádru při smyku

souřadnic  $v$  ne příliš velké vzdálenosti od upevnění rovnoměrně rozložené smykové napětí o velikosti  $\sigma_{12}$ . V tomto odstavci v souvislosti s odkazem na obr. 8.8 vyjadřujeme smykové napětí jako  $\tau = \sigma_{12} = F/S$ . Dosadíme-li toto vyjádření do rovnice 9(3.5), dostáváme znovu *elementární Hookův zákon pro smyk* 8(6.28)

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu\gamma \quad \text{neboli} \quad \gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}. \quad 9(3.6)$$

Torzi rozumíme deformaci tyče (obecného válce), při níž dochází k vzájemnému stáčení průřezů kolmých k podélné ose tyče. Rozebereme podrobněji torzi tyče kruhového průřezu neboli torzi přímého válce s kruhovou podstavou (obr. 9.6).

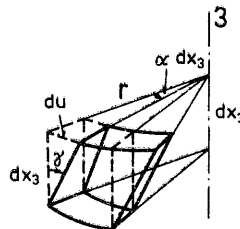


Obr. 9.6 Torze tyče kruhového průřezu

Mírou torze je úhel  $\alpha$  stočení dvou průřezů vzdálených od sebe o jednotkovou délku. Je-li délka válce  $l$ , je úhel  $\varphi$  stočení vrchní podstavy oproti spodní podstavě dán výrazem

$$l\alpha = \varphi . \quad 9(3.7)$$

Obecný element válce je posunut (translace), otočen a deformován. Na obr. 9.6 je znázorněn jeden takový element. Jeho postavení před torzí je označeno  $K'$ , po torzi  $K$ . Neuvažujeme-li posunutí a otočení kolem třetí osy, prodělá každý



Obr. 9.7 Smyková deformace elementu válce podrobeného torzi

element válce prostý smyk znázorněný na obr. 9.7. Výška elementu znázorněného na obr. 9.7 je  $dx_3$ . Pootočení roviny, ve které se nachází vrchní podstava elementu, proti rovině spodní podstavy je tedy  $\alpha dx_3$ . Pro element vzdálený  $r$  od osy válce lze posunutí  $du$  vrchní podstavy oproti spodní vyjádřit jako

$du = r\alpha dx_3$ . Pro úhel smyku  $\gamma$  v uvažovaném přiblížení, kdy  $\operatorname{tg} \gamma$  pokládáme roven  $\gamma$ , dostáváme

$$\gamma = du/dx_3 = r\alpha. \quad 9(3.8)$$

Z elementárního Hookova zákona 9(3.6) pak pro smykové napětí  $\tau$  působící na podstavách elementu kolmých k ose válce plyne

$$\tau = \mu r\alpha. \quad 9(3.9)$$

V soustavě souřadnic zvolené na obr. 9.6 je osa válce třetí osou souřadnic a smykové napětí na plochách kolmých k této ose je tvořeno složkami  $\sigma_{31}$  a  $\sigma_{32}$  tenzoru napětí, tedy  $(\sigma_{31})^2 + (\sigma_{32})^2 = (\tau)^2$ . Rovina smyku všech elementů je kolmá k poloměru  $r$ , proto i smykové napětí 9(3.9) je kolmé k poloměru. Skalární násobek jeho složek  $\sigma_{31}$  a  $\sigma_{32}$  s vektorem o složkách  $(x_1, x_2)$ , který míří ve směru poloměru, musí být nulový. Z podmínky

$$(\sigma_{31})^2 + (\sigma_{32})^2 = (\tau)^2 = \mu^2 r^2 \alpha^2 \quad 9(3.10)$$

a

$$\sigma_{31}x_1 + \sigma_{32}x_2 = 0$$

dostáváme pro složky  $\sigma_{31}$  a  $\sigma_{32}$  vyjádření

$$\sigma_{31} = -\mu\alpha x_2$$

a

$$\sigma_{32} = +\mu\alpha x_1. \quad 9(3.11)$$

(Podmínkám 9(3.10) vyhovuje i řešení  $\sigma_{31} = +\mu\alpha x_2$  a  $\sigma_{32} = -\mu\alpha x_1$  odpovídající opačnému smyslu torze. Toto řešení však z hlediska deformace není třeba rozlišovat od řešení 9(3.11), a proto budeme dále rozebírat jen řešení 9(3.11).) Při torzi nepředpokládáme působení jiných než právě uvažovaných smykových napětí, proto položíme všechny ostatní složky tenzoru napětí rovny nule. Tenzor napětí při torzi kruhového přímého válce má složky

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0, \\ \sigma_{31} &= -\mu\alpha x_2, \\ \sigma_{32} &= +\mu\alpha x_1. \end{aligned} \quad 9(3.12)$$



Z rovnic 9(3.12) užitím Hookova zákona 9(1.2) dostáváme pro složky tenzoru deformace

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0, \\ e_{31} &= \frac{-\alpha x_2}{2}, \\ e_{32} &= \frac{\alpha x_1}{2}. \end{aligned} \tag{9(3.13)}$$

Zanedbáme-li působení objemových sil, vyhovuje napětí 9(3.12) podmínkám rovnováhy, jak se lze přesvědčit dosazením jeho složek do rovnic 9(1.1). Napětí na plášti válce při torzi má být nulové. Okrajové podmínky 9(1.4) pro plášť válce po dosazení složek napětí 9(3.12) dávají

$$\begin{aligned} \sigma_{13}v_3 &= 0, \\ \sigma_{23}v_3 &= 0, \\ \sigma_{31}v_1 + \sigma_{32}v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{9(3.14)}$$

Normála k plášti válce má nulovou třetí složku  $v_3$ , a proto první dvě rovnice jsou triviálně splněny. Pro splnění třetí rovnice je nutno uvážit, že normála  $\mathbf{v}$  na válcové ploše má směr poloměru

$$v_1 = kx_1 \quad \text{a} \quad v_2 = kx_2, \tag{9(3.15)}$$

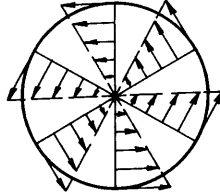
kde  $k$  je konstanta volená tak, aby normála  $\mathbf{v}$  měla jednotkovou velikost. Dosadíme-li z 9(3.15) a 9(3.12) do poslední rovnice 9(3.14), dostáváme

$$-\mu\alpha x_2 kx_1 + \mu\alpha x_1 kx_2 = 0,$$

což je zřejmě splněno. Nemá-li tyč podrobená torzi kruhový průřez, rovnice 9(3.15) neplatí a splnění třetí podmínky 9(3.14) na plášti válce působí obtíže. Ukazuje se, že pro splnění podmínek čl. 9.1 v případě tyče nekruhového průřezu je třeba uvažovat i posunutí ve směru podélné osy tyče. Průřezy kolmé k ose tyče přestávají po torzi být rovinnými.

Na vrchní i spodní podstavě budou okrajové podmínky 9(1.4) splněny, když vektor napětí  $\sigma_i^v = \sigma_{ji}v_j$  bude v každém bodě podstavy roven z vnějšku působícímu napětí. Přesně by to znamenalo, uvážíme-li zadání tenzoru napětí rovnicemi 9(3.12), vytvořit na obou podstavách vnější smykové napětí působící ve směru kolmém k polůměrům kruhových podstav, přičemž velikost smykových napětí by podle 9(3.9) vzrůstala se vzdáleností od středu kruhu. Na obr. 9.8 je směr a velikost takových smykových napětí  $\tau$  znázorněna vektorovými šipkami. Vzhledem k opačnému smyslu normál na obou podstavách bude na nich i rozdílný smysl, ve kterém se smyková napětí snaží podstavou otočit. Při konkrétní realizaci torze nemusíme vytvořit na podstavách rozložení napětí

přesně odpovídající obr. 9.8. Takové rozložení se podle Saint-Venantova principu ustaví v dostatečné vzdálenosti od konců tyče (válce), i když torzní napětí na konci tyče vytvoříme jiným způsobem. Musíme však zachovat výsledné silové působení, v daném případě musíme zachovat velikost  $M$  výsledného



Obr. 9.8 Ideální rozložení napětí na podstavě torzně namáhaného válce

momentu sil. Tuto velikost vypočteme. Smykové napětí  $\tau$  je kolmé k poloměru. Elementární příspěvek  $dM$  k výslednému momentu sil  $M$  je pak dán přímo součinem elementu síly  $\tau dS$  a vzdálenosti  $r$  jejího působíště od osy válce  $dM = r\tau dS$ . Velikost  $M$  výsledného momentu sil působících při torzi na podstavu válce je tedy

$$M = \int_s r\tau dS . \quad 9(3.16)$$

Dosadíme-li do 9(3.16) velikost  $\tau$  danou rovnicí 9(3.9) a provedeme-li výpočet plošného integrálu přes kruhovou plochu poloměru  $R$  podstavy válce, dostaneme postupně

$$M = \int_s r\mu r\alpha dS = \mu\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r d\varphi dr = \frac{\mu\alpha \pi R^4}{2} . \quad 9(3.17)$$

Dosadíme-li za  $\alpha$  podle 9(3.7) a za  $\mu$  píšeme v praxi častěji užívané označení  $G$  modulu pružnosti ve smyku, získáme důležitý vzorec

$$M = \frac{G\varphi \pi R^4}{2l} , \quad 9(3.18)$$

který udává moment síly  $M$  potřebný ke stočení o úhel  $\varphi$  válce poloměru  $R$  a délky  $l$ . Úměrnost mezi úhlem stočení a momentem síly  $M$  platí i pro torzi tyče složitějších průřezů. Píšeme

$$M = D\varphi$$

a konstantu úměrnosti  $D$  nazýváme *direkčním momentem*. Tyč kruhového průřezu má direkční moment

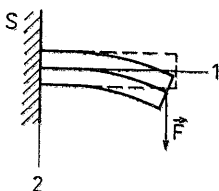
$$D = \frac{G\pi R^4}{2l}, \quad 9(3.19)$$

jak plyne z rovnice 9(3.18). Odvození vztahu  $M = D\varphi$  je provedeno v rámci klasické teorie pružnosti. Dochází-li při torzi k velkým deformacím tyče, moment  $M$  přestává být úměrný úhlu  $\varphi$ . Vztah  $M = D\varphi$  platí pro každou tyč jen do určité hodnoty úhlu stočení  $\varphi_k$ . Pro kruhové tyče malého poloměru a značné délky (dráty) je však úměrnost dobře splněna do značných hodnot úhlu  $\varphi_k$ . Úhel  $\varphi$  je veličina, kterou lze měřit s velkou přesností. Při malých průřezích a značných délkách tyče, které v tomto případě nazýváme vlákny, direkční moment  $D$  může být velmi malý. Rovnice  $M = D\varphi$  pak umožňuje citlivé měření momentů sil  $M$ . Torzně namáhaná vlákna se užívají v řadě citlivých měřicích přístrojů, např. v nejcitlivějších galvanometrech, v torzních vahách a podobně.

Veličiny  $M$ ,  $\varphi$ ,  $R$  a  $l$  při torzi válcové tyče jsou snadno měřitelné, na základě rovnice 9(3.18) lze tedy stanovit modul smyku  $G$  materiálu, ze kterého je tyč vyrobena. V Brožově knize (viz seznam literatury) lze nalézt popis citlivých přístrojů a různých metod měření užívajících torzně namáhaných vláken.

## 9.4 Ohyb

Ohybem rozumíme deformaci tyčí silami kolnými k jejich podélné ose. Z praktického hlediska je ohyb tyče velmi důležitým typem deformace. Tyče ohybově namáhané, říkáme jim v této souvislosti nosníky, jsou součástí nejrůznějších konstrukcí. Přesné vyšetření ohybu z hlediska zde vyložené teorie pružnosti je obtížné. Při vyšetřování ohybu se často užívá zjednodušená teorie vycházející

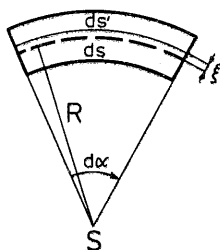


Obr. 9.9 Vetknutý nosník

z některých ne zcela přesně splněných předpokladů. Ukážeme, jak se podle této zjednodušené teorie vyšetřuje ohyb vetknutého nosníku.

Vetknutý nosník je na obr. 9.9. Tyč, jejíž jeden konec je pevně spojený se stěnou  $S$ , je na opačném konci zatížena silou  $F$ . Ve zjednodušeném rozboru se

uvažuje pouze moment síly, vytvořený silou  $F$  a ne její smykový účinek. Činí se předpoklad, který ve skutečnosti není splněn, že všechny body ležící před deformací v jedné rovině kolmé k ose tyče zůstávají body jedné roviny kolmé



Obr. 9.10 Úsek ohnuté tyče

k ose tyče i po deformaci. Dále budeme stejně jako v předcházejících úlohách řešených nezjednodušenou teorií pružnosti zanedbávat vlastní tíhu nosníku.

Na obr. 9.10 je znázorněn elementární úsek ohnuté tyče mezi dvěma rovinnými průřezy. Jelikož rovinné průřezy byly rovinnými a kolnými k ose tyče i před ohnutím, je vrchní část tyče ohybem protažena a spodní část stlačena. Mezi oběma částmi tyče leží rovina, v níž podélná deformace je nulová. Tuto rovinu, jejíž průmět je na obr. 9.10 znázorněn čárkovaně, budeme nazývat *neutrální rovinou*. Pro elementární úsek tyče předpokládáme, že je ohnut do kruhového oblouku; poloměr tohoto oblouku měřený k neutrální rovině značíme  $R$ . Délka elementu  $ds$  měřená v nedeformované neutrální rovině je

$$ds = R d\alpha .$$

Délka  $ds'$  vlákna ležícího v rovině tyče vzdálené  $R + \xi$  od středu křivosti  $S$  elementu je

$$ds' = (R + \xi) d\alpha .$$

Před deformací byla délka takového vlákna  $ds$ . Relativní prodloužení (pro  $\xi < 0$  se jedná o zkrácení) vlákna neboli jeho podélná deformace

$$e = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(R + \xi) d\alpha - R d\alpha}{R d\alpha} = \frac{\xi}{R} . \quad 9(4.1)$$

Při vyšetřování deformace vztahujeme v klasické teorii pružnosti všechny úvahy k nedeformovanému stavu tělesa. V soustavě souřadnic zvolené na obr. 9.9 budeme předpokládat, že první osa souřadnic leží v neutrální rovině. Potom deformace  $e$  daná rovnicí 9(4.1) je složkou  $e_{11}$  tenzoru deformace a  $\xi$  znázorněné

na obr. 9.10 je rovno  $-x_2$ . Pro složku  $e_{11}$  tenzoru deformace v ohnutém nosníku tak dostáváme vyjádření

$$e_{11} = \frac{-x_2}{R}. \quad 9(4.2)$$

Podle Hookova zákona pro tah 9(2.16) s uvážením 9(2.19) přiřazujeme deformaci 9(4.2) napětí

$$\sigma_{11} = Ee_{11} = \frac{-E}{R} x_2. \quad 9(4.3)$$

O ostatních složkách napětí budeme předpokládat, že jsou nulové i když na konci nosníku tento předpoklad zřejmě odporuje okrajovým podmínkám.

Síla  $F$  působící na konci nosníku, který má délku  $l$ , vytvoří v průřezu tyče vzdáleném  $x_1$  od stěny  $S$  moment o velikosti

$$M = F(l - x_1). \quad 9(4.4)$$

Tento moment musí být roven momentu sil, který v průřezu vytváří napětí 9(4.3). Velikost momentu, který napětí  $\sigma_{11}$  vytváří, vůči ose dané průsečíkem uvažovaného průřezu a neutrální roviny (rovina  $x_2 = 0$ ) je

$$M = \left| \int_S \sigma_{11} x_2 \, dS \right| = \frac{E}{R} \int_S x_2^2 \, dS. \quad 9(4.5)$$

Integrace probíhá přes celou plochu  $S$  průřezu. Velikost výrazu  $\int_S x_2^2 \, dS$  je určena velikostí a tvarem plochy průřezu. Tuto veličinu nazveme *plošným momentem* a značíme ji  $I_p$

$$I_p = \int_S x_2^2 \, dS. \quad 9(4.6)$$

S označením  $I_p$  je možno rovnici 9(4.5) zapsat ve stručném tvaru

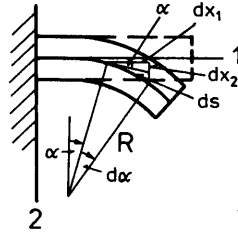
$$M = \frac{E}{R} I_p. \quad 9(4.7)$$

Z výrazu 9(4.7) plyne, že při dané hodnotě  $M$  a  $E$  je  $R$  tím větší, čím větší je  $I_p$ . Je-li plošný moment průřezu tyče větší, nosník se méně ohne. Větší plošné momenty mají při stejné celkové velikosti plochy průřezu, jejichž plocha je soustředěna ve větších vzdálenostech od neutrální roviny. Proto bývají v praxi oblíbeny nosníky s průřezem ve tvaru písmen T a I.

Průsečíku neutrální roviny s osou  $x$  říkáme neutrální vlákno. V rámci uvažovaného přiblížení určíme tvar ohnutého nosníku, stanovíme-li ohnutí neutrální-

ho vlákna. Rovnici neutrálního vlákna zapíšeme jako funkční závislost (viz obr. 9.11)

$$x_2 = x_2(x_1) . \quad 9(4.8)$$



Obr. 9.11 Náčrt k odvození rovnice neutrálního vlákna nosníku

Při malém ohybu nosníku, který předpokládáme, platí přibližný vztah

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} \doteq \frac{1}{R} \quad 9(4.9)$$

mezi druhou derivací funkce 9(4.8) a poloměrem křivosti  $R$  křivky. Vztah lze objasnit z obr. 9.11, podle kterého platí

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha ; \\ R \, d\alpha &= ds \doteq dx_1 , \end{aligned} \quad 9(4.10)$$

neboli

$$\frac{1}{R} \doteq \frac{d\alpha}{dx_1} \doteq \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dx_2}{dx_1} \right) = \frac{d^2x_2}{dx_1^2} .$$

V rovnici 9(4.7) je  $M$  funkcí  $x_1$ . Dosadíme-li do 9(4.7) vyjádření  $1/R$  podle 9(4.9), dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{1}{EI_p} M(x_1) \quad 9(4.11)$$

pro hledanou funkci 9(4.8). Rovnice 9(4.11) je základní rovnicí zde vyložené zjednodušené teorie ohybu tyčí. Pro známý průběh momentu síly  $M$  podél délky tyče získáme řešením rovnice 9(4.11) tvar neutrálního vlákna v ohnuté tyči.

Moment síly  $M(x_1)$  vetknutého nosníku je dán funkcí 9(4.4). Dosadíme-li ji do rovnice 9(4.11), dostaneme

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{1}{EI_p} F(l - x_1). \quad 9(4.12)$$

Rovnici 9(4.12) lze přímo integrovat

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{Flx_1}{EI_p} - \frac{Fx_1^2}{2EI_p} + C_1. \quad 9(4.13)$$

Derivace  $dx_2/dx_1$  udává směr tečny neutrálního vlákna. Ze způsobu vetknutí nosníku (viz obr. 9.11) plyne  $dx_2/dx_1 = 0$  pro  $x_1 = 0$ , a tedy  $C_1 = 0$ . Další integrací rovnice 9(4.13) dostáváme

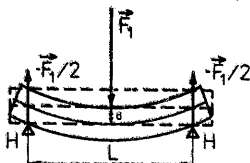
$$x_2 = \frac{Flx_1^2}{2EI_p} - \frac{Fx_1^3}{6EI_p} + C_2. \quad 9(4.14)$$

Konstantu  $C_2$  opět položíme rovnu nule, protože pro  $x_1 = 0$  musí být i  $x_2 = 0$ . Tvar neutrálního vlákna vetknutého nosníku je v uvažovaném přibližném vyjádření dán rovnicí

$$x_2 = \frac{F}{EI_p} \left( \frac{lx_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6} \right). \quad 9(4.15)$$

Dosadíme-li  $l$  za  $x_1$  do 9(4.15), dostáváme pro posunutí  $x_1$  volného konce nosníku ve směru působící síly  $F$  vyjádření

$$x_l = \frac{Fl^3}{3EI_p}. \quad 9(4.16)$$



Obr. 9.12 Průhyb podepřeného nosníku zatíženého silou  $F_1$

Poslední výraz lze užít i pro výpočet průhybu  $d$  nosníku uloženého na dvou oporách vzdálených od sebe o délku  $L$ , který je uprostřed zatížen osamělou silou  $F_1$  (obr. 9.12). Na podpěrných hrotech  $H$  působí vzhledem k symetrii síly o velikosti  $F_1/2$ . V místě, kde působí síla  $F_1$ , má nosník vodorovnou tečnu,

a uvažujeme-li půlku nosníku, jsou pro ni geometrické podmínky stejné jako u vetknutého nosníku. Pro výpočet průhybu  $d$  pak uijeme vzorec 9(4.16), kam za délku  $l$  dosadíme  $L/2$  a za velikost síly  $F$  hodnotu  $F_1/2$ ; dostáváme

$$d = \frac{F_1 L^3}{48EI_p} \quad 9(4.17)$$

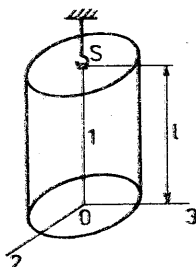
Jak jsme již uvedli, lze vzorec 9(4.11) užít i pro jiné závislosti  $M(x_1)$ , než je závislost daná rovnicí 9(4.4). Předpokládáme-li moment  $M = \text{konst}$ , mluvíme o čistém ohybu a z 9(4.11) dostáváme pro tvar neutrálního vlákna rovnici

$$x_2 = \frac{1}{EI_p} \left( \frac{1}{2} M x_1^2 + C_1 x_1 + C_2 \right) \quad 9(4.18)$$

Podle 9(4.9) parabolická závislost 9(4.18) vede na konstantní křivost nosníku,  $R = \text{konst}$ , což ovšem při  $M = \text{konst}$  plyne též přímo z rovnice 9(4.7). V obecném případě zahrnujeme do momentu  $M(x_1)$  příspěvky různě rozložených vnějších sil působících na nosník i působení vlastní tíhy nosníku. Některé případy ohybu lze přesně řešit teorií pružnosti, aniž užíváme zde vyložených zjednodušených představ. Řešení čistého ohybu a ohybu vetknutého nosníku, u kterého ve skutečnosti dochází ke zborcení rovin původně kolmých k ose nosníku, lze nalézt např. v knize Brdičkové.

## 9.5 Deformace válce vlastní tíhou

Budeme nyní vyšetřovat deformaci tělesa, u něhož nezanedbáme vlastní tíhu. Aby řešení bylo jednoduché, zvolíme kruhový, homogenní (hustota  $\rho = \text{konst}$ ) válec upevněný tak, že jeho osa má směr tíhové síly  $\mathbf{G}$  a bod  $S$ , kde osa protíná vrchní podstavu (střed vrchní podstavu), je upevněn. Osou válce proložíme 1. osu souřadnic, počátek soustavy souřadnic zvolíme ve středu spodní podsta-



Obr. 9.13 Upevnění válce a volba soustavy souřadnic pro výpočet jeho deformace vlastní tíhou



vy, směr druhé a třetí osy souřadnic v rovině podstavy je libovolný (obr. 9.13). Vnější síly působící na válec jsou objemová tíhová síla (viz 8(4.2))  $\mathbf{G}$  o složkách

$$\begin{aligned} G_1 &= -\varrho g, \\ G_2 &= G_3 = 0. \end{aligned} \quad 9(5.1)$$

a plošné síly na povrchu válce. Na spodní podstavě a na válcové ploše jsou vnější plošné síly, tedy i příslušné vektory napětí  $\sigma^v$ , nulové. Na vrchní podstavě působí v bodě závěsu síla  $\mathbf{F}$  mířící ve směr a smyslu osy  $x_1$ . Její velikost je  $F = GV$ , kde  $V$  je objem válce. Podle Saint-Venantova principu zaměníme toto diskrétní rozložení sil na vrchní podstavě rozložením pro výpočet jednodušším. Budeme předpokládat, že na vrchní podstavě působí napěťový vektor konstantní velikosti  $\sigma^v = \varrho gl$  mířící vzhůru. Velikost celkové síly působící na vrchní podstavu  $\sigma^v S = \varrho gl S = \varrho g V = GV$  je shodná s velikostí síly  $F$ . Na povrchu válce tedy působí napěťové vektory o složkách

$$\sigma_1^v = \varrho gl, \quad \sigma_2^v = \sigma_3^v = 0 \quad \text{na vrchní podstavě,} \quad 9(5.2)$$

$$\sigma_i^v = 0 \quad \text{na zbytku povrchu.} \quad 9(5.3)$$

Okrajové podmínky 9(1.4)  $\sigma_i^v = \sigma_{ij}v_j$  lze rozebrat podobně jako v čl. 9.2 a plyne z nich

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} &= 0 && \text{na plášti válce,} \\ \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} &= 0 && \text{na spodní podstavě} \quad (x_1 = 0), \\ \sigma_{11} = \varrho gl, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} &= 0 && \text{na vrchní podstavě} \quad (x_1 = l). \end{aligned} \quad 9(5.4)$$

Rovnice rovnováhy 9(1.1), dosadíme-li do ní za  $G_i$  z 9(5.1), zní

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} - \varrho g &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \quad 9(5.5)$$

Podle 9(5.4) ze všech složek  $\sigma_{ij}$  na povrchu válce jediné složka  $\sigma_{11}$  na vrchní podstavě je nenulová. Budeme tedy předpokládat, že všechna  $\sigma_{ij}$  s výjimkou  $\sigma_{11}$  jsou nulová v celém objemu válce. Potom jsou druhé dvě rovnice soustavy 9(5.5) splněny identicky a první rovnice dává

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \varrho g. \quad 9(5.6)$$

Z rovnice 9(5.6) dostáváme pro jedinou nenulovou složku  $\sigma_{11}$  tenzoru napětí vyjádření

$$\sigma_{11} = \rho g x_1 + f(x_2, x_3). \quad 9(5.7)$$

Podle 9(5.4) má být  $\sigma_{11} = 0$  pro všechny body spodní podstavky, tj. pro  $x_1 = 0$  a libovolná  $x_2, x_3$  splňující podmínku  $x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ , kde  $R$  je poloměr podstavky válce. Na vrchní podstavě, tj. pro body  $x_1 = l$  a  $x_2, x_3$  splňující podmínku  $x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ , je  $\sigma_{11} = \rho g l$ . Máme-li vyhovět těmto podmínkám, musíme položit v 9(5.7)  $f(x_2, x_3) = 0$ , tedy

$$\sigma_{11} = \rho g x_1. \quad 9(5.8)$$

Napětí dané složkami

$$\sigma_{11} = \rho g x_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \quad 9(5.9)$$

splňuje podmínky rovnováhy 9(1.1) a okrajové podmínky 9(1.4). Bez důkazu uvedeme, že splňuje i podmínky kompatibility. Jelikož lze dokázat, že úloha nalézt napětí  $\sigma_{ij}$  vyhovující právě uvedeným podmínkám má jednoznačné řešení, je 9(5.9) hledaným napětím ve vyšetřovaném válci.

Najdeme deformace příslušné napětím 9(5.9). Dosadíme-li složky napětí 9(5.9) do Hookova zákona 9(1.2), dostáváme stejné rovnice 9(2.7) jako v případě tahu. Pro získání složek deformace není podstatné, že nyní  $\sigma_{11}$  je funkcí  $x_1$  a v rovnicích 9(2.7) bylo konstantní. Algebraický postup, který jsme užili při řešení rovnic 9(2.7), z něhož plynulo

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E}, \\ e_{22} &= e_{33} = -\mu_p e_{11} = -\mu_p \frac{\sigma_{11}}{E}, \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0, \end{aligned} \quad 9(5.10)$$

zůstává v platnosti i nyní. Deformace vyvolané v uvažovaném válci jeho vlastní tíhou jsou dány tenzorovou funkcí 9(5.10), která, dosadíme-li do ní za  $\sigma_{11}$  z 9(5.9), má explicitní tvar

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\rho g x_1}{E}, \\ e_{22} &= e_{33} = \frac{-\mu_p \rho g x_1}{E}, \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0. \end{aligned} \quad 9(5.11)$$

Ze složek tenzoru deformace stanovíme vektor posunutí  $u_i = u_i(x_j)$ . Z rovnice 9(1.3)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{\rho g x_1}{E}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{-\mu_p \rho g x_1}{E}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{-\mu_p \rho g x_1}{E}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad 9(5.12)$$

Z rovnic na levé straně soustavy 9(5.12) plyne

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\rho g x_1^2}{2E} + f_1(x_2, x_3), \\ u_2 &= \frac{-\mu_p \rho g x_1 x_2}{E} + f_2(x_1, x_3), \\ u_3 &= \frac{-\mu_p \rho g x_1 x_3}{E} + f_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad 9(5.13)$$

Dosud neurčené funkce  $f_1(x_2, x_3)$ ,  $f_2(x_1, x_3)$  a  $f_3(x_1, x_2)$  lze určit řešením rovnic na pravé straně soustavy 9(5.12). Po podrobném řešení, které neuvádíme, dostaneme

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\rho g}{2E} \left[ x_1^2 + \mu_p (x_2^2 + x_3^2) \right] + k_3 x_2 + k_4 x_3 + k_7, \\ u_2 &= \frac{-\mu_p \rho g x_1 x_2}{E} - k_3 x_1 + k_2 x_3 + k_5, \\ u_3 &= \frac{-\mu_p \rho g x_1 x_3}{E} - k_4 x_1 + k_2 x_2 + k_6. \end{aligned} \quad 9(5.14)$$

Konstanty  $k_2, k_3, k_4$  charakterizují otočení válce jako celku, a proto je položíme rovny nule. Podle zadání úlohy (viz též obr. 9.13) předpokládáme  $u_i = 0$  pro bod  $x_1 = l, x_2 = x_3 = 0$ . Z této podmínky plyne  $k_5 = k_6 = 0$  a  $-\rho g l^2 / 2E = k_7$ , uvážíme-li, že jsme již položili  $k_2 = k_3 = k_4 = 0$ . Konečné

vyjádření pro vektor posunutí zde uvažovaného válce namáhaného vlastní tíhou je

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\rho g}{2E} \left[ x_1^2 - l^2 + \mu_p(x_2^2 + x_3^2) \right], \\
 u_2 &= \frac{-\mu_p \rho g x_1 x_2}{E}, \\
 u_3 &= \frac{-\mu_p \rho g x_1 x_3}{E}.
 \end{aligned}
 \tag{9.5.15}$$

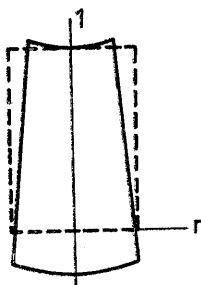
První z rovnic 9(5.15) ukazuje, že bod na ose válce ( $x_2 = x_3 = 0$ ) klesne o úsek délky

$$\Delta l = \frac{\rho g}{2E} (l^2 - x_1^2).
 \tag{9.5.16}$$

Průřez kolmý k ose válce se stane rotačním paraboloidem, jehož body vzdálené od osy leží výše než vrchol paraboloidu ležící na ose válce. Z druhých dvou rovnic plyne, že posunutí ve směru radiálním

$$u_r = \frac{-\mu_p \rho g}{E} x_1 r
 \tag{9.5.17}$$

směřuje k ose válce s výjimkou bodů ve spodní podstavě, kde je nulové. Válec se ve své vrchní části zúží. Z rovnice 9(5.17) plyne, že přímky rovnoběžné s osou ( $r = \text{konst}$ ) zůstanou přímkami i po deformaci, neboť  $u_2$  je přímo úměrné



Obr. 9.14 Tvar válce (piná čára) po jeho deformaci vlastní tíhou

souřadnici  $x_1$ . Na obr. 9.14 je osovým řezem znázorněn tvar, který válec zaujme po deformaci. Jeho tvar před deformací je znázorněn čárkovaně. Nevyšetřujeme-li podrobně poměry v příčných průřezech tyče (např. u drátů) a zajímá-li nás

pouze její osové prodloužení vlastní tíhou, můžeme k výrazu 9(5.16), který pro  $x_1 = 0$  dává celkové prodloužení tyče  $\Delta l = \rho g l^2 / 2E$ , dojít jednodušší úvahou, jak je ukázáno v řešení úlohy č. 6.

## Řešené úlohy

1. Jaké jsou hlavní směry tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  při smyku?

Řešení. V čl. 9.3 je smyk popsán v soustavě souřadnic, v níž pouze jediná složka tenzoru napětí je různá od nuly (viz rov. 9(3.5))

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau, \quad \text{ostatní } \sigma_{ij} = 0. \quad (1)$$

Na ploše kolmé k hlavnímu směru tenzoru napětí musí napětí být buď čistým tahem, nebo čistým tlakem (případně může vymizet), tedy napěťový vektor  $\sigma_i^v$  musí mít směr normály k ploše

$$\sigma_i^v = \sigma v_i. \quad (2)$$

Vyjádríme-li vektor  $\sigma_i^v$  podle vzorce 9(1.4), dostáváme podmínku pro jednotkový vektor normály  $v_i$  ležící ve směru hlavní osy tenzoru napětí

$$\sigma_{ij} v_j = \sigma v_i. \quad (3)$$

Dosadíme-li z (1) do (3), dostáváme

$$\sigma_{12} v_2 = v_1 \sigma, \quad \sigma_{21} v_1 = v_2 \sigma, \quad 0 = v_3 \sigma. \quad (4)$$

Ze (4) plyne pro  $v_3 = 0$  a  $\sigma \neq 0$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (5)$$

a pro  $\sigma = 0$

$$v_3 = 1, \quad v_1 = v_2 = 0. \quad (6)$$

Rovnici (5) lze splnit, když  $v_1 = v_2$  nebo  $v_1 = -v_2$ . V soustavě souřadnic ze čl. 9.3 jsou tedy jednotkové vektory ve směru hlavních os tenzoru napětí

$$v^I = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), \quad v^{II} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \quad \text{a} \quad v^{III}(0, 0, 1).$$

Směru  $v^I$  odpovídá velikost hlavního napětí  $\sigma = \sigma_{12} = \tau$  a směru  $v^{II}$  velikost hlavního napětí  $\sigma = -\sigma_{12} = -\tau$ . V soustavě souřadnic spjaté s hlavními osami tenzoru setrvačnosti – tato soustava je otočena podél společné 3. osy souřadnic o  $45^\circ$  vůči soustavě souřadnic užitá v čl. 9.3 – se smyk jeví jako čistý

tah na ploše kolmé k první (I) ose souřadnic a čistý tlak na ploše kolmé k druhé (II) ose souřadnic.

2. V bodě tělesa jsou známy hodnoty složek tenzoru napětí  $\sigma_{11} = 500$  Pa,  $\sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{33} = -300$  Pa,  $\sigma_{12} = 500$  Pa,  $\sigma_{13} = 800$  Pa a  $\sigma_{23} = -750$  Pa. Určete napětí působící na plošku, jejíž jednotkový vektor ve směru normály  $\mathbf{v} = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ .

Řešení. Pro vektor napětí  $\sigma_i^v$  působící na ploše s normálou  $v_j$  platí vyjádření 9(1.4)

$$\sigma_i^v = \sigma_{ij}v_j.$$

Dosazením do tohoto vztahu dostáváme

$$\sigma_1^v = \sigma_{11}v_1 + \sigma_{12}v_2 + \sigma_{13}v_3 = \left( \frac{500}{2} + \frac{500}{2} + \frac{800}{\sqrt{2}} \right) \text{ Pa} = 1\,066 \text{ Pa}.$$

Obdobným postupem dostaneme  $\sigma_2^v = -280$  Pa a  $\sigma_3^v = -187$  Pa. Vektor napětí  $\boldsymbol{\sigma}^v = (1066, -280, -187)$  Pa. Velikost napětí  $|\boldsymbol{\sigma}^v| = 1\,118$  Pa, normálové napětí  $\sigma_n^v = \sigma_i^v v_i = 260$  Pa a tečné napětí  $\sigma_t^v = (|\boldsymbol{\sigma}^v|^2 - \sigma_n^2)^{1/2} = 1\,087$  Pa.

3. Modul pružnosti v tahu  $E$  a modul pružnosti ve smyku  $G$  přestávají být nezávislými konstantami pro nestlačitelné látky. Určete pro takové látky vztah mezi  $E$  a  $G$ .

Řešení. Rovnicí 9(2.19) je dán vztah mezi  $E$  a Laméovými konstantami  $\lambda$  a  $\mu$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}. \quad (1)$$

Při zápisu vztahu (1) jsme užili identity 8(6.30)  $\mu = G$ . Pro nestlačitelnou látku je Poissonovo číslo  $\mu_p = 1/2$  a z 9(2.11), 9(2.13) dostáváme

$$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Rovnici (2) lze splnit pouze, když  $\lambda \rightarrow \infty$ . V limitě  $\lambda \rightarrow \infty$  dostáváme pak z (1) hledaný vztah

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} = 3G.$$

4. Kvádr rozměrů  $l = 0,5$  m,  $a = 0,01$  m,  $b = 0,005$  m je ve směru své nejdelší hrany označené  $l$  napínán silou o velikosti  $F = 5 \cdot 10^3$  N. Určete prodloužení  $\Delta l$ , příčné zkrácení  $\Delta a$  a  $\Delta b$  a přírůstek objemu  $\Delta V$  kvádrů. Látka, ze které je kvádr zhotoven, je ideálně elastická o modulu pružnosti v tahu  $E = 22 \cdot 10^{10}$  Pa a modulu pružnosti ve smyku  $G = 8,3 \cdot 10^{10}$  Pa.

Řešení. Přímým užitím vzorců čl. 9.2 získáme  $\Delta l = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\Delta a = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\Delta b = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  a  $\Delta V = 4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$ .

5. Válec o hmotnosti  $m = 2 \text{ kg}$ , poloměru  $r = 0,1 \text{ m}$  zavěsíme ve směru jeho osy na ocelový ( $G = 8,3 \cdot 10^{10} \text{ P}$ ) drát délky  $l = 1 \text{ m}$  a poloměru  $R = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Spoj mezi drátem a válcem je pevný. Určete dobu kmitu  $T$  torzních kmitů válce.

Řešení. Pro válec napíšeme pohybovou rovnici pro otáčení tělesa kolem pevné osy 7(3.12)

$$J \left( \frac{d\omega}{dt} \right) = J \left( \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) = M^0. \quad (1)$$

Moment setrvačnosti kolem osy válce  $J = mr^2/2$ . Stočíme-li drát o úhel  $\varphi$  z jeho rovnovážné polohy, působí drát na válec momentem síly (viz 9(3.18))

$$M^0 = -k\varphi, \quad \text{kde } k = \frac{\pi GR^4}{2l}, \quad (2)$$

Dosadíme-li z (2) do (1), dostáváme pro pohyb válce, který v tomto uspořádání nazýváme torzní kyvadlo, rovnici

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k\varphi, \quad (3)$$

jejímž řešením dostáváme

$$\varphi = \Phi_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (4)$$

V rovnici (4)  $\omega = (k/J)^{1/2}$  a  $\Phi_0, \alpha$  jsou konstanty dané počátečními podmínkami. Doba kmitu torzního kyvadla  $T = 2\pi/\omega = 2\pi(J/k)^{1/2} = (2/R^2)(\pi mr^2 l/G)^{1/2}$ . Číselně  $T = 7,0 \text{ s}$ .

6. Stanovte, jak se prodlouží elastická tyč délky  $l$  a hustoty  $\rho$  působením své vlastní tíhy? Tyč je na svém horním konci upevněna tak, že míří svisle dolů. Modul pružnosti v tahu látky, ze které je tyč zhotovena, je  $E$ .

Řešení. Podél tyče položíme osu  $x$  tak, aby kladný smysl osy mířil proti smyslu tíže a počátek osy byl u spodního konce tyče. Tíha tyče pod místem o souřadnici  $x$  bude  $G = \rho g S x$  ( $S$  průřez tyče,  $g$  tíhové zrychlení) a způsobí v místě  $x$  napětí  $\sigma = \rho g x$ . Z Hookova zákona 9(2.18) dostáváme pro deformaci  $e$  v místě  $x$  vyjádření  $e = \sigma/E$ . Celkové prodloužení tyče  $\Delta l$  získáme integrací lokální deformace  $e$  podél délky tyče

$$\Delta l = \int_0^l e \, dx = \frac{\rho g}{E} \int_0^l x \, dx = \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

# Mechanika tekutin

## 10.1 Kapalina a plyn

Název tekutina užíváme jako společné označení pro kapalínu a plyn. Mechanika tekutin značí mechaniku kapalin (hydromechaniku) a mechaniku plynů (aeromechaniku). Mechanické chování kapalin a plynů je do té míry podobné, že je výhodné jeho obecný popis dělat společně, pouze při diskusi dílčích výsledků rozlišit zvláštnosti obou druhů látek. Nejprve se budeme zabývat dokonalou tekutinou. Je to spojitě rozprostřená látka (kontinuum), pro kterou v každém bodě platí rovnice

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p, \quad \text{kde } p \geq 0. \quad 10(1.1)$$

Napětí  $\sigma_{ij}$  je čistý tlak stejné velikosti  $p$  na všech rovinách proložených daným bodem. Smyková napětí (složky  $\sigma_{ij}$ , pro které  $i \neq j$ ) jsou v dokonalé tekutině vždy nulová; dokonalá tekutina se nebrání změně tvaru. Z úvah článku 8.6, např. z rovnice 8(6.31), pak plyne, že modul pružnosti ve smyku je pro takovou látku nulový

$$G = 0. \quad 10(1.2)$$

Podmínka  $p \geq 0$  je vyjádřením toho, že v dokonalé tekutině nelze realizovat tahová napětí.

U dokonalé kapaliny předpokládáme dále, že její hustota  $\rho$  je ve všech bodech a za působení libovolných vnějších sil konstantní

$$\rho = \text{konst}. \quad 10(1.3)$$

Jelikož působící síly mohou podle předpokladu  $p \geq 0$  být pouze tlakové, formulujeme zpravidla podmínku 10(1.3) větou: *Dokonalá kapalina je nestlačitelná.* Užijeme-li znovu výsledků článku 8.6, můžeme říci, že první invariant  $e_1$  tenzoru deformace je pro dokonalou kapalínu roven nule

$$e_1 = 0. \quad 10(1.4)$$



V rovnici 8(6.21)  $\sigma_1 = K_1 e_1$  je na pravé straně  $e_1 = 0$  a na levé straně nenulový výraz  $\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -3p$ . Konstanta  $K_1$  musí být nekonečně velká. Konstanta  $K_1$  je rovna trojnásobku modulu stlačitelnosti  $k$  (definován rovnicí 8(6.34)), a tedy modul stlačitelnosti dokonalé kapaliny je nekonečně velký

$$k = \infty . \quad 10(1.5)$$

*Dokonalý plyn je stlačitelný.* Známe-li stavovou rovnici plynu, můžeme po vymezení podmínek probíhajícího děje (izotermický, adiabatický apod.) určit hustotu plynu jako funkci tlaku  $p$  v daném místě  $y_i$

$$\varrho = \varrho(p) = \varrho(p(y_i)) . \quad 10(1.6)$$

*Plyn, jehož hustotu lze vyjádřit rovnicí 10(1.6), nazýváme barotropní.*

Je-li hustota dokonalé kapaliny konstantní, musí jistě její množství zaujímat vždy stejný objem. Plyn je rozpínavý, a proto objem určitého množství plynu je dán objemem nádoby, ve které je uchován.

Abstrakce dokonalé tekutiny vystihuje malý odpor reálných kapalin a plynů k tvarové změně. Odpor reálných tekutin k tvarové deformaci je konečný a vystihujeme jej způsoby popsány v čl. 8.6. Chování newtonovské viskózní tekutiny probereme v posledním článku této kapitoly. Představa nestlačitelnosti dokonalé kapaliny odpovídá velkým hodnotám modulu stlačitelnosti reálných kapalin ve srovnání s jejich malým odporem k tvarové změně. Představy o struktuře plynů a kapalin, z nichž lze zdůvodnit vlastnosti vystižené rovnicemi 10(1.1), 10(1.3) a 10(1.6), budou vyloženy v učebnici Úvod do molekulové fyziky E. Svobody a kol.

## 10.2 Rovnováha tekutin

Rovnice rovnováhy kontinua 8(5.8), dosadíme-li do ní vyjádření napětí podle 10(1.1) dává rovnici

$$\frac{-\partial p}{\partial y_i} + G_i = 0 , \quad 10(2.1)$$

kteou můžeme zapsat též ve tvaru (srovnej D.5)

$$\text{grad } p = \mathbf{G} .$$

Objemová síla  $G_i$  (viz 8(4.2)) je síla působící na jednotkový objem. Např. v tíhovém poli je  $G_i = \varrho g_i$  (srovnej 9(5.1)). Objemové síly jsou úměrné

hmotnosti objektu, na který působí, a tedy v tekutině úměrné její hustotě  $\varrho$ . U kapalin je hustota  $\varrho$  konstantní, a napíšeme-li rovnici 10(2.1) ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial y_i} = G_i, \quad 10(2.2)$$

můžeme její pravou stranu stanovit před řešením rovnice. Hustota plynů je proměnná a závislá na tlaku  $p$ . Když tuto závislost vyjádříme podle 10(1.6), je pravá strana rovnice 10(2.2) funkcí tlaku a její hodnotu nelze před řešením celé rovnice stanovit. Pro plyny je proto výhodnější místo objemové síly  $G_i$  zavést do rovnice 10(2.2) intenzitu silového pole (viz 2(4.25)), kterou značíme  $I_i$ . Intenzita silového pole je síla působící na jednotku hmotnosti. Její vztah k objemové síle  $G_i$  je tedy

$$I_i = \frac{G_i}{\varrho}. \quad 10(2.3)$$

Zavedeme-li do rovnice 10(2.2) intenzitu silového pole 10(2.3), dostaneme

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y_i} = I_i. \quad 10(2.4)$$

Pravou stranu této rovnice je možno i pro plyn stanovit explicitně již před řešením. Proto jí pro obecnou formulaci podmínek rovnováhy tekutin bývá dáována přednost před rovnicí 10(2.1).

Rovnice 10(2.4), a též její tvar 10(2.1), se nazývá *rovnice hydrostatické rovnováhy*. Řešením rovnice hydrostatické rovnováhy je stanovení funkce

$$p = p(y_j), \quad 10(2.5)$$

která udává rozložení tlaku v tekutině. Funkce 10(2.5) plně charakterizuje stav kapaliny v rovnováze. U plynu je nutno ještě stanovit rozložení hustoty

$$\varrho = \varrho(y_j). \quad 10(2.6)$$

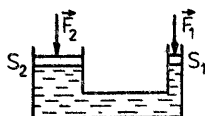
Pro barotropní plyn funkci 10(2.6) získáme dosazením závislosti 10(2.5) do vyjádření hustoty 10(1.6).

Z rovnic 10(2.1) nebo 10(2.4) plyne, že pro kapalinu ( $\varrho = \text{konst}$ ) jsou parciální derivace  $\partial p / \partial y_i$  nezávislé na tlaku. Objemovými silami  $G_i$  je rozložení tlaku v kapalině určeno až na aditivní konstantu  $k$ . Je-li funkce  $p_1 = p_1(y_i)$  řešením rovnice 10(2.1), je jejím řešením také každá funkce

$$p(y_i) = p_1(y_i) + k, \quad 10(2.7)$$

kde je  $k$  libovolná konstanta. Hodnota konstanty se stanoví z okrajových podmínek konkrétního řešeného příkladu. Jelikož však jde o určení jediné

konstanty, redukují se okrajové podmínky na znalost tlaku  $p$  v jednom libovolném bodě kapaliny. Změní-li se v tomto bodě tlak o hodnotu  $\Delta p$ , změní se o stejnou hodnotu i konstanta  $k$ , a tedy i tlak v každém bodě kapaliny. Takto je v rovnici hydrostatické rovnováhy obsažen známý *Pascalův zákon* o všestran-



Obr. 10.1 Schéma hydraulického lisu

ném šíření tlaku. Můžeme jej formulovat např. takto: *Změna tlaku v jednom místě kapaliny způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny, když před změnou i po změně je kapalina v rovnováze.*

Vlastnost vystižená Pascalovým zákonem je základem řady hydraulických zařízení, která užívají kapaliny jako media k rozvádění síly. Známe hydraulické ovládání brzd a dalších prvků dopravních prostředků, hydraulické lisy apod. V hydraulických zařízeních přenášený tlak, odpovídající konstantě  $k$  z rovnice 10(2.7), bývá velký ve srovnání se změnami tlaku  $p_1(y_j)$  způsobenými objemovou, zpravidla tíhovou silou. V rovnici 10(2.7) můžeme potom funkci  $p_1(y_j)$  zanedbat oproti konstantě  $k$  a tlak  $p$  pokládat za konstantní a rovný  $k$  v celém objemu kapaliny. *Můžeme-li zanedbat působení objemových sil, je tlak ve všech bodech kapaliny stejný.*

Z této poslední věty vycházejí aplikace Pascalova zákona. Na obr. 10.1 je znázorněn princip hydraulického lisu. Silou o velikosti  $F_1$  způsobíme v místě, kde se píst o ploše  $S_1$  stýká s kapalinou, tlak  $p$  o velikosti  $F_1/S_1$ . Podle poslední formulace Pascalova zákona musí pak být stejný tlak  $p$  v celém objemu kapaliny, tedy i v místě, kde se nachází píst  $S_2$ . Má-li být kapalina v rovnováze, musí na píst  $S_2$  působit síla o velikosti  $F_2$  taková, aby tlak  $F_2/S_2$  byl roven  $p$ . Musí tedy platit rovnice  $F_2/S_2 = F_1/S_1$  a pro poměr velikostí sil působících na pístech o plochách  $S_2$  a  $S_1$  dostáváme

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1} \quad 10(2.8)$$

Je-li plocha  $S_2 \gg S_1$ , bude  $F_2 \gg F_1$ . Působíme-li na píst  $S_1$  malou silou  $F_1$ , získáme na pístu  $S_2$  velkou sílu  $F_2$ . Stlačujeme-li píst  $S_1$ , posune se píst  $S_2$  směrem vzhůru, a stojí-li v jeho cestě předmět opřený o pevnou podložku, je lisován velkou silou  $F_2$ . Velikosti posunů  $\Delta s_1$  pístu  $S_1$  a  $\Delta s_2$  pístu  $S_2$  jsou v opačném poměru než velikosti sil  $F_1$  a  $F_2$ , takže práce vykonané oběma písty jsou stejné

$$F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2 \quad 10(2.9)$$

Snadný rozvod tlaku a možnost získání velkých sil jsou důvody, pro které jsou hydraulická zařízení v technické praxi často užívána. Pro plyny platí Pascalův zákon ve zde vyložené formě pouze přibližně. Jeho přesnou formulaci pro případ barotropních plynů lze nalézt např. v knize Brdičkové.

Vyšetříme, jak se chová tekutina v tíhovém poli. Objemovou tíhovou sílu jsme uvažovali v čl. 9.5, když jsme hledali deformaci válce způsobenou jeho vlastní tíhou. Zvolíme-li stejně jako ve článku 9.5 první osu souřadnic ve svislém směru s kladným smyslem mířícím vzhůru, budou složky objemové tíhové síly dány rovnicemi

$$G_1 = -\rho g, \quad G_2 = G_3 = 0. \quad 10(2.10)$$

Intenzita tíhového pole je pak podle 10(2.3)

$$I_1 = -g, \quad I_2 = I_3 = 0. \quad 10(2.11)$$

Dosadíme-li 10(2.11) do 10(2.4) nebo 10(2.10) do 10(2.1), dostáváme rovnice

$$\frac{\partial p}{\partial y_1} = -\rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y_3} = 0 \quad 10(2.12)$$

pro určení hledané závislosti  $p = p(y_i)$ . Z druhých dvou rovnic systému 10(2.12) plyne, že tlak  $p$  nezávisí na souřadnicích  $y_2$  a  $y_3$ , a je tedy funkcí pouze souřadnice  $y_1$ . V první rovnici systému pak můžeme nahradit parciální derivaci úplnou derivací

$$\frac{dp(y_1)}{dy_1} = -\rho g. \quad 10(2.13)$$

Je-li tekutinou kapalina, je  $\rho = \text{konst}$  a řešením rovnice 10(2.13) dostáváme pro tlak výraz

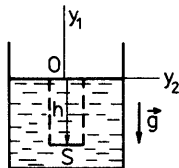
$$p = -\rho g y_1 + k. \quad 10(2.14)$$

Je-li tekutinou plyn, musíme do rovnice 10(2.13) dosadit předpokládaný tvar  $\rho = \rho(p)$  závislosti 10(1.6). Rovnice 10(2.13) bude na pravé straně obsahovat hledanou funkci  $p$ , a budeme ji tedy muset řešit jako rovnici diferenciální.

Rovnice 10(2.14) dává známý výraz pro *hydrostatický tlak v kapalinách*. Na obr. 10.2 je znázorněna kapalina v nádobě. Počátek  $O$  soustavy souřadnic uvažované při odvození rovnice 10(2.14) je zvolen v hladině kapaliny. Hydrostatický tlak bývá zvykem udávat v závislosti na hloubce  $h$ . Z obr. 10.2 plyne, že  $h = -y_1$  a rovnici 10(2.14) můžeme přepsat na běžný tvar 10(2.14)

$$p = \rho g h + k. \quad 10(2.15)$$

Z rovnice 10(2.14) nebo 10(2.15) plyne, že v hladině kapaliny, kde  $h = y_1 = 0$ , je tlak  $p$  roven konstantě  $k$ ;  $p = k$ . V hladině působí z vnějšku na kapalinu barometrický tlak  $b$ , tedy  $p = k = b$ . Konstanta  $k$  v rovnicích 10(2.14) a 10(2.15) je v případě naznačeném na obr. 10.2 rovna barometrickému tlaku  $b$ .



Obr. 10.2 Náčrt k objasnění významu hydrostatického tlaku v kapalině

Při vyšetřování tlaku  $p$  v kapalinách nás často zajímá pouze rozdíl  $\Delta p = p - b$  mezi tlakem  $p$  a barometrickým tlakem  $b$ , a ne absolutní hodnota tlaku  $p$ . Pro rozdíl tlaků  $\Delta p$ , který bývá přímo nazýván hydrostatickým tlakem a označován jednoduše  $p$ , dostáváme pak známý výraz

$$\Delta p = \rho gh . \quad 10(2.16)$$

K výrazu 10(2.16) lze dospět i elementárně. Myslíme-li si v hloubce  $h$  v kapalině plochu  $S$  rovnoběžnou s hladinou, spočívá na této ploše vzhledem k nepřítomnosti smykových napětí právě tíha  $hS\rho g$  celého sloupce kapaliny nad touto plochou. Vydělíme-li sílu  $F = h\rho Sg$  plochou  $S$ , dostáváme pro tlak působící na plochu  $S$  právě výraz 10(2.16). Jelikož v kapalině je na všech plochách procházejících daným bodem stejný tlak, působí přetlak  $\Delta p$  v hloubce  $h$  i na plochách, které nejsou rovnoběžné s hladinou. Při elementárním odvození předpokládáme, že nad plochou  $S$  je kapalina až k hladině. Pro vznik hydrostatického tlaku však takový předpoklad není nutný. Přetlak  $\Delta p$  daný rovnicí 10(2.16) vzniká v kapalině v hloubce  $h$  ve všech místech, bez ohledu na to, zda se nad nimi nachází kapalina nebo ne. Stačí si připomenout hydrostatický paradox a spojitě nádoby.

Srovnáme chování kapaliny a pružného pevného tělesa v tíhovém poli. Znamená to porovnat rovnice 10(2.15) s rovnicemi 9(5.9). Nejpodstatnější rozdíl mezi oběma závislostmi je v tom, že v kapalině všechna hlavní napětí, tj.  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  i  $\sigma_{33}$ , jsou rovna hodnotě  $-p = -\rho gh - k$ , zatímco v pružné pevné látce (v hookovské látce) napětí  $\sigma_{11} = \rho g x_1$  a  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  jsou podstatně různá.

Závislost tlaku plynu na výšce v tíhovém poli lze určit, předpokládáme-li nějaký konkrétní tvar funkce 10(1.6)  $\rho = \rho(p)$ . Nejjednodušší je předpokládat, že se plyn chová podle Boyleova-Mariotteova zákona

$$pV = k . \quad 10(2.17)$$

V rovnici 10(2.17) je  $V$  měrný objem plynu a  $k$  je konstanta. Jelikož  $V$  je měrný objem, je to objem, který zaujímá zcela určitý počet molekul plynu. Označíme-li  $m$  úhrnnou hmotnost těchto molekul, hustotu  $\rho$  plynu můžeme vyjádřit jako  $\rho = m/V$  a po dosazení do 10(2.17) dostáváme

$$\rho = \frac{m}{k} p = Kp . \quad 10(2.18)$$

V rovnici 10(2.18) jsme označili  $K$  konstantní výraz  $m/k$ . Rovnice 10(2.18) je konkrétní tvar funkce 10(1.6) odpovídající Boyleovu-Mariotteovu zákonu. Vyjádříme-li podle ní  $\rho$  v rovnici 10(2.13), dostáváme

$$\frac{dp}{dy_1} = -Kp\rho , \quad 10(2.19)$$

což je lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty bez pravé strany. Jejím obecným řešením je tedy funkce

$$p = A e^{\alpha y_1} . \quad 10(2.20)$$

Hodnotu  $\alpha$  určíme řešením charakteristické rovnice

$$\alpha + Kg = 0$$

a  $A$  je volitelná konstanta, jejíž hodnotu lze určit z okrajové podmínky. Řešením rovnice 10(2.19) je tedy tlaková závislost

$$p = A e^{-Kgy_1} . \quad 10(2.21)$$

Rovnice 10(2.21) bývá užívána k přibližnému vyjádření závislosti tlaku na výšce v atmosféře. V tomto případě se počátek soustavy souřadnic  $y_1 = 0$  volí u země, případně u hladiny moře. Je-li pro  $y_1 = 0$  tlak  $p = p_0$ , dostáváme dosazením této okrajové podmínky do rovnice 10(2.21) pro konstantu  $A$  hodnotu  $p_0$ . Je-li hustota plynu  $\rho = \rho_0$  pro  $y_1 = 0$ , můžeme podle 10(2.18) konstantu  $K$  vyjádřit jako  $K = \rho_0/p_0$ . Rovnici 10(2.21) potom zapíšeme ve tvaru

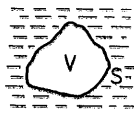
$$p = p_0 e^{-(\rho_0/p_0)gy_1} , \quad 10(2.22)$$

kterému se říká *barometrická rovnice*. Konstanty  $p_0$  a  $\rho_0$  jsou rovny atmosférickému tlaku a hustotě vzduchu za normálních podmínek, tedy  $p_0 \doteq 10^5$  Pa a  $\rho_0 \doteq 1,2$  kg m<sup>-3</sup>.

Boyleův–Mariotteův zákon, který platí pro izotermický děj ideálního plynu, je v atmosféře, kde teplota vzduchu s výškou klesá, splněn pouze přibližně. Jak lze odvodit závislost tlaku plynu na výšce v tíhovém poli, když uvažujeme obecnější vztah mezi hustotou a tlakem plynu, než je přímá úměrnost 10(2.18), je ukázáno např. v citované Brdičkově knize.

Když jsme v čl. 8.5 odvozovali rovnici rovnováhy kontinua, vyšli jsme z podmínky, že kontinuum je v rovnováze, je-li v rovnováze každá jeho část. Myslíme-li si v kontinuu jistý objem  $V$  (obr. 10.3), výslednice

$$F_i^V = \int_V G_i \, dV \quad 10(2.23)$$



Obr. 10.3 Objem  $V$  s povrchem  $S$  vymezený v tekutině

objemových sil působících v tomto objemu musí být rovna záporně vzaté výslednici plošných sil

$$F_i^P = \int_S \sigma_i^V \, dS, \quad 10(2.24)$$

která na objem  $V$  působí přes hraniční plochu  $S$ ;

$$F_i^V = -F_i^P. \quad 10(2.25)$$

Je-li objemovou silou tíhová síla 10(2.10), jediná nenulová složka síly  $F_i^V$  je

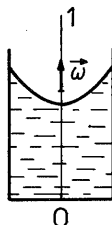
$$F_1^V = -g \int_V \rho \, dV, \quad 10(2.26)$$

a tedy podle rovnice 10(2.25)

$$F_1^P = g \int_V \rho \, dV, \quad F_2^P = F_3^P = 0. \quad 10(2.27)$$

Při zavedení objemové síly 10(2.10) byla první osa souřadnic zvolena ve svislém směru s kladným smyslem mířícím vzhůru. Přes plochu  $S$  působí na objem  $V$  kontinua, které je v rovnováze a nachází se v tíhovém poli, síla mířící vzhůru, jejíž velikost  $g \int_V \rho \, dV$  je rovna tíze kontinua obsaženého v objemu  $V$ . Tato síla působí v každém kontinuu. Uvažujeme-li libovolnou část válce z čl. 9.5, zjistíme, že na ni od okolních částí válce taková síla působí. Zvláštní význam má zmíněná síla v tekutině. Tam totiž objem  $V$  může být vyplněn pevným tělesem, aniž se tím poruší rozložení napětí, tj. rozložení tlaku. Na objem  $V$  vyplněný pevným tělesem pak od tekutiny působí přes hraniční plochu  $S$  stejné síly, jako kdyby objem  $V$  byl vyplněn tekutinou. Na pevné těleso

ponořené v tekutině, která je v tíhovém poli, působí síla 10(2.27). Tato síla, které říkáme *vztlak*, míří svisle vzhůru a její velikost je rovna tíze stejného objemu  $V$  tekutiny, jako je objem ponořeného tělesa. Dostáváme známý *Archimédův zákon*, který bývá formulován větou: *Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčová-*



Obr. 10.4 Kapalina ve válcové nádobě otáčející se úhlovou rychlostí  $\omega$

no silou, která je rovna tíze tekutiny tělesem vytlačené. Elementární odvození Archimédova zákona viz řešená úloha č. 2.

Aplikace Archimédova zákona jsou mnohostranné. Užívá se při zjišťování hustot látek. Vztlak, kterým působí vzduch na vážený předmět, je třeba uvažovat při přesném vážení. Let balónů a vzducholodí je umožněn vztlakovou silou. Tělesa plavou na kapalině, když jejich průměrná hustota je menší než hustota kapaliny.

Při rovnovážném plavání musí kromě výsledné síly být nulový i výsledný moment sil, kterým kapalina na těleso působí. Pro plavání lodí je důležité, aby při malém vychýlení lodi z rovnovážné polohy vznikl moment síly, který je do rovnovážné polohy vrátí. Jak lze zajistit takové podmínky, nezbytné pro stabilní plavání lodí, je naznačeno v řešené úloze č. 4.

Vyřešíme příklad, kdy rovnici hydrostatické rovnováhy užijeme pro sledování rovnováhy kapaliny v jiném než tíhovém poli objemových sil. Mějme kapalinu, která se spolu s nádobou, v níž je umístěna, otáčí úhlovou rychlostí  $\omega$  (obr. 10.4). Vektor  $\omega$  leží ve svislé přímce. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic pevně spjatou s kapalinou, jejíž první osa má směr vektoru  $\omega$  a míří vzhůru. Tato neinerciální soustava souřadnic se otáčí stálou úhlovou rychlostí vůči soustavě inerciální. Podle čl. 2.1 v takové soustavě souřadnic vedle pravých sil působí zdánlivé síly odstředivá a Coriolisova. Jediná působící pravá síla je objemová síla tíhová, která ve zvolené soustavě souřadnic má složky

$$G_1^g = -\varrho g, \quad G_2^g = G_3^g = 0. \quad 10(2.28)$$

Zdánlivá síla odstředivá, vyjádříme-li ji jako sílu objemovou  $G_i^0$ , je dána složkami

$$G_1^0 = 0, \quad G_2^0 = \varrho \omega^2 y_2, \quad G_3^0 = \varrho \omega^2 y_3. \quad 10(2.29)$$



Zdánlivá síla Coriolisova se neuplatní, protože kapalina se otáčí spolu s nádobou, a tedy rychlost částic kapaliny vůči neinerciální soustavě souřadnic je nulová.

Výslednou objemovou sílu  $G_i = G_i^g + G_i^0$  dosadíme do pravé strany rovnice 10(2.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial y_1} &= \rho g, \\ \frac{\partial p}{\partial y_2} &= \rho \omega^2 y_2, \\ \frac{\partial p}{\partial y_3} &= \rho \omega^2 y_3.\end{aligned}\tag{10(2.30)}$$

Z prvé rovnice plyne

$$p = \rho g y_1 + f_1(y_2, y_3).\tag{10(2.31)}$$

Dosadíme-li toto vyjádření tlaku do druhé rovnice 10(2.30), dostáváme pro funkci  $f_1(y_2, y_3)$  podmínku

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \rho \omega^2 y_2,$$

ze které plyne

$$f_1(y_2, y_3) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_2^2 + f_2(y_3).\tag{10(2.32)}$$

Tedy

$$p = \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_2^2 + f_2(y_3).\tag{10(2.33)}$$

Z poslední rovnice 10(2.30) pak dostáváme

$$\frac{df_2}{dy_3} = \rho \omega^2 y_3,$$

odkud

$$f_2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_3^2 + k.$$

Dosadíme-li takto vyjádřenou funkci  $f_2(y_3)$  do rovnice 10(2.33), dostaneme hledaný výraz pro rozložení tlaku  $p$  v rotující kapalině

$$p = \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (y_2^2 + y_3^2) + k.\tag{10(2.34)}$$

Hodnotu konstanty  $k$  lze určit, je-li známa absolutní velikost tlaku v jednom bodě kapaliny. Plochy, ve kterých kapalina nabývá stejného tlaku  $p = K$ , jsou rotační paraboloidy

$$y_1 = \frac{-\omega^2}{2g} (y_2^2 + y_3^2) + \frac{K - k}{\rho g} \quad 10(2.35)$$

Jednotlivé plochy se liší velikostí konstanty  $(K - k)/\rho g$ . Jednou z takových ploch je také hladina kapaliny. Otáčí-li se kapalina stálou úhlovou rychlostí kolem svislé osy, zaujme její hladina tvar rotačního paraboloidu. Na obr. 10.4 je znázorněn řez otáčející se kapalinou a křivka znázorňující hladinu je parabola.

### 10.3 Proudění ideální tekutiny

Kinematiku kontinua jsme probrali v čl. 8.1. Tam vyložené metody Lagrangeova 8(1.1) a Eulerova 8(1.2) byly původně užívány právě pro popis proudění tekutin. Eulerův způsob udání rychlosti

$$v_i = v_i(y_j, t) \quad 10(3.1)$$

částic tekutiny v daný okamžik  $t$  ve všech bodech  $y_j$ , ve kterých se tekutina nachází, je pro základní úvahy příhodnější, a proto jej budeme dále užívat. Proudění budeme znázorňovat *proudnicemi*, tj. křivkami, jejichž tečny v každém bodě mají směr vektoru rychlosti  $v_i$ . Tvar proudnic lze určit řešením rovnic 8(1.5), dosadíme-li do nich vyjádření rychlosti  $v_i$  podle 10(3.1). V případě *stacionárního* (ustáleného) proudění (srovnej s čl. 8.1).

$$v_i = v_i(y_j) \quad 10(3.2)$$

je tvar proudnic po celou dobu pohybu tekutiny stejný a proudnice jsou shodné s trajektoriemi částic.

Helmholtzova věta 8(1.9) udává, že obecně se pohyb tekutiny skládá z transláčního, deformačního a otáčivého pohybu. Je-li v určité oblasti tekutiny výraz

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i},$$

který v rovnici 8(1.9) odpovídá otáčivému (rotačnímu) pohybu, různý od nuly, říkáme, že *proudění* tekutiny je *vířivé*. Vektorová analýza (viz čl. D.5) uvažuje ve vektorovém poli  $a_i = a_i(x_j)$  výraz o složkách

$$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}.$$

Tyto složky antisymetrického tenzoru jsou složkami vektoru, který se nazývá rotace vektoru  $\mathbf{a}$  a označuje se  $\text{rot } \mathbf{a}$ . Můžeme tedy říci, že při vířivém proudění je v určité oblasti tekutiny rotace vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  různá od nuly

$$\text{rot } \mathbf{v} \neq 0 . \quad 10(3.3)$$

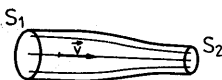
Je-li v celé vyšetřované oblasti tekutiny

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 , \quad 10(3.4)$$

říkáme, že *proudění je nevířivé*. Vektor, který splňuje rovnici 10(3.4), lze vyjádřit jako gradient nějaké skalární funkce  $f(y_j, t)$ , tedy

$$\mathbf{v} = \text{grad } f \quad \text{neboli} \quad v_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} . \quad 10(3.5)$$

Rovnice 10(3.5) je analogická rovnici 2(4.33) (rozdíl ve znaménku je nepodstatný). Funkci  $f$  z rovnice 10(3.5) nazýváme rychlostním potenciálem. Znalost rychlostního potenciálu stačí k určení rychlosti nevířivého proudění  $v_i(y_j, t)$ . Nevířivé proudění se někdy proto též nazývá *prouděním potenciálovým*.



Obr. 10.5 Proudová trubice

Odvodíme základní rovnice dynamiky tekutin. Při proudění tekutiny musí být zachována její hmotnost. Z tohoto jednoduchého předpokladu vycházíme při odvození rovnice kontinuity proudění. Odvodíme ji nejprve pro proudění tekutiny trubicí, tj. ve tvaru známém ze středoškolského studia. Mějme trubicí znázorněnou na obr. 10.5. Budeme předpokládat, že proudění je stacionární. Na obr. 10.5 je znázorněno několik proudnic a vektor  $\mathbf{v}$ , který udává smysl proudění uvažovaný v následujících slovních formulacích. Průřezem  $S_1$  kolmým ke směru rychlosti vteče do trubice za časový interval  $\Delta t$  hmotnost tekutiny

$$\Delta m_1 = S_1 v_1 \rho_1 \Delta t . \quad 10(3.6)$$

Za stejně dlouhý časový interval vyteče průřezem  $S_2$  z trubice hmotnost tekutiny

$$\Delta m_2 = S_2 v_2 \rho_2 \Delta t . \quad 10(3.7)$$

Veličiny  $v_1, v_2$  a  $\rho_1, \rho_2$  jsou průměrné hodnoty rychlostí a hustot v průřezích  $S_1, S_2$ . Předpokládáme stacionární proudění, a proto  $v_1, v_2, \rho_1, \rho_2$  jsou konstantní hodnoty. Také hustota v jednotlivých bodech uvnitř trubice se nemění s časem. Potom se nemění ani hmotnost obsažená uvnitř trubice a  $\Delta m_1$  z rovnice 10(3.6)

se musí rovnat  $\Delta m_2$  z rovnice 10(3.7). Porovnáním obou rovnic po vykrácení stejnou hodnotou  $\Delta t$  dostáváme

$$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2 . \quad 10(3.8)$$

Rovnice 10(3.8) je vyjádřením rovnice kontinuity pro stacionární proudění tekutiny v trubici.

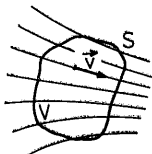
Hustota kapaliny je konstantní  $\rho_1 = \rho_2$ . Rovnice 10(3.8) se pro kapalinu zjednoduší na tvar

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad 10(3.9)$$

platný i pro nestacionární proudění.

Při odvozování rovnice 10(3.8) není podstatné, aby trubice z obrázku 10.5 měla pevné stěny. Důležité je jenom, aby se tekutina vyměňovala s okolím pouze přes průřezy  $S_1$ ,  $S_2$  a ne pláštěm trubice. Tuto podmínku splňuje nejen pevná reálná trubice, ale i myšlený útvar v tekutině, jehož plášť je tvořen proudnicemi. Takový útvar se nazývá *proudová trubice* nebo též proudové vlákno. Rovnice 10(3.8), 10(3.9) platí nejen v reálných trubcích, ale i v proudových trubcích.

Uvedeme též obecnou formulaci rovnice kontinuity. Mysleme si uzavřenou



Obr. 10.6 Plocha  $S$  uzavírající objem  $V$ , kterou proudí tekutina

plochu  $S$  pevnou v prostoru, kterou proudí tekutina (obr. 10.6). Hmotnost  $\partial m' / \partial t$  tekutiny, která za jednotku času vyteče přes plochu  $S$  z objemu  $V$  omezeného touto plochou, je dána plošným integrálem

$$\frac{\partial m'}{\partial t} = \oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \, dS = \oint_S \rho v_i v_i \, dS . \quad 10(3.10)$$

V rovnici 10(3.10) je  $\mathbf{v}$  jednotkový vektor ve směru vnější normály plochy. Výraz  $\oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \, dS$  je tok vektoru  $\rho \mathbf{v}$  plochou  $S$  (Srovnej s D(5.31); vektor  $dS_i$  z D(5.31) je totožný se zde užitým vektorem  $v_i \, dS$ ). Vektor  $\rho \mathbf{v}$  udává hmotnost tekutiny prošlou jednotkovým průřezem kolmým ke směru rychlosti  $\mathbf{v}$  za jednotku času.

Hmotnost  $m$  obsaženou v objemu  $V$  lze vyjádřit jako objemový integrál  $\int_V \rho \, dV$ . Změna  $\partial m / \partial t$  hmotnosti za jednotku času v objemu  $V$  je tedy dána výrazem

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV \quad 10(3.11)$$

a je rovna záporně vzatému množství hmotnosti  $\partial m'/\partial t$ , které za jednotku času z objemu  $V$  vyteče

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \frac{\partial m'}{\partial t} . \quad 10(3.12)$$

Dosadíme-li do 10(3.12) vyjádření derivací hmotnosti 10(3.10) a 10(3.11), dostaneme

$$\oint_S \rho v_i v_i \, dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV . \quad 10(3.13)$$

Podle Gaussovy věty D(5.32) je možné plošný integrál  $\oint_S \rho v_i v_i \, dS$  převést na objemový integrál  $\int_V [\partial(\rho v_i)/\partial y_i] \, dV$ . Objem  $V$  je v prostoru stálý, a proto lze vyměnit pořadí derivování a integrování na pravé straně rovnice 10(3.13)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV .$$

Rovnici 10(3.13) tedy můžeme přepsat na tvar

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial y_i} \, dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV .$$

Převědeme-li oba integrály na jednu stranu rovnice a součet integrálů napíšeme jako integrál součtu, dostáváme

$$\int_V \left( \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial y_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \, dV = 0 . \quad 10(3.14)$$

Objem  $V$  byl v proudící tekutině zvolen libovolně. Rovnice 10(3.14) musí tedy být splněna pro každý objem  $V$  zvolený v tekutině. To však je možné jen tehdy, když integrand v integrálu 10(3.14) je roven nule v každém bodě tekutiny

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial y_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad 10(3.15)$$

Rovnice 10(3.15), která platí v každém bodě tekutiny, je obecnou formulací rovnice kontinuity proudění.

Výraz

$$\frac{\partial a_i}{\partial y_i} = \frac{\partial a_1}{\partial y_1} + \frac{\partial a_2}{\partial y_2} + \frac{\partial a_3}{\partial y_3} ,$$

kde  $a_i = a_i(y_j)$  je vektorová funkce, se nazývá divergence vektoru  $\mathbf{a}$  (viz D (5.21))

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial y_i} . \quad 10(3.16)$$

S tímto označením lze rovnici 10(3.15) zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \mathbf{v}) = 0 . \quad 10(3.17)$$

Výraz  $\operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = \partial(\varrho v_i)/\partial y_i$  můžeme derivovat jako součin

$$\frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial \varrho}{\partial y_i} v_i + \varrho \frac{\partial v_i}{\partial y_i} . \quad 10(3.18)$$

Hustota  $\varrho$  je funkcí souřadnic a času,  $\varrho = \varrho(y_i, t)$ , tedy

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial y_i} v_i + \frac{\partial \varrho}{\partial t} . \quad 10(3.19)$$

V rovnici 10(3.15) upravíme první člen podle 10(3.18)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y_i} v_i + \varrho \frac{\partial v_i}{\partial y_i} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

a za

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial y_i} v_i$$

napišeme  $d\varrho/dt$  ve shodě s 10(3.19).

Dostaneme *další* často užívaný *tvar rovnice kontinuity*

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \frac{\partial v_i}{\partial y_i} = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad 10(3.20)$$

Je-li tekutina nestlačitelná, je  $\varrho = \text{konst}$  a  $d\varrho/dt = 0$ . Pro kapalinu je rovnice kontinuity vyjádřena jednoduchou podmínkou

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_i} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad 10(3.21)$$

Pro obecnou analytickou formulaci problému proudění tekutin je třeba vedle rovnice kontinuity uvažovat *pohybovou rovnici tekutin*. Tu získáme úpravou obecné pohybové rovnice kontinua 8(5.13)

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}. \quad 10(3.22)$$

Základním předpokladem o chování ideálních tekutin je rovnice 10(1.1), která udává, že napětí  $\sigma_{ij}$  je dáno výrazem

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p. \quad 10(3.23)$$

Do rovnice 10(3.22) dosadíme za  $\sigma_{ij}$  podle 10(3.23) a souřadnici označíme  $y_j$ . Místo členu  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$  pak budeme psát  $-\partial p / \partial y_i$ . Na pravé straně rovnice vyjádříme zrychlení  $d^2 u_i / dt^2$  jako derivaci rychlostí podle času  $dv_i / dt$ . Dostaneme rovnici

$$-\frac{\partial p}{\partial y_i} + G_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad 10(3.24)$$

jež je pohybovou rovnicí proudící ideální tekutiny. Upravíme ji na obvykle uvažovaný tvar tím, že za výraz  $dv_i / dt$  dosadíme podle identity

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial t} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_i}{\partial t},$$

a celou rovnici vydělíme hustotou  $\rho$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i}. \quad 10(3.25)$$

Rovnice 10(3.25), ve které ve shodě s rovnicí 10(2.3) označujeme poměr  $G_i / \rho$  jako intenzitu silového pole  $I_i$ , se nazývá *Eulerova hydrodynamická rovnice*.

Pro kapalinu ( $\rho = \text{konst}$ ) představují rovnice 10(3.25) a 10(3.21) systém čtyř rovnic pro určení čtyř hledaných funkcí  $v_i = v_i(y_j, t)$ ,  $p = p(y_j, t)$  charakterizujících stav proudící kapaliny. Pro stlačitelnou tekutinu je třeba k těmto rovnicím připojit ještě známý tvar závislosti 10(1.6)  $\rho = \rho(p)$ , aby bylo možno určit pět hledaných funkcí  $v_i$ ,  $p$ ,  $\rho$  charakterizujících stav proudící stlačitelné tekutiny. Přesné řešení hydrodynamických úloh podle uvedeného schématu je však velmi obtížné, neboť rovnice 10(3.25) není lineární rovnicí.

Dále budeme vyšetřovat pouze případy, kdy lze udat první integrál rovnice 10(3.25), kterým je známá *Bernoulliova rovnice*. Za integrační cestu zvolíme proudnici. Omezíme se přitom na případ, kdy proudnice jsou s časem stálé, tedy na případ stacionárního proudění. Při stacionárním proudění (viz 10(3.2)) není

rychlost  $v_i$  funkcí času  $t$ , a tedy  $\partial v_i / \partial t = 0$ , a rovnice 10(3.25) se zjednoduší na tvar

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i}. \quad 10(3.26)$$

Rovnici 10(3.26) vynásobíme jednotkovým vektorem  $v_i/v$ , který má směr proudnice a smysl shodný se smyslem rychlosti  $v_i$  částic. Vzniklý průmět do směru proudnice budeme podél ní integrovat

$$\int v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{v_i}{v} ds = \int I_i \frac{v_i}{v} ds - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} \frac{v_i}{v} ds + \text{konst.} \quad 10(3.27)$$

Je-li pole objemových sil působících na tekutinu konzervativní, můžeme podle 2(4.34) složky intenzity pole vyjádřit jako záporně vzaté parciální derivace potenciálu  $U$  podle souřadnic (v proudící tekutině označujeme souřadnice  $y_i$ )

$$I_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}. \quad 10(3.28)$$

Výraz

$$\frac{v_i}{v} ds = dy_i,$$

a tedy

$$\int I_i \frac{v_i}{v} ds = - \int \frac{\partial U}{\partial y_i} dy_i = - \int dU. \quad 10(3.29)$$

Podobně

$$\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} \frac{v_i}{v} ds = \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} dy_i = \int \frac{dp}{\rho}. \quad 10(3.30)$$

Pro úpravu výrazu na levé straně rovnice 10(3.27) uijeme identitu

$$\frac{\partial v^2}{\partial y_j} = \frac{\partial (v_i v_i)}{\partial y_j} = 2v_i \frac{\partial v_i}{\partial y_j}; \quad 10(3.31)$$

dostaneme

$$\int v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \frac{v_i}{v} ds = \int \frac{\partial (v^2/2)}{\partial y_j} dy_j = \int d\left(\frac{v^2}{2}\right). \quad 10(3.32)$$



Dosadíme-li z rovnic 10(3.29), 10(3.30) a 10(3.32) do 10(3.27), získáme, když převedeme všechny integrály na jednu stranu, rovnici

$$\int d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \int dU + \int \frac{dp}{\rho} = \text{konst.},$$

neboli

$$\frac{v^2}{2} + U + \int \frac{dp}{\rho} = \text{konst.} \quad 10(3.33)$$

Poslední rovnice je již hledaná *Bernoulliho rovnice pro obecnou, tj. i stlačitelnou tekutinu*. Pro kapalinu je  $\rho = \text{konst.}$  a integrál

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \text{konst.} \quad 10(3.34)$$

Pro kapalinu má *Bernoulliho rovnice jednoduchý tvar*

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \text{konst.}, \quad 10(3.35)$$

který říká, že pro libovolná dvě místa 1, 2 na stejné proudnici má výraz 10(3.35) stejnou hodnotu

$$\frac{v_1^2}{2} + U_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + U_2 + \frac{p_2}{\rho}. \quad 10(3.36)$$

Index označuje příslušnost veličiny k uvažovanému místu (viz obr. 10.7); hustota je konstantní, tedy  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ . Vynásobíme-li rovnici 10(3.35) hustotou  $\rho$ , dostáváme *jiný, často užívaný tvar Bernoulliho rovnice*

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho U + p = \text{konst.}, \quad 10(3.37)$$

který můžeme interpretovat takto: *Součet kinetické energie  $\frac{1}{2}\rho v^2$  objemové jednotky kapaliny, její potenciální energie  $\rho U$  a tlaku  $p$  je podél proudnice konstantní.* (Konstanty v rovnicích 10(3.35) a 10(3.37) neporovnáváme; proto jsme užili pro obě stejného označení konst., i když druhá rovnice vznikne z první násobením konstantní hustotou  $\rho$ .)



Obr. 10.7 Dvě místa na proudnici, pro něž hodnoty Bernoulliho výrazu (určující parametry jsou vyznačeny) mají stejnou hodnotu

Potenciální energie hmotného bodu o hmotnosti  $m$  v tíhovém poli, když označíme  $h$  výšku počítanou od libovolně zvolené hladiny nulového potenciálu, je dána známým výrazem  $W_p = mgh$ , a tedy potenciál

$$U = \frac{W_p}{m} = gh. \quad 10(3.38)$$

Dosadíme-li vyjádření 10(3.38) za  $U$  do rovnice 10(3.37), dostaneme *Bernoulliovu rovnici pro kapalinu v tíhovém poli*

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = \text{konst.} \quad 10(3.39)$$

Rovnice 10(3.35) až 10(3.37) a 10(3.39) lze užívat i pro plyny, když je můžeme pokládat za nestlačitelné. Takový předpoklad platí, je-li rychlost proudění plynu malá ve srovnání s rychlostí šíření zvuku v daném plynu, jak je ukázáno v závěru článku 11.4. Chceme-li přesněji vystihnout chování plynů, musíme vypočítat tlakovou funkci  $P$  danou rovnicí 10(3.34). Znamená to dosadit do 10(3.33) konkrétní tvar závislosti 10(1.6)  $\rho = \rho(p)$ . Např. pro izotermický děj ideálního plynu je podle 10(2.18)  $\rho = Kp$ , a tedy

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{Kp} = \frac{1}{K} \ln p + \text{konst.} \quad 10(3.40)$$

Dosadíme-li podle 10(3.40) do rovnice 10(3.33) a užijeme-li společného označení pro aditivní konstanty obou rovnic, dostáváme *Bernoulliovu rovnici*

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{1}{K} \ln p = \text{konst} \quad 10(3.41)$$

*pro izotermické proudění ideálního plynu.*

Rovnici 10(3.33) lze odvodit pro nevířivé stacionární proudění jako rovnici platnou v celém prostoru, ve kterém kapalina proudí. Konstanta na pravé straně rovnice je stejná pro všechny body, jimiž tekutina proudí, a nejen pro body podél jedné proudnice. Je však nutno upozornit, že podmínka 10(3.4)  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  nevířivého proudění je přísná a řada technicky důležitých druhů proudění ji nesplňuje. Např. často užívané proudění 8(3.4) má z parciálních derivací  $\partial v_i / \partial y_j$  nenulovou pouze derivaci  $\partial v_1 / \partial y_2$ , a tedy nenulovou třetí složku

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_2} - \frac{\partial v_2}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y_2}$$

vektoru  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Proto je v aplikacích často výhodnější vycházet z předcházejícího odvození a rovnici 10(3.41) pokládat za splněnou pouze podél jednotlivých proudnic.

Základním důsledkem Bernoulliovy rovnice je zmenšení tlaku ve zúženém místě trubice protékané kapalinou. (Obr. 10.8). Tento, na první pohled paradoxní výsledek, bývá též označován jako hydrodynamický paradox. Ukážeme, že hydrodynamický paradox je jednoduchým důsledkem Bernoulliovy rovnice, kterou pro trubici v tíhovém poli znázorněnou na obr. 10.8 užijeme v nejjednodušším tvaru 10(3.39). Na proudnici v obr. 10.8 jsou označena dvě místa 1 a 2, pro něž podle 10(3.39) platí

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1. \quad 10(3.42)$$

Předpokládáme, že trubice je vodorovná, a proto stejné členy  $\rho gh_1 = \rho gh_2$  v rovnici 10(3.42) neuvádíme. Podle rovnice kontinuity 10(3.9)

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

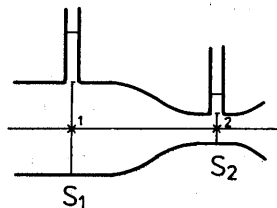
Jelikož  $S_2 < S_1$ , musí být  $v_2 > v_1$ . V průřezu  $S_2$  je větší rychlost než v průřezu  $S_1$ . Potom  $\frac{1}{2}\rho v_2^2 > \frac{1}{2}\rho v_1^2$  a z 10(3.42) plyne  $p_2 < p_1$ . Menší tlak v průřezu  $S_2$  je na obr. 10.8 naznačen menší výškou kapaliny v připojené manometrické trubici. Tlak ve zúženém místě trubice může při větší rychlosti proudění klesnout až pod okolní barometrický tlak a manometrickou trubicí je potom do kapaliny nasáván vzduch. Na tomto principu jsou konstruovány vodní vývěvy, rozprašovače, karburátory k benzinovým motorům a další zařízení. Aplikace Bernoulliovy rovnice jsou velmi mnohostranné. Některé z nich jsou popsány v Brožových „Základech fyzikálních měření“ (viz doporučená literatura).

## 10.4 Proudění viskózní tekutiny

Pro ideální tekutinu předpokládáme, že napětí  $\sigma_{ij}$  v ní má pouze charakter tlaku

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p. \quad 10(4.1)$$

V reálných tekutinách tento předpoklad není splněn. Pohybují-li se dvě sousední vrstvy reálné tekutiny různou rychlostí, vzniká mezi nimi smykové napětí. V prvním přiblížení předpokládáme, že velikost tohoto napětí je úměrná rozdílu rychlostí mezi vrstvami, jak je vyjádřeno Newtonovým viskózním zákonem



Obr. 10.8 Trubice protékaná kapalinou s připojenými manometry

8(6.34), respektive 8(6.37). Celkové napětí v proudící newtonovské tekutině dostaneme, přidáme-li k napětí 10(4.1) napětí  $\sigma'_{ij}$  vyvolané prouděním tekutiny

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + \sigma'_{ij}. \quad 10(4.2)$$

V rovnici 10(4.2) je označení  $\sigma_{ij}$  užito pro celkové napětí, a ne pro jeho část 10(4.1), která značila celkové napětí pro ideální tekutinu.

Napětí  $\sigma'_{ij}$  můžeme podle 8(6.10) rozložit na symetrickou část  $\sigma'^{(s)}_{ij}$  a deviator  $\sigma'^{(o)}_{ij}$

$$\sigma'_{ij} = \sigma'^{(s)}_{ij} + \sigma'^{(o)}_{ij}. \quad 10(4.3)$$

Podle 8(6.34) deviator napětí  $\sigma'^{(o)}_{ij}$  je pro newtonovskou látku úměrný deviatoru tenzoru deformace  $D_{ij}$

$$\sigma'^{(o)}_{ij} = 2\eta D_{ij}^{(o)}. \quad 10(4.4)$$

O symetrické části  $\sigma'^{(s)}_{ij}$  tenzoru napětí budeme předpokládat, že je úměrná symetrické části  $D_{ij}^{(s)}$  tenzoru rychlosti deformace, tedy

$$\sigma'^{(s)}_{ij} = k D_{ij}^{(s)}. \quad 10(4.5)$$

Podle 8(6.5) je symetrická část  $D_{ij}^{(s)}$  tenzoru rychlosti deformace dána výrazem

$$D_{ij}^{(s)} = \frac{1}{3} D_1 \delta_{ij} \quad 10(4.6)$$

a deviator  $D_{ij}^{(o)}$  tenzoru rychlosti deformace podle 8(6.6) výrazem

$$D_{ij}^{(o)} = D_{ij} - \frac{1}{3} D_1 \delta_{ij}. \quad 10(4.7)$$

Dosadíme-li do 10(4.2) z 10(4.3), 10(4.4) a 10(4.5), dostáváme pro napětí  $\sigma_{ij}$  v proudící viskózní newtonovské tekutině vyjádření

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + k D_{ij}^{(s)} + 2\eta D_{ij}^{(o)}, \quad 10(4.8)$$

keré, užijeme-li rovnic 10(4.6) a 10(4.7), můžeme dále přepsat na tvar

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -\delta_{ij}p + \frac{1}{3} k \delta_{ij} D_1 + 2\eta D_{ij} - \frac{2}{3} \eta D_1 \delta_{ij} = \\ &= -\delta_{ij}p + \frac{k - 2\eta}{3} \delta_{ij} D_1 + 2\eta D_{ij}. \end{aligned} \quad 10(4.9)$$

Složky tenzoru rychlosti deformace jsou podle 8(3.1) dány výrazy

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right), \quad 10(4.10)$$

a tedy první invariant tohoto tenzoru

$$D_1 = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3}$$

je roven divergenci vektoru rychlosti

$$D_1 = \operatorname{div} \mathbf{v} . \quad 10(4.11)$$

Pro nestlačitelnou tekutinu, tj. kapalinu, je podle rovnice 10(3.21)  $\partial v_i / \partial y_i = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , a tedy vyjádření tenzoru napětí 10(4.9) se zjednoduší na tvar

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + 2\eta D_{ij} . \quad 10(4.12)$$

Dosadíme-li vyjádření 10(4.12) tenzoru  $\sigma_{ij}$  do pohybové rovnice kontinua 8(5.13), dostáváme po úpravách analogických těm, kterými jsme převedli rovnici 8(5.13) na tvar 10(3.25), rovnici

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{2\eta}{\rho} \frac{\partial D_{ij}}{\partial y_j} . \quad 10(4.13)$$

Výraz  $2\partial D_{ij} / \partial y_j$  lze upravit

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial D_{ij}}{\partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_j} 2D_{ij} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_j \partial y_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial y_j \partial y_i} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_j \partial y_j} + \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial v_j}{\partial y_j} = \\ &= \nabla^2 v_i + \frac{\partial}{\partial y_i} D_1 . \end{aligned} \quad 10(4.14)$$

Symbolem  $\nabla^2$  je označen Laplaceův operátor (viz D(5.19)). Vyjádření 10(4.14) dosadíme do rovnice 10(4.13) a znovu užijeme podmínky  $D_1 = 0$  platné pro kapalinu, dostaneme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_j \partial y_j} . \quad 10(4.15)$$

Rovnice 10(4.15) je obvykle uvažovaným tvarem pohybové rovnice newtonovské viskózní kapaliny, pro niž se užívá názvu *Navierova–Stokesova rovnice*.

Pro stlačitelnou newtonovskou tekutinu musíme při dosazení do pohybové rovnice kontinua 8(5.13) užít vyjádření 10(4.9) pro napětí  $\sigma_{ij}$ . Místo rovnice 10(4.13) pak dostaneme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{k - 2\eta}{3\rho} \frac{\partial D_I}{\partial y_i} + \frac{2\eta}{\rho} \frac{\partial D_{ij}}{\partial y_j}. \quad 10(4.16)$$

Upravíme-li poslední člen na pravé straně rovnice 10(4.16) podle identity 10(4.14), získáme po sloučení členů s výrazem  $\partial D_I / \partial y_i$  rovnici

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{k + \eta}{3\rho} \frac{\partial D_I}{\partial y_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_j \partial y_j}. \quad 10(4.17)$$

Je to *Navierova–Stokesova rovnice pro stlačitelnou tekutinu*. Někdy nebývá uvažován viskózní mechanismus při objemových změnách. Neuvažuje se napětí úměrné rychlosti všestranné deformace, konstanta  $k$  v rovnici 10(4.5) a 10(4.17) se klade rovna nule. Rovnice 10(4.17) nabývá potom často uvažovaný tvar

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{\eta}{3\rho} \frac{\partial D_I}{\partial y_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_j \partial y_j}. \quad 10(4.18)$$

V rovnicích 10(4.15), 10(4.17) a 10(4.18) se vyskytuje poměr  $\eta/\rho$  viskozity  $\eta$  k hustotě  $\rho$ . Tento poměr, který bývá často uvažován při měření viskózních vlastností látek, se nazývá *kinematická viskozita* a označuje se symbolem  $\nu$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad 10(4.19)$$

Navierovy–Stokesovy rovnice spolu s rovnicí kontinuity 10(3.20) a s funkcí 10(1.6)  $\rho = \rho(p)$  tvoří úplný systém rovnic pro analytické řešení problému pohybu newtonovských viskózních tekutin. Řešení této soustavy při zadaných okrajových podmínkách je obtížné a nebudeme ho zde provádět. Vyšetříme pouze, jak vypadá průtok viskózní kapaliny trubici kruhového průřezu. Abychom nemuseli transformovat rovnici 10(4.15) do válcových souřadnic, vyšetříme tento problém na základě elementárních úvah.

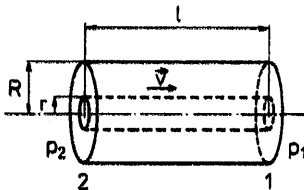
Mějme válcovou trubici, jíž proudí newtonovská viskózní kapalina. V trubici poloměru  $R$  uvažujeme souosu proudovou trubici poloměru  $r$  (obr. 10.9). Místo z Navierových–Stokesových rovnic vyjdeme při řešení problému přímo z Newtonova viskózního zákona ve tvaru 8(6.35). Smysl zákona tkví v tom, že smykové napětí na ploše kolmé ke směru, ve kterém se mění rychlost tekutiny, je úměrné změně rychlosti ve směru kolmém k ploše. Předpokládáme, že v trubici rychlost  $\mathbf{v}$  má směr osy a její velikost  $v$  se mění pouze se vzdáleností od osy trubice, tj. v závislosti na poloměru  $r$

$$v = v(r). \quad 10(4.20)$$

Pro velikost  $\tau$  smykového napětí na ploše kolmé k poloměru pak podle Newtonova viskózního zákona napíšeme

$$\tau = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right|. \quad 10(4.21)$$

Má-li v trubici vzniknout ustálené proudění, a jen o takovém proudění budeme dále uvažovat, je nutné, aby výsledná síla působící na každou proudovou trubici



Obr. 10.9 Proudění viskózní kapaliny v trubici

byla nulová. Při nenulové výsledné síle by docházelo ke zrychlenému pohybu, rychlost  $v$  by se měnila s časem. Napíšeme podmínku nulové výsledné síly pro proudovou trubici naznačenou na obr. 10.9. Zanedbáme-li objemové síly, podmínka zní

$$\pi r^2(p_2 - p_1) = 2\pi r l \tau. \quad 10(4.22)$$

Na levé straně rovnice 10(4.22) je rozdíl sil, které působí na podstavy proudové trubice, předpokládáme  $p_2 > p_1$ . Na pravé straně je výsledná smyková síla působící na plášť proudové trubice, délka trubice je  $l$ . Smyková síla působí proti směru pohybu, a proto její velikost na pravé straně rovnice 10(4.22) uvádíme s kladným znaménkem. Podle rovnic 10(4.20) a 10(4.21) je zřejmé, že na plášti uvažované proudové trubice má smykové napětí  $\tau$  konstantní velikost a je kladné. Dosadíme-li do rovnice 10(4.22) za  $\tau$  hodnotu 10(4.21), dostaneme po úpravě

$$\left| \frac{dv}{dr} \right| = \frac{r(p_2 - p_1)}{2l\eta}. \quad 10(4.23)$$

Při malých rychlostech proudění předpokládáme, že viskózní tekutina má u pevné stěny stejnou rychlost jako stěna. V uvažovaném případě tedy rychlost na stěnách trubice je nulová

$$v = 0 \quad \text{pro} \quad r = R. \quad 10(4.24)$$

Má-li dojít k pohybu, musí uvnitř trubice být  $dv/dr < 0$ , tj.

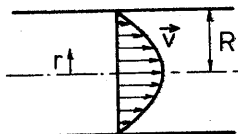
$$\left| \frac{dv}{dr} \right| = - \frac{dv}{dr}.$$

Potom z 10(4.23) plyne

$$\frac{dv}{dr} = \frac{-r(p_2 - p_1)}{2l\eta}$$

a integrací dostáváme

$$v = \frac{-(p_2 - p_1)r^2}{4l\eta} + k.$$



Obr. 10.10 Parabolické rozdělení rychlosti v řezu trubice protékané viskózní kapalinou

Dosažením okrajové podmínky 10(4.24) do poslední rovnice určíme, že konstanta  $k = (p_2 - p_1)R^2/(4l\eta)$ , a tedy

$$v = \frac{p_2 - p_1}{4l\eta} (R^2 - r^2). \quad 10(4.25)$$

Rovnice 10(4.25) představuje parabolický zákon rozdělení rychlosti. Na obr. 10.10 je takové rozdělení rychlosti znázorněno v řezu trubici.

Objem kapaliny proteklý trubicí za jednotku času je dán integrálem

$$Q = \int_S v \, dS, \quad 10(4.26)$$

v němž  $S$  značí průřez trubice. Dosadíme-li do integrálu 10(4.26) za  $v$  podle 10(4.25) a integraci provedeme v polárních souřadnicích  $r, \varphi$ , dostáváme postupně

$$\begin{aligned} Q &= \int_S v \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{p_2 - p_1}{4l\eta} (R^2 - r^2) r \, dr \, d\varphi = \\ &= 2\pi \frac{p_2 - p_1}{4l\eta} \left[ R^2 \int_0^R r \, dr - \int_0^R r^3 \, dr \right] = \frac{\pi(p_2 - p_1) R^4}{8l\eta}. \end{aligned}$$



Tedy objem  $V$  newtonovské viskózní kapaliny o viskozitě  $\eta$  proteklý za čas  $t$  trubicí o poloměru  $R$  a délky  $l$ , mezi jejímiž konci je rozdíl tlaku  $(p_2 - p_1)$ , je dán výrazem

$$V = \frac{\pi(p_2 - p_1)R^4 t}{8l\eta}. \quad 10(4.27)$$

Rovnice 10(4.27) je *Poiseuillův zákon*, který je výchozí rovnicí viskozimetrie newtonovských kapalin (viz kniha Brožova).

Sledujeme-li proudění nenewtonovských kapalin, jejichž vlastnosti jsou charakterizované rovnicí toku 8(6.40)

$$D = D(\tau), \quad 10(4.28)$$

válcovou trubicí poloměru  $R$ , vyjdeme z rovnice 10(4.26), kterou postupně upravíme

$$Q = \int_S v \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R vr \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^R vr \, dr. \quad 10(4.29)$$

Integrál  $\int_0^R vr \, dr$  integrujeme per partes

$$\int_0^R vr \, dr = \left. \frac{vr^2}{2} \right|_0^R - \int_0^R \frac{dv}{dr} \frac{r^2}{2} \, dr. \quad 10(4.30)$$

První člen na pravé straně rovnic 10(4.30) je roven nule, neboť pro  $r = 0$  je nulový výraz  $r^2$  a pro  $r = R$ , tj. u stěny trubice, je nulová velikost  $v$  rychlosti kapaliny.

Rychlost deformace  $D = D(\tau)$  je v uvažovaném případě rovna záporně vzatému výrazu  $dv/dr$

$$D(\tau) = - \frac{dv}{dr}. \quad 10(4.31)$$

Rovnice 10(4.22) platí i pro nenewtonovskou kapalinu. Vykrátíme-li ji výrazem  $\pi r$ , dostáváme po úpravě vztah

$$r = \frac{2l}{(p_2 - p_1)} \tau \quad 10(4.32)$$

mezi poloměrem  $r$  a napětím  $\tau$  působícím na tomto poloměru. Dosadíme-li podle 10(4.30), 10(4.31) a 10(4.32) do 10(4.29), dostáváme

$$Q = -2\pi \int_0^R \frac{dv}{dr} \frac{r^2}{2} dr = \pi \left( \frac{2l}{p_2 - p_1} \right)^2 \int_0^R D(\tau) \tau^2 dr .$$

Poslední integrál převedeme na integrál podle napětí  $\tau$ . Podle 10(4.32) je

$$dr = \frac{2l}{p_2 - p_1} d\tau ,$$

a tedy

$$Q = \pi \left( \frac{2l}{p_2 - p_1} \right)^3 \int_0^{\tau_R} D(\tau) \tau^2 d\tau . \quad 10(4.33)$$

Výraz  $2l/(p_2 - p_1)$  můžeme vyjádřit jako poměr poloměru k napětí v libovolné vzdálenosti  $r$  od osy trubice, tedy též jako poměr poloměru  $R$  trubice k napětí  $\tau_R$  u její stěny. Potom

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_R^3} \int_0^{\tau_R} D(\tau) \tau^2 d\tau . \quad 10(4.34)$$

Rovnice 10(4.34) je výchozí rovnicí *newtonovské kapilární viskozimetrie* (viz 2. díl Brožovy knihy).

Pro newtonovskou látku je

$$D(\tau) = - \frac{dv}{dr} = \frac{\tau}{\eta} \quad 10(4.35)$$

a po dosazení této tokové funkce do 10(4.34) dostáváme

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_R^3} \int_0^{\tau_R} \frac{\tau^3}{\eta} d\tau = \frac{\pi R^3 \tau_R}{4\eta} .$$

Vyjádríme-li podle 10(4.32)  $\tau_R$  jako  $[(p_2 - p_1)/2l]R$ , je

$$Q = \frac{\pi(p_2 - p_1)R^4}{8\eta l} . \quad 10(4.36)$$

Vynásobíme-li ještě rovnicí 10(4.36) dobou průtoku  $t$ , dostáváme znovu Poiseuilleův zákon 10(4.27).

Při odvození Poiseuilleova zákona jsme předpokládali, že působením tlaku  $(p_2 - p_1)$  vznikne v trubici proudění, při kterém jednotlivé válcové vrstvy

kapaliny, jejichž osa je totožná s osou trubice, se pohybují stálou rychlostí pouze ve směru osy válce. Podobně při proudění znázorněném na obr. 8.22, které uvažujeme při odvození Newtonova viskózního zákona 8(6.35), předpokládáme, že jednotlivé vrstvy tekutiny kolmé ke směru změny rychlosti mají stálou rychlost, jejíž směr leží v rovině vrstvy. Takové proudění, při kterém nedochází k mísení tekutiny mezi jednotlivými vrstvami, se nazývá *laminární proudění*. Zvýšíme-li rozdíl tlaku ( $p_2 - p_1$ ) mezi konci trubice z obr. 10.9 nad jistou mez, kapalina z jednotlivých válcových vrstev se vlivem vyšších smykových napětí působících mezi vrstvami začne promíchávat. Takovému proudění, při kterém rychlost  $v$  v jednotlivých místech trubice kolísá s časem a její složka do směru kolmému k ose trubice není vždy rovna nule, takže dochází k porušení spojitého rozložení tekutiny v trubici a vznikají víry, říkáme *proudění turbulentní*. Podobně je možno popsat turbulentní proudění i v jiných případech, než je proudění v trubici. Ve stacionárním laminárním proudění lze jednoduše oddělit proudnice a lze je i označit např. zbarvením částic kapaliny náležejících k jedné proudnici. V turbulentním proudění takový postup není možný.

Zda v trubici nastane laminární nebo turbulentní proudění, lze stanovit podle velikosti bezrozměrného výrazu  $vR/\nu$ , kterému se říká *Reynoldsovo číslo*

$$Re = \frac{vR}{\nu} \quad 10(4.37)$$

V rovnici 10(4.37) je symbolem  $Re$  označeno Reynoldsovo číslo,  $v$  je střední rychlost proudění v trubici,  $R$  poloměr trubice a  $\nu$  kinematická viskozita tekutiny definovaná rovnicí 10(4.19). Je-li Reynoldsovo číslo menší než jeho kritická hodnota  $Re_K$

$$Re < Re_K,$$

je proudění laminární. Pro

$$Re > Re_K$$

je proudění turbulentní. Pro kritickou hodnotu Reynoldsova čísla bývají udávány různé velikosti v oboru  $\langle 1\,000, 20\,000 \rangle$ , nejčastěji však bývá uvažována hodnota 1 000 až 2 000. Máme-li např. trubici poloměru  $R = 10^{-2}$  m protékající vodou, jejíž teplota je  $18^\circ\text{C}$ , je proudění laminární až do kritické rychlosti proudění  $v_K$ , která, uvažujeme-li  $Re_K = 1\,000$ , je rovna

$$v_K = \frac{Re_K \eta}{R \rho} = \frac{1\,000 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 10^3} = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}.$$

V poslední rovnici jsme za viskozitu  $\eta$  vody, která při  $18^\circ\text{C}$  je  $\eta = 1,065 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$ , dosadili přibližnou hodnotu  $10^{-3} \text{ Pa s}$  a za hustotu

vody přibližnou hodnotu  $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Zákony podobnosti, na jejichž základě je odvozena důležitost Reynoldsova čísla pro určení charakteru proudění a další bezrozměrná čísla udávající charakter různých typů proudění, jsou uvedeny v knize Brdičkově.

O nepříliš rychle proudící viskózní tekutině předpokládáme, že lne ke stěnám, kolem kterých proudí. Smykové napětí u těchto stěn není nulové, a proto tekutina na obtékané předměty působí nenulovými silami. Dalším zdrojem sil působících od tekutiny na obtékané předměty je nerovnoměrně rozložený tlak kolem těles. Je-li obtékaným předmětem koule a Reynoldsovo číslo příslušné uvažovanému proudění malé, lze výslednou sílu  $F$  působící od tekutiny na kouli přibližně spočítat (viz např. Brdičkova kniha). Velikost  $F$  této síly je

$$F = 6\pi\eta Rv, \quad 10(4.38)$$

kde  $\eta$  je viskozita proudící tekutiny,  $v$  velikost její rychlosti v místech, kde již proudění není ovlivněno přítomností koule a  $R$  je poloměr koule. Síla  $F$  má stejný směr a smysl jako rychlost  $v$  v dostatečné vzdálenosti od koule. Síla velikosti 10(4.38) působí též na kouli pohybující se rychlostí  $v$  vůči tekutině, která je v klidu. V tomto případě je smysl síly  $F$  opačný, než je smysl rychlosti  $v$  koule. Rovnice 10(4.38) se nazývá *Stokesův zákon* a bývá užívána k vystižení odporu, který tekuté prostředí klade pohybu částic, jež lze alespoň přibližně pokládat za kulové. Odpor prostředí úměrný rychlosti částic, tj. stejnou závislost, jaká je ve Stokesově zákonu, jsme již uvažovali při zavedení odporující síly 10(3.14). Stokesův zákon je splněn pro proudění s malým Reynoldsovým číslem. K stanovení Reynoldsova čísla dosazujeme do definiční rovnice 10(4.37) za  $v$  vzájemnou rychlost tekutiny a částice a za  $R$  poloměr koule případně obdobný charakteristický rozměr částic. Stokesův zákon tedy správně popisuje odpor prostředí vůči pohybu částic kulovitěho tvaru, když rychlost pohybu nebo rozměry částic jsou malé nebo když je velká kinematická viskozita prostředí  $\nu$ .

Vyšetřit velikost sil působících na těleso libovolného tvaru při různých velkých vzájemných rychlostech tělesa a prostředí je složitý úkol, který velmi často je nutno řešit experimentálně. Stačí připomenout, že běžně uváděný Newtonův vzorec pro odpor prostředí uvádí pro velikost síly  $F$  zcela jiný výraz  $F = \frac{1}{2}C_D \rho S v^2$  ( $C_D$  je konstanta,  $\rho$  hustota tekutiny,  $S$  průřez vystavený proudění), než je rovnice 10(4.38). Tento výraz, platný při středních rychlostech proudění, předpokládá závislost odporující síly na čtverci rychlosti  $v^2$ , zatímco Stokesův zákon 10(4.38) předpokládá přímou úměrnost mezi silou  $F$  a rychlostí  $v$ . Zkoumáme-li obtékání křídla, lze např. v prvním přiblížení říci, že zhuštění proudnic nad křídlem odpovídá zvýšení rychlosti, a tím snížení tlaku nad křídlem oproti tlaku, který je pod křídlem. Tímto způsobem můžeme vysvětlit, proč křídlo nese letadlo, i když spodní strana křídla je rovnoběžná se směrem letu letadla. Avšak detailní průzkum všech sil působících na křídlo při různých úhlech sklonu křídla

ke směru letu, při různých tvarech křídla, kdy musíme uvažovat i oblast, kde proudění přestává být laminární, je úkol značně náročný.

Sledujeme-li proudění reálné tekutiny při vyšších rychlostech, velmi důležitou roli hraje její chování v bezprostřední blízkosti obtékaných těles. Oblast tekutiny bezprostředně přilehlou k obtékaným tělesům nazýváme mezní vrstva. Při velmi vysokých rychlostech proudění tekutina přestane lnout ke stěnám a odtrhne se od nich. Mluvíme o odtržení mezní vrstvy. Obraz proudění v takových případech má nový, odlišný charakter. Mnoho problémů přináší vyšetřování turbulentního proudění. Zde probrané základy proudění ideální tekutiny a laminárního proudění newtonovské viskózní tekutiny dávají řešení jen v některých jednodušších případech a často jsou pouze prvním přiblížením ke skutečným, značně složitým poměrům v proudících tekutinách.

## Řešené úlohy

1. Předmět o hustotě  $\rho_p$  je na vzduchu vyvážen na rovnoramenných vahách mosazným závažím o hmotnosti  $m_z$ . Stanovte skutečnou (na vakuum korigovanou) hmotnost předmětu, je-li hustota mosazi  $\rho_z$  a hustota vzduchu v okamžiku vážení  $\rho_v$ .

Řešení. Objem závaží je  $m_z/\rho_z$ , vztlak na ně působící  $m_z\rho_v g/\rho_z$ , a tedy tíže závaží na vzduchu je  $m_z g(1 - \rho_v/\rho_z)$ . Obdobně, je-li hmotnost předmětu  $m$ , je jeho tíže na vzduchu rovna  $mg(1 - \rho_v/\rho_p)$ . Z rovnosti obou tíží plyne pro hledanou hmotnost předmětu vyjádření

$$m = m_z \left( 1 + \rho_v \frac{1/\rho_p - 1/\rho_z}{1 - \rho_v/\rho_p} \right).$$

Pro obvykle splněnou nerovnost  $\rho_v \ll \rho_p$  můžeme poslední výraz nahradit přibližným

$$m \doteq m_z \left[ 1 + \rho_v \left( \frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_z} \right) \right],$$

který bývá běžně pro korekci vážení na vakuum užíván.

2. Vypočítejte celkovou sílu  $\mathbf{F}$ , kterou kapalina působí na válec vznášející se v ní. Při výpočtu předpokládejte, že osa válce je svislá.

Řešení. Při předpokládaném umístění válce se síly působící od kapaliny na válcovou plochu vyruší, protože mají v každé vrstvě rovnoběžné s podstavou válce stejnou velikost (stejná hloubka  $h$ ) a v protilehlých bodech ležících na stejném průměru opačný smysl. Celková síla  $\mathbf{F}$  bude tedy dána pouze silami

působícími na podstavu válce; plochu podstavu označíme  $S$ . Na vrchní podstavu, která se nachází v hloubce  $h_1$ , působí síla  $F_1$  mířící dolů o velikosti (viz rov. 10(2.16))

$$F_1 = S \rho g h_1 .$$

Na spodní podstavu, která se nachází v hloubce  $h_2$ , působí síla o velikosti

$$F_2 = S \rho g h_2$$

mířící vzhůru. Protože  $h_2 > h_1$ , míří celková síla vzhůru a její velikost je

$$F = S(h_2 - h_1) \rho g .$$

Výraz  $S(h_2 - h_1)$  je roven objemu  $V$  válce,  $\rho$  je hustota kapaliny. Velikost síly  $F$  je tedy rovna tíze kapaliny o stejném objemu, jako je objem válce. Uvážíme-li orientaci síly  $\mathbf{F}$ , můžeme řešení úlohy formulovat analogicky Archimédovu zákonu: Válec je v kapalině nadlehčován silou, která je rovna tíze kapaliny válcem vytlačené. Zobecněním uvedeného výpočtu na těleso libovolného tvaru bývá elementárně odvozován Archimédův zákon.

3. Šířka údolní přehrady  $a = 40$  m, výška  $v = 60$  m. Najděte celkovou sílu  $\mathbf{F}$ , již na přehradu působí vodní tlak, a její působíště. Zeď přehrady pokládejte za obdélníkovou a ležící ve svislé rovině.

Řešení. V bodě přehrady v hloubce  $x$  působí tlak  $\rho g x$ , kde  $\rho$  je hustota vody. Celková síla je kolmá k rovině přehrady a má velikost

$$F = a \int_0^v \rho g x \, dx = \frac{1}{2} \rho g a v^2 = 706 \cdot 10^6 \text{ N} .$$

Celkový moment tlakových sil vzhledem k hladině, tj. k přímce  $x = 0$ , je

$$M = a \int_0^v \rho g x^2 \, dx = \frac{1}{3} \rho g a v^3 = F \cdot \frac{2}{3} v .$$

Působíště síly tedy leží v hloubce  $h = \frac{2}{3} v = 40$  m, a vzhledem k symetrii, v poloviční šířce přehrady.

4. Vztlková síla působí na plovoucí těleso ve směru svislé přímky  $p$ . Při rovnovážném plavání leží na této přímce i těžiště  $T$  plovoucího tělesa. Vychýlíme-li poněkud těleso z rovnováhy, přímka  $p$  zaujme v tělese novou polohu  $p'$ . Přímky  $p$  a  $p'$  jsou obecně mimoběžné, ale pro jednoduché tvary plovoucích těles mohou být různoběžné. Potom jejich průsečík nazveme *metacentrem*. Metacentrem prochází přímka, ve které působí vztlak, a tedy, leží-li metacentrum nad těžištěm  $T$ , vytváří vztlak a tíha tělesa dvojici sil, která při vychýlení vrací

plovoucí těleso do rovnovážného stavu – plavání je stabilní. Leží-li metacentrum pod těžištěm  $T$ , plavání je labilní. Místo podrobného rozboru zahrnujícího i případ, kdy přímky  $p$  a  $p'$  jsou mimoběžné (viz např. knihu Brdičkovu), vyřešíme k objasnění pojmu metacentrum jednoduchý příklad: Těleso bóje má tvar duté koule o průměru  $2R = 0,3\text{m}$  a hmotnosti  $m_1 = 4\text{ kg}$ . Dole je zatíženo olověnou čočkou o hmotnosti  $m_2 = 3\text{ kg}$ ; vzdálenost hmotného středu čočky od středu koule je  $x_2 = 0,133\text{ m}$ . Jak vysokou ( $l$ ) tyč je možno shora na bóji připevnit, aby bóje plavala stabilně s olověnou čočkou ve spodní poloze. Délková hustota (hmotnost na jednotku délky) tyče je  $\mu = 1\text{ kgm}^{-1}$ .

Řešení. Metacentrum se nachází v průsečíku přímek, ve kterých působí vztlakové síly, při plavání tělesa v rovnovážné poloze a při jeho mírném vychýlení z rovnovážné polohy. V případě kulové bóje je tedy metacentrem zřejmě střed koule. Položíme-li osu  $x$  do osy symetrie bóje s počátkem ve středu bóje a s kladným smyslem mířícím dolů, je souřadnice těžiště bóje

$$x_T = \frac{m_2 x_2 - \mu(R + l/2)}{m_1 + m_2 + \mu l}.$$

Poslední vyjádření dostaneme, uvážíme-li, že kulové těleso bóje má těžiště ve středu koule a tyč o hmotnosti  $\mu l$  souřadnici těžiště  $-(R + l/2)$ . Podmínka stability plavání  $x_T > 0$  dává pro  $l$  nerovnost

$$l(2R + l) < \frac{2m_2 x_2}{\mu},$$

odkud dostáváme hledanou podmínku pro výšku tyče  $l$

$$l < \left( R^2 + \frac{2m_2 x_2}{\mu} \right)^{1/2} - R, \quad \text{číselně } l < 0,76\text{ m}.$$

5. Uspořádání znázorněné na obr. 10.8 lze užít ke stanovení objemu  $Q$  kapaliny proteklé trubící za jednotku času (*Venturiův vodoměr*). Potřebujeme pouze znát velikost průřezů  $S_1$  a  $S_2$  a rozdíl výšek  $h_1$  a  $h_2$  kapaliny v manometrických trubících.

Řešení. Z Bernoulliovy rovnice 10(3.42), když do ní dosadíme vyjádření  $\rho gh_i$  za tlaky  $p_i$ , plyne pro rozdíl čtverců rychlostí v místech průřezů  $S_1$  a  $S_2$  vyjádření

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(h_1 - h_2).$$

Z rovnice kontinuity  $S_1 v_1 = S_2 v_2$  vyjádříme  $v_2$  podle  $v_1$  a pro sekundový objem proteklé kapaliny  $Q = S_1 v_1$  dostáváme hledaný výraz

$$Q = S_1 S_2 \left[ \frac{2g(h_1 - h_2)}{S_1^2 - S_2^2} \right]^{1/2}.$$

6. Stanovte dobu výtoku kapaliny z kulové nádoby poloměru  $R$ , která je naplněna do poloviny. Uvažujte případy:

a) Ideální kapalina vytéká kruhovým otvorem o poloměru  $r$  umístěným v nejnižším bodě nádoby (kontrakci paprsku neuvažujte).

b) Viskózní kapalina vytéká trubicí poloměru  $r$  a délky  $l$  taktéž připevněnou k nejnižšímu bodu koule. Určete podmínku pro laminární proudění ve výtokové trubici.

Udejte číselné výsledky pro  $R = 0,1$  m,  $r = 5 \cdot 10^{-4}$  m, kinematickou viskozitu  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup> (přibližně hodnota pro vodu), a délku trubice  $l = 0,1$  m.

Řešení. a) Z Bernoulliovy rovnice 10(3.39) a rovnice kontinuity 10(3.9) plyne pro výtokovou rychlost

$$v_2 = \left[ \frac{2ghS_1^2}{S_1^2 - S_2^2} \right]^{1/2} \doteq (2gh)^{1/2}, \quad (1)$$

kde  $h$  je výška kapaliny v nádobě,  $S_2$  průřez otvoru a  $S_1$  plocha hladiny kapaliny. Přibližné vyjádření platí pro  $S_2 \ll S_1$ . Za čas  $dt$  vyteče otvorem objem kapaliny  $dV = v_2 S_2 dt$ . O tento objem se zmenší množství kapaliny v nádobě;  $dV = -S_1 dh$ . Porovnáním dostaneme vztah

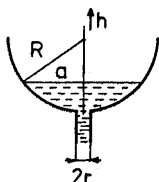
$$-S_1 dh = v_2 S_2 dt, \quad (2)$$

ze kterého lze vypočítat dobu  $T$  výtoku kapaliny z nádoby jako

$$T = - \frac{1}{S_2} \int_R^0 \frac{S_1(h)}{v_2(h)} dh. \quad (3)$$

Výchozí výška kapaliny v nádobě (spodní mez integrálu) je vzhledem k zadání úlohy (koule z poloviny plná) rovna poloměru koule  $R$ . Velikost hladiny  $S_1(h)$  kapaliny ve výšce  $h$  v kulové nádobě vyjádříme jako (viz obr. 10.11)

$$S_1(h) = \pi a^2 = \pi(R^2 - [R - h]^2) = 2\pi R h - \pi h^2. \quad (4)$$



Obr. 10.11 Výtok kapaliny z kulové nádoby



Po dosazení z (1) (přibližný vztah) a (4) do (3) dostáváme

$$T = \frac{1}{\pi r^2} \left[ \frac{2\pi R}{(2g)^{1/2}} \int_0^R h^{1/2} dh - \frac{\pi}{(2g)^{1/2}} \int_0^R h^{3/2} dh \right] = \frac{14}{15} \frac{R^{5/2}}{r^2 (2g)^{1/2}}. \quad (5)$$

b) Pro výtok v druhém případě je rozhodující rychlost proudění kapaliny trubici. Ta je určena Poiseuillovým zákonem 10(4.27), který pro objem  $dV$  vyteklý z trubice za čas  $dt$ , při výšce  $h$  kapaliny v nádobě, dává

$$dV = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \rho g h dt. \quad (6)$$

Porovnáme-li toto vyjádření vyteklého objemu s jeho vyjádřením jako úbytek kapaliny v nádobě (viz levá strana rov. (2)), dostáváme vztah

$$-S_1(h) dh = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \rho g h dt, \quad (7)$$

odkud pro dobu  $T_v$  výtoku viskózní kapaliny plyne

$$T_v = - \frac{8\nu l}{\pi r^4 g} \int_R^0 \frac{S(h)}{h} dh. \quad (8)$$

V poslední rovnici jsme pro poměr  $\eta/\rho$  užili označení kinematické viskozity  $\nu$ . Hladinu kapaliny  $S_1(h)$  vyjádříme v (8) stejně jako pro ideální kapalinu (viz (4)) a dostaneme

$$T_v = \frac{8\nu l}{\pi r^4 g} \left[ 2\pi R \int_0^R dh - \pi \int_0^R h dh \right] = \frac{12\nu l}{r^4 g} R^2. \quad (9)$$

Podmínka laminárního proudění v trubici stanoví, že Reynoldsovo číslo (viz 10(4.37)) je menší než 1 000

$$\frac{vr}{\nu} < 1\,000. \quad (10)$$

Průměrnou rychlost  $\bar{v}$  proudění ve výtokové trubici, kterou dosadíme za  $v$  do (10), dostaneme z (6)

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi r^2} \frac{dV}{dt} = \frac{r^2 g h}{8\nu l}. \quad (11)$$

Po dosazení do (10) dostáváme hledanou podmínku laminárního proudění ve výtokové trubici

$$\frac{r^3 gh}{8\nu^2 l} < 1\,000. \quad (12)$$

Dosazením číselných hodnot s kinematickou viskozitou  $\nu$  rovnou přibližně hodnotě pro vodu dostáváme:

$T = 2\,665$  s,  $T_v = 19\,570$  s a nerovnost (12) v nejnepříznivějším případě, kdy  $h = R$ , je splněna hodnotami  $153 < 1\,000$ .

7. Ocelová kulička o poloměru  $r = 1,5$  mm padá v glycerinu konstantní rychlostí  $v$ . Užitím Stokesova vzorce určete velikost  $v$ . Hustota oceli  $\varrho_0 = 7\,800$  kgm<sup>-3</sup>, glycerinu  $\varrho = 1\,260$  kgm<sup>-3</sup> a dynamická viskozita glycerinu  $\eta = 1,393$  Pa s.

Řešení. Rozdíl tíhy kuličky a vztlakové síly na ní působící se při rovnoměrném pohybu musí rovnat odporu prostředí vyjádřenému Stokesovým vzorcem 10(4.38)

$$\frac{4}{3} r^3 (\varrho_0 - \varrho) g = 6\pi\eta r v,$$

a tedy

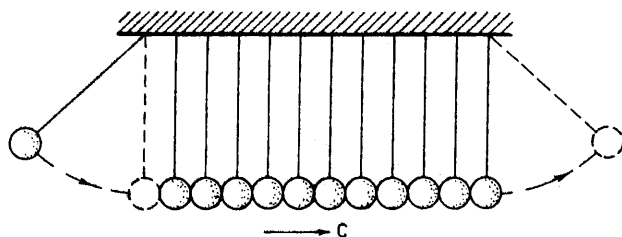
$$v = 2(\varrho_0 - \varrho) \frac{gr^2}{9\eta} = 0,023 \text{ m s}^{-1}.$$

# Vlnění

## 11.1 Vznik postupných vln

S pojmem *vlnění* a se základními vlastnostmi různých druhů vlnového pohybu (akustika, optika) se čtenář seznámil již na střední škole. Poněvadž opakování je matkou moudrosti, připomeneme si nejdříve některé z těchto poznatků.

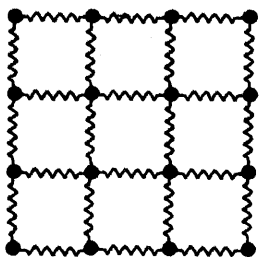
Mějme řadu vzájemně se dotýkajících pružných koulí zavěšených na vláknech (viz obr. 11.1). Vychýlíme první kouli a necháme ji dopadnout (s hybností  $mv$



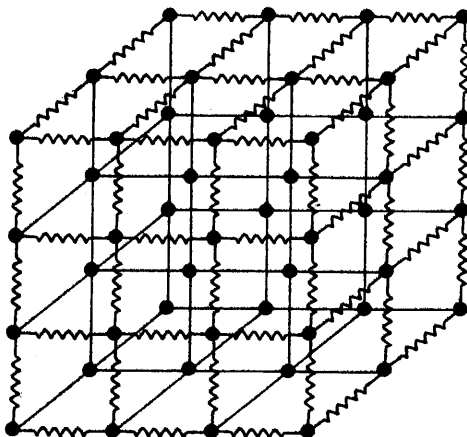
Obr. 11.1



a



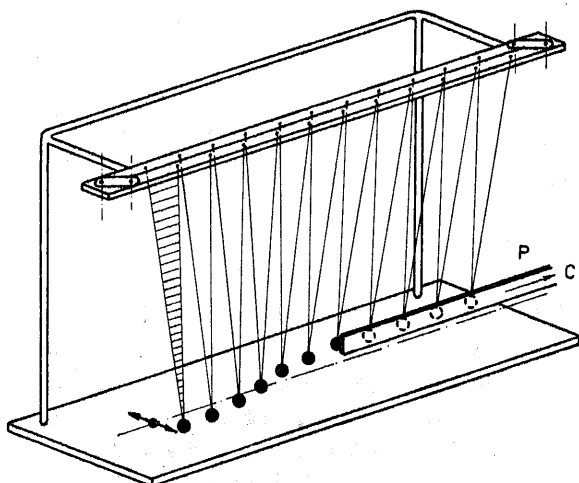
b



c

Obr. 11.2

a kinetickou energii  $mv^2/2$ ) na řadu pružných koulí. Při nárazu první koule si ostatní koule rychle předávají hybnost a mechanickou energii (rovnou hybnosti a energii první koule při nárazu). Po nárazu se nepozoruje žádný vlastní pohyb koulí, všechny jsou zdánlivě v klidu, avšak poslední koule řady náhle odskočí.



Obr. 11.3 Machův vlnostroj

Z toho soudíme, že řadou pružných koulí se šíří rozruch deformační energie a s ní spojené hybnosti.

Krystal si můžeme představit jako soustavu (pravidelně uspořádaných) vzájemně svázaných lineárních harmonických oscilátorů. Tato vazba je zprostředkována mezimolekulárními silami; na obr. 11.2 jsou tyto vazby znázorněny pružinami. Ve stavu klidu je součet sil působících na každý objemový element roven nule. Při vychýlení objemového elementu anebo jednoho oscilátoru se rovnováha naruší, začnou se pohybovat i sousední objemové elementy, a rozruch se šíří jistou *konečnou rychlostí* na všechny strany.

S podobnou situací se setkáváme u všech látek tuhého, kapalného anebo plynného skupenství. Místní rozruch (deformace, komprese) se vlivem mezimolekulárních sil přináší do ostatních míst. Energie\*) se přitom přenáší z jedné oblasti do jiných jako *proud*.

Tomuto šíření rozruchu prostorem od místa k místu říkáme *postupné vlnění*. Tento rozruch může být nejrůznější povahy: deformace pružného tělesa, změna hustoty, tlaku, teploty, popř. intenzit elektromagnetického pole.

\*) Pro stručnost mluvíme pouze o energii. Ve skutečnosti při tom dochází také k přenosu hybnosti a momentu hybnosti.

Název vlnění souvisí se známým úkazem, jenž vznikne po vhození malého předmětu do klidné vodní hladiny. Od místa rozruchu (vhození předmětu) postupují vlny kruhového tvaru se stále rostoucím poloměrem, přičemž v místě rozruchu následuje brzy po něm klid, energie přechází na další místa. Je to obdobná situace jako při rázu v řadě pružných koulí, kdy se první koule při nárazu zastaví a předá energii dalším místům.

Kinematiku postupného vlnění lze prodemonstrovat na jednoduchém zařízení, zvaném *Machův vlnostroj* (E. MACH, 1890). Je to soustava stejných kyvadélek (viz obr. 11.3) tvořených kuličkami, z nichž každá je ve stejné vzdálenosti od sousední kuličky zavěšena na dvou tuhých vláknech. Vlákna se nahoře rozbíhají, takže každá kulička může kývat jen v rovině kolmé k rovině závěsných vláken. Speciálním mechanismem lze roviny kývání všech kuliček současně stočit až o  $90^\circ$ .

Nejdříve nastavíme rovinu dvouvláknových závěsů všech kuliček tak, aby kývaly pouze v rovinách kolmých k řadě, kterou dohromady tvoří. Dlouhým pravítkem vychýlíme všechny kuličky z rovnovážné polohy o stejnou (malou) výchylku  $y$ . Posuneme-li pravítko prudce směrem dolů, uvolníme tím všechny vychýlené kuličky *současně*, následkem čehož začnou všechny kuličky kývat kolem svých rovnovážných poloh *se stejnou periodou  $T$  a ve stejné fázi*. Při malé počáteční výchylce jsou to prakticky pohyby po úsečkách kolmých k bodové řadě, přičemž okamžitá příčná (transverzální) výchylka  $y$  z rovnovážné polohy je pro všechny kuličky popsána stejnou závislostí

$$y = f(t) . \quad 11(1.1)$$

V daném případě malé výchylky lze tuto funkci reprezentovat harmonickou závislostí  $f(t) = A \cos \omega t$ , kde  $\omega = 2\pi/T$  je úhlová frekvence. Funkce je volena tak, že v čase  $t = 0$  je  $y(0) = A$ . Tento kmitavý pohyb všech kuliček kolem rovnovážné polohy se stejnou fází *nepředstavuje* ještě vlnivý pohyb.

*Obraz vlnění* dostaneme, když vychýlené kuličky postupně uvolňujeme tím, že pravítko  $P$  posouváme vpravo konstantní rychlostí  $c$ . Uvolněné kuličky opět kmitají kolem své rovnovážné polohy se stejnou periodou  $T$  (kmitočtem  $\nu = 1/T$ ), avšak jednotlivé kmity jsou nyní *ve fázi zpožděny*. Toto fázové zpoždění roste s rostoucí vzdáleností  $x$  dané kuličky od počátku bodové řady.

*Toto vzájemné fázové posunutí kmitů jednotlivých bodů bodové řady je podstatnou a charakteristickou vlastností vlnění. Vzniká tak časově i prostorově proměnný rozruch.*

Poněvadž každé kyvadélko koná harmonický pohyb, při pohledu seshora se pohyb bodové řady bude zobrazovat charakteristickou sinusovou (kosinusovou) vlnou. Tato vlna bude představovat momentální snímek pohybu bodové řady.

Popsané vlnění vzniklo příčnými kmity jednotlivých bodů vzhledem k jejich řadě, proto se nazývá vlnění *příčné* neboli *transverzální*. Při malých výchylkách

lze jednotlivé (ve skutečnosti kruhové) výchylky bodové řady zobrazit úsečkami, které leží *ve stejné rovině*.

Takové příčné vlně, v níž všechny výchylky leží ve všech místech v téže rovině, říkáme *lineárně polarizovaná*. S obecnějším případem eliptické polarizace se seznámíme v článku 11.7. Dochází-li k *neuspořádanému (chaotickému)* kmitání v různých směrech kolmých ke směru řady, mluvíme o *nepolarizované vlně*.

Snadno najdeme závislost výchylky  $u(x, t)$  libovolného bodu v čase  $t$  ve vzdálenosti  $x$  od počátku. Při pohybu pravitka konstantní rychlostí  $c$  výchylka v bodě  $x$  začne o čas  $\Delta t = x/c$  později, takže bude  $u(x, t) = A \cos \omega t'$ , kde  $t' = t - x/c$ . Bude tedy platit

$$u(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = A \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{cT} \right). \quad 11(1.2)$$

Perioda  $T$  značí *nejkratší* dobu opakování stejné výchylky v daném bodě  $x$ ; je tedy  $u(x, t + T) = u(x, t)$ . Obdobně najdeme *minimální* vzdálenost  $\Delta x \equiv \lambda$ , při níž je v daném čase  $t$  stejná fáze (a tudíž i stejná výchylka). Ze vztahu  $u(x + \lambda, t) = u(x, t)$  dostaneme pro tuto minimální vzdálenost

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}. \quad 11(1.3)$$

*Vlnová délka* je tedy vzdálenost, na kterou postoupí daná fáze kmitů za dobu jedné periody  $T$ . Jinými slovy, vlnová délka je *nejkratší vzdálenost* mezi body, které kmitají ve stejné fázi.

V teoretických úvahách se obvykle místo vlnové délky zavádí vlnočíslo

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 11(1.3')$$

představující  $2\pi$ -násobek počtu vlnových délek na jednotkové délce. Výchylku tak zapíšeme ve tvaru

$$u(x, t) = A \cos [k(x - ct)] = A \cos (kx - \omega t). \quad 11(1.4)$$

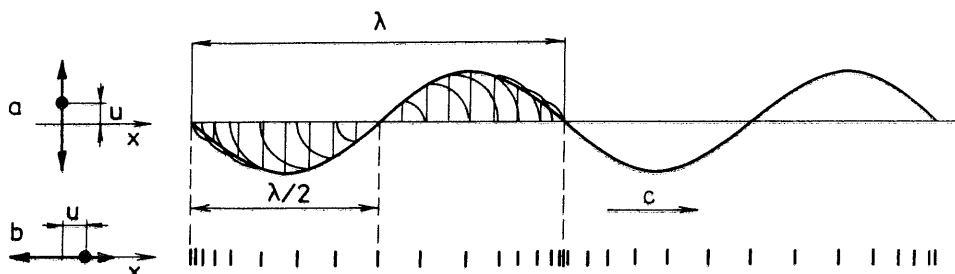
Zatím jsme mluvili o harmonické výchylce jednotlivých členů bodové řady. Popisujeme-li  $y = f(t)$  časový průběh kmitů jednoho bodu bodové řady, pak okamžitou výchylku  $u(x, t)$  libovolného bodu  $x$  v čase  $t$  vyjádříme rovnicí  $u = f(t')$ , tj.

$$u = f(t - x/c). \quad 11(1.5)$$

Tato obecná závislost vyjadřuje libovolnou vlnu postupující rychlostí  $c$  v kladném směru osy  $x$ . Pro vlnu postupující v opačném směru máme obdobně

$$u = g\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad 11(1.6)$$

Jiným symbolem  $g$  místo  $f$  označujeme, že vlna postupující v opačném směru je obecně jiná. Zobecnění na trojrozměrný případ provedeme později. Zde znovu zdůrazníme, že při vlnovém pohybu se nezávisle proměnné  $x$ ,  $t$  vyskytují *pouze v kombinaci*  $t \mp x/c$ , resp.  $ct \mp x$ .



Obr. 11.4

Zatím jsme se zabývali případem, kdy kmitání jednotlivých členů bodové řady je kolmé k jejich řadě (příčné vlnění). Kmitá-li každá částice bodové řady ve směru řady, vzniká *vlnění podélné* neboli *longitudinální*. Okamžitou výchylku  $u(x, t)$  každého bodu opět popíšeme závislostí 11(1.2), popř. obecnější závislostí 11(1.5) nebo 11(1.6).

Přechod příčného vlnění v podélné lze názorně předvést na Machově vlnostroji tak, že současně stočíme roviny závěsných vláken příčné kývajících kuliček tak, že směr kývání jednotlivých kuliček se změní z příčného na podélný. Zatímco v příčné vlně byl vrch a důl, u podélné vlny se objeví zhuštění a zředění bodů kolem míst nulových výchylek, které (stejně jako vrch a důl u příčné vlny) postupují stálou fázovou rychlostí  $c$ , jak je to znázorněno na obr. 11.4.

Veličinu  $t - x/c$  určující výchylku  $u(x, t)$  v daném bodě  $x$  a v daném čase  $t$ , nazýváme fází vlny. Označme  $t_0 - x_0/c$  nějakou fází v bodě  $x_0$  a v čase  $t_0$ . Ve všech bodech  $x$  a ve všech časech  $t$ , kdy je  $t - x/c = t_0 - x_0/c$ , bude fáze stejná. Pro místa stejné fáze, tzv. *vlnoplochy* odtud plyne

$$x = x_0 + c(t - t_0). \quad 11(1.7)$$

V čase  $t = t_0$  je  $x = x_0$ , což je rovnice roviny kolmé k ose  $x$  a procházející bodem  $x_0$  na této ose. Vlnoplochy jsou tedy roviny posouvající se v prostoru fázovou rychlostí  $c$ , proto takovou vlnu nazýváme *rovinnou*.

Zobecnění na trojrozměrný případ je snadné. Necht  $\mathbf{r}$  je bod roviny vzdáleně od počátku  $o$  (kolmou) vzdálenost  $d$ . Je-li  $\mathbf{n}$  jednotkový vektor ve směru normály k této rovině, pak je rovnice roviny

$$\mathbf{r}\mathbf{n} = d. \quad 11(1.8)$$

Označíme-li  $\alpha, \beta, \gamma$  úhly, jež svírá normála roviny s osami  $x, y, z$ , pak složky jednotkového vektoru  $\mathbf{n}$  představují tzv. směrové kosiny

$$\mathbf{n} \equiv (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad 11(1.9)$$

Poněvadž  $\mathbf{n}$  je jednotkovým vektorem, platí *normovací podmínka*

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad 11(1.10)$$

Rovnici roviny 11(1.8) nyní zapíšeme ve tvaru

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = d. \quad 11(1.11)$$

Rozruch šířící se konstantní rychlostí  $c$  z počátku souřadnic  $O$  ve směru  $\mathbf{n}$  (tj. pod úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  k jednotlivým kartézským osám) urazí vzdálenost  $d$  za čas  $\Delta t = d/c$  představující fázové zpoždění. Místo 11(1.5) a 11(1.6) budeme mít

$$u = f\left(t - \frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}\right) = f\left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c}\right),$$

$$u = g\left(t + \frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}\right) = g\left(t + \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c}\right).$$

Při  $\alpha = 0, \beta = \gamma = \pi/2$  dostáváme 11(1.5) a 11(1.6).

Z typografických důvodů je výhodné místo argumentů  $t \mp \mathbf{r}\mathbf{n}/c$  psát  $\mathbf{r}\mathbf{n} \mp ct$ . Vlnové rozruchy vyjádříme rovnicemi

$$u_1 = f(\mathbf{r}\mathbf{n} - ct), \quad u_2 = g(\mathbf{r}\mathbf{n} + ct). \quad 11(1.12)$$

Vlnoplochy jsou místa vyhovující rovnici  $\mathbf{r}\mathbf{n} - ct = \mathbf{r}_0\mathbf{n} - ct_0$ , tj.

$$\mathbf{r}\mathbf{n} = \mathbf{r}_0\mathbf{n} + c(t - t_0). \quad 11(1.13)$$

Jsou to rovnoběžné roviny, jež se s časem rovnoměrně přemísťují rychlostí  $c$ . Tato rychlost je *kinematickou* veličinou, jež určuje rychlost přemísťování *stejných fází*, proto se nazývá *fázovou rychlostí*. Fázová rychlost nemusí obecně souhlasit s rychlostí přenosu energie rozruchu, proto může být i větší, než je rychlost světla ve vakuu, aniž by to bylo v rozporu s teorií relativity.



## 11.2 Vlnová rovnice

V předchozím článku jsme dospěli k závěru, že při vlnovém pohybu se nezávisle proměnné  $r$  a  $t$  vyskytují pouze ve speciálních kombinacích  $nr \mp ct$ . Tento poznatek nám umožňuje najít odpovídající diferenciální rovnici vlnového pohybu.

Začneme jednorozměrným případem, kdy je výchylka  $u \equiv u(x, t)$  popsána závislostí

$$u = f(x - ct). \quad 11(2.1)$$

Zde máme derivovat složenou funkci argumentu  $s \equiv x - ct$ . Pravidla pro parciální derivování složených funkcí jsou obdobná jako u obyčejných derivací: nejdříve zderivujeme funkci  $f(s)$  podle  $s$ , a pak tuto derivaci vynásobíme derivací argumentu  $s$  podle příslušné proměnné. V homogenním prostředí je rychlost  $c$  konstantou\*) nezávislou na  $x, t$ . Podle pravidel o derivování složených funkcí pak máme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} = -cf'. \quad 11(2.2)$$

Zde jsme užili  $(\partial s / \partial x) = 1$ ,  $(\partial s / \partial t) = -c$  a symbolem  $f'$  jsme označili  $f' \equiv df/ds$ . Opětovnou derivaci dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-c)^2 f'' = c^2 f'', \quad 11(2.2')$$

kde  $f'' \equiv d^2 f / ds^2$ .

Srovnáním obou výrazů v 11(2.2') dostaneme hledanou *vlnovou rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad 11(2.3)$$

Kdybychom vzali řešení  $u = g(x + ct)$ , dostali bychom stejnou rovnici. (To je přirozené, jelikož 11(2.3) se nezmění při záměně  $c \rightarrow -c$ .) Z toho soudíme, že vlnová rovnice 11(2.3) má obecné řešení (J. d'ALEMBERT, 1770)

$$u = f(x - ct) + g(x + ct). \quad 11(2.4)$$

Z matematického hlediska je vlnová rovnice lineární homogenní parciální diferenciální rovnicí druhého řádu. (Pro úplnost ještě poznamenáme, že je to

\*)Rychlost  $c$  by ovšem mohla záviset na  $x, t$  nepřímo prostřednictvím výchylky  $u$ , tj.  $c \equiv c(u)$ . Z důvodů, o nichž pojednáme v článku 11.5, takovou závislost zde vylučujeme.

rovnice tzv. hyperbolického typu.) Linearitou označujeme tu skutečnost, že sama funkce  $u$  a všechny její derivace se vyskytují pouze v lineárních kombinacích. Homogenitou rozumíme to, že rovnice se nezmění při záměně  $u$  na  $u' = \text{konst} \cdot u$  (Někdy se mluví o rovnici bez pravé strany, což je nevhodné, jelikož každá rovnice má levou i pravou stranu.)

Lineární homogenní diferenciální rovnice se vyznačují *výjimečnou vlastností*, kterou žádné jiné rovnice nemají, a sice tím, že jsou-li  $u_1, u_2$  dvě (lineárně nezávislé) řešení takové rovnice, pak součet  $u_1 + u_2$  (obecně lineární kombinace  $a_1u_1 + a_2u_2$ ) těchto řešení je opět řešením téže rovnice. Poněvadž tento výsledek má v nauce o vlnění klíčový význam, dokážeme jeho správnost pro vlnovou rovnici. Nechť  $u_1, u_2$  vyhovují vlnové rovnici

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}.$$

První rovnici vynásobíme konstantou  $a_1$  druhou  $a_2$ , a vzniklé rovnice sečteme; dostaneme tak

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_1u_1 + a_2u_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (a_1u_1 + a_2u_2).$$

To je opět rovnice 11(2.3) pro funkci  $u = a_1u_1 + a_2u_2$ . Tato skutečnost je pro vlnění podstatnou, jelikož souvisí se skládáním (superpozici) kmitů, což vede ke specifickým interferenčním jevům (viz čl. 11.5), o nichž pojednáme později.

Odvození vlnové rovnice pro trojrozměrný případ je obdobné. Vezmeme první řešení 11(1.12), tj.

$$u = f(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - ct).$$

Označíme-li  $s \equiv x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - ct$ , pak podle pravidel o derivování složené funkce platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f' \frac{\partial s}{\partial t} = -cf', \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f' \frac{\partial s}{\partial x} = f' \cos \alpha.$$

Opětovnou derivací dostaneme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \cos^2 \alpha, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' \cos^2 \beta, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f'' \cos^2 \gamma.$$

Uvážíme-li, že  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , pak je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f'' ,$$

což po porovnání s  $(\partial^2 u / \partial t^2)$  dá hledanou *vlnovou rovnici*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \quad 11(2.5)$$

Pro funkci  $u \equiv g(\mathbf{nr} + ct)$  dostaneme stejnou rovnici. Zavedeme-li Laplaceův operátor  $\nabla^2$  (viz matematický dodatek D.5)

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} , \quad 11(2.6)$$

pak místo 11(2.5) máme

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \quad 11(2.7)$$

Řešení této vlnové rovnice můžeme vyjádřit ve tvaru součtu dvou funkcí (tzv. *d'Alembertovo řešení*)

$$u = f(\mathbf{nr} - ct) + g(\mathbf{nr} + ct) . \quad 11(2.8)$$

Ke způsobu odvození vlnové rovnice a k některým jejím důsledkům připojíme několik upřesňujících poznámek.

1. Představuje-li  $u$  mechanickou výchylku, pak  $(\partial^2 u / \partial t^2)$  je okamžité zrychlení v daném bodě (objemovém elementu). Zrychlení je rovno síle působící na jednotkovou hmotnost. Z vlnové rovnice pak plyne, že  $c^2(\partial^2 u / \partial x^2)$ , popř.  $c^2 \nabla^2 u$  představuje sílu působící na jednotkovou hmotnost. Tím vlnová rovnice nabývá charakteru *dynamického zákona*. V další části této kapitoly (v článcích 11.12 a 11.14) si ukážeme, jak z pohybových rovnic pro pružné nebo tekuté prostředí plyne vlnová rovnice.

2. Zde jsme předpokládali *známý tvar* řešení, z něhož jsme pak matematickými operacemi získali rovnici pro *toto* řešení. Matematickými úpravami (v daném případě derivacemi) může vzniknout rovnice, která má *také jiná* řešení než to, z něhož jsme při odvozování rovnice vycházeli. (Čtenář se s podobnou situací setkal již v elementární matematice, např. při řešení rovnic s odmocninami, kdy povyšováním vznikají nadbytečná řešení.) Jak jsme však uvedli v předešlé poznámce, z pohybových rovnic některých (nedisipativních) prostředí plyne vlnová rovnice 11(2.7). Ke stejné rovnici se dospěje i z rovnic elektromagnetického pole, popř. rovnic pro (slabé) gravitační pole, takže vlnová rovnice 11(2.7),

odvozená původně pro mechanické výchylky  $u$ , je vyjádřením *univerzálních dynamických zákonitostí přírodních jevů*.

3. Vlnová rovnice 11(2.3), popř. 11(2.7) obsahuje čas  $t$  pouze v diferenciální formě. To značí, že její řešení závisí pouze na rozdílu „koncového“ ( $t$ ) a „počátečního“ ( $t_0$ ) času  $\tau = t - t_0$ . Místo 11(2.7) můžeme psát  $(\partial^2 u / \partial \tau^2) = c^2 \nabla^2 u$ . Zaměníme-li  $\tau$  na  $-\tau$  (minus  $\tau$ ), tj.  $\tau' = -\tau$ , rovnice se *nezmění*. Změna znaménka  $\tau$  však značí vzájemnou výměnu počátečního a koncového času. Z toho soudíme, že vlnový proces, popisovaný vlnovou rovnicí 11(2.7), může probíhat *vrátně*, tj. v obou směrech, přičemž systém projde všemi stavy jako při přímém procesu, avšak v obrácené časové posloupnosti.

### 11.3 Rovinná monochromatická vlna. Vlnový vektor. Disperzní zákon

Z předchozího výkladu víme, že vlnová rovnice má řešení typu  $f(\mathbf{nr} - ct)$  a  $g(\mathbf{nr} + ct)$ . Poněvadž druhé řešení se od prvního liší jen formální záměnou znaménka rychlosti  $c \rightarrow -c$  (a záměnou funkčního symbolu  $f \rightarrow g$ ), budeme se zabývat pouze řešením

$$u = f(\mathbf{nr} - ct) .$$

Každá (dvakrát diferencovatelná) funkce tohoto typu je tedy řešením vlnové rovnice. O tom, *jakou konkrétní závislost* je nutno vzít, rozhodují vlastnosti daného prostředí spolu s počátečními a okrajovými podmínkami (počáteční výchylka, výchylka na hranicích prostředí). Taková metoda řešení vlnové rovnice se probírá ve speciálních kursech matematické fyziky, což však vyžaduje poměrně složitý matematický aparát, který značně přesahuje rámec a poslání této úvodní učebnice. A tak nám zde nezbyvá než předpokládat, že tvar této funkce je znám buď z experimentů, anebo z nějakých fyzikálních úvah.

V pozorovaných vlnových jevech se zpravidla setkáváme s pravidelným (prostorově i časově) periodickým opakováním situace. Takové chování můžeme zobrazit trigonometrickými funkcemi typu

$$B \cos [k(\mathbf{nr} - ct)] , \quad C \sin [k(\mathbf{nr} - ct)] ,$$

popř. jejich lineární kombinací

$$u = B \cos [k(\mathbf{nr} - ct)] + C \sin [k(\mathbf{nr} - ct)] . \quad 11(3.1)$$

Substitucemi

$$B = A \cos \varepsilon , \quad C = -A \sin \varepsilon \quad 11(3.2)$$

převědeme 11(3.1) na tvar

$$u = A \cos [k(\mathbf{nr} - ct) + \varepsilon]. \quad 11(3.3)$$

Vhodnou volbou časového počátku můžeme docílit, aby u *jedné vlny* nabylo  $\varepsilon$  libovolné předem zadané hodnoty. Zpravidla se volí  $\varepsilon = 0$ , což dá  $A \cos [k(\mathbf{nr} - ct)]$ , anebo  $\varepsilon = -\pi/2$ , což vede k závislosti  $A \sin [k(\mathbf{nr} - ct)]$ . Zde budeme většinou užívat první volbu, tj.

$$u = A \cos [k(\mathbf{nr} - ct)]. \quad 11(3.4)$$

Vlnoplochy jsou roviny s normálou reprezentovanou jednotkovým vektorem  $\mathbf{n}$ , přičemž vzdálenost  $d = \mathbf{rn}$  těchto rovin od počátku se posouvá v prostoru (se směrem  $\mathbf{n}$ ) konstantní fázovou rychlostí  $c$ , jak jsme vysvětlili na konci článku 11.1. Argument  $k(\mathbf{nr} - ct)$  musí být bezrozměrný, takže  $k$  má rozměr převrácené hodnoty délky. Najdeme fyzikální význam této veličiny. Funkce 11(3.4) je časově periodická. Označíme-li  $T$  nejkratší časový interval, během něhož v *daném bodě*  $\mathbf{r}$  nabývá výchylka  $u$  stejné hodnoty, z požadavku  $u(\mathbf{r}, t + T) = u(\mathbf{r}, t)$  pak plyne

$$kcT = 2\pi. \quad 11(3.5)$$

Veličina  $\lambda = cT$  je vlnová délka, tj. dráha, kterou signál urazí za dobu jedné periody; je tedy

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad 11(3.6)$$

což souhlasí s *vločtem* zavedeným v článku 11.1. V teoretických úvahách je výhodné zavést úhlovou frekvenci

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad 11(3.7)$$

pomocí níž dostaneme známé nám již vyjádření

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad 11(3.8)$$

Řešení 11(3.4) tedy odpovídá rovinné vlně s jedinou (úhlovou) frekvencí  $\omega$ , proto se nazývá *rovinnou monochromatickou* \*) *vlnou*.

\*) Z řeckého  $\mu\nu\omicron\sigma$  (monos = jediný),  $\chi\rho\omicron\mu\sigma$  (chromos = barevný).

Zpravidla se zavádí *vlnový vektor*  $\mathbf{k}$ , jehož absolutní hodnota  $|\mathbf{k}| \equiv k$  a jehož směr souhlasí se směrem šíření

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} . \quad 11(3.9)$$

Kartézské komponenty  $k_x, k_y, k_z$  se zpravidla vyjadřují pomocí směrových kosinů (viz článek 11.1)

$$k_x = \frac{\omega}{c} \cos \alpha , \quad k_y = \frac{\omega}{c} \cos \beta , \quad k_z = \frac{\omega}{c} \cos \gamma \quad 11(3.10)$$

anebo sférických úhlů  $\vartheta, \varphi$  (viz matematický dodatek D.1)

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sin \vartheta \cos \varphi , \quad k_y = \frac{\omega}{c} \sin \vartheta \sin \varphi , \quad k_z = \frac{\omega}{c} \cos \vartheta . \quad 11(3.11)$$

Pomocí označení 11(3.7) a 11(3.8) přepíšeme rovinnou monochromatickou vlnu ve tvaru

$$u = A \cos (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) . \quad 11(3.12)$$

Amplituda  $A$  rovinné monochromatické vlny nezávisí ani na poloze  $\mathbf{r}$ , ani na čase  $t$ , může však záviset na vlnovém vektoru  $\mathbf{k}$ , tj.  $A \equiv A(\mathbf{k})$ .

Ze zkušenosti víme, že rychlost  $c$  šíření vlnového rozruchu závisí na frekvenci\*)  $\omega$ , tj.

$$c \equiv c(\omega) , \quad 11(3.13)$$

což ve spojení s 1(3.8) dá  $k = \omega/c(\omega)$ . Řešením této rovnice získáme závislost frekvence  $\omega$  na vlnočtu  $k$ , tzv. *disperzní zákon*

$$\omega \equiv \omega(k) . \quad 11(3.14)$$

V tomto případě frekvence  $\omega$  závisí pouze na *absolutní hodnotě* vlnového vektoru, což odpovídá *izotropnímu prostředí*. V *anizotropních prostředích* (např. v krystalech) je i rychlost šíření v různých směrech různá, takže disperzní zákon bude mít tvar

$$\omega \equiv \omega(\mathbf{k}) . \quad 11(3.14')$$

Aby nedošlo k přehlédnutí, upozorňujeme, že zde je argumentem vlnový vektor  $\mathbf{k}$ .

\*) Zde budeme používat pouze úhlovou frekvenci  $\omega$ , proto budeme přívlastek „úhlová“ většinou vynechávat.

Konkrétní tvar disperzního zákona závisí pro každý druh vln (zvukové, světelné) podstatným způsobem na vlastnostech a stavu prostředí. Teoretické určení disperzního zákona je zpravidla velmi komplikovaným problémem, poněvadž vyžaduje započtení struktury i dynamiky daného prostředí, jímž se vlnový rozruch šíří. S jednoduchým příkladem takového výpočtu se seznámíme v článku 11.13.

Trigonometrické funkce souvisí velmi jednoduše s exponenciální funkcí pomocí *Eulerových vzorců*

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha . \quad 11(3.15)$$

Libovolné komplexní číslo  $z = a + ib$ , kde  $a, b$  jsou reálná čísla, můžeme substitucemi  $a = |z|\cos \alpha$ ,  $b = |z|\sin \alpha$  převést na *Gaussův tvar*

$$z = a + ib = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z|e^{i\alpha} . \quad 11(3.16)$$

kde  $|z| \equiv (a^2 + b^2)^{1/2}$  je absolutní hodnota komplexního čísla. Manipulace s komplexními čísly je zpravidla jednodušší, proto budeme podobně jako v teorii kmitů (viz kapitola 3) užívat komplexní symboliky. Ve shodě s 11(3.15) můžeme  $\cos \alpha$  a  $\sin \alpha$  vyjádřit jako reálnou (Re) a imaginární (Im) část komplexního čísla  $e^{i\alpha}$ , tj.

$$\cos \alpha = \operatorname{Re} (e^{i\alpha}) , \quad \sin \alpha = \operatorname{Im} (e^{i\alpha}) . \quad 11(3.17)$$

Rovinnou monochromatickou vlnu 11(3.12) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$u = \operatorname{Re} (A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}) . \quad 11(3.18)$$

Obecně můžeme v tomto zápisu pokládat i amplitudu  $A$  za komplexní číslo

$$A = |A|e^{i\epsilon} , \quad 11(3.19)$$

což po dosazení do 11(3.18) dá  $u = |A|\cos (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \epsilon)$  odpovídající vyjádření 11(3.3) v reálné symbolice.

Komplexní symbolika se ještě obvykle dále zjednodušuje tak, že místo 11(3.18) se píše

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} , \quad 11(3.20)$$

čímž se rozumí *reálná část* výrazu stojícího na pravé straně, aniž bychom explicitně vypisovali symbol Re označující reálnou část. Pokud se pracuje se  $\sin (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , pak se v 11(3.20) rozumí imaginární část. Zde však budeme všude rozumět reálnou část. Ve výpočtech (algebraické operace, derivace, integrace) lze užívat komplexního zápisu 11(3.20), a pak teprve ve výsledných formulích přejít k reálné části. Zápis typu 11(3.20) může být zpočátku matoucí, jelikož symbol  $u$  zpravidla představuje reálnou veličinu (výhylku, intenzity elektromagnetického pole), zatímco na pravé straně je komplexní číslo. Je to však zápis

velice úsporný, v literatuře běžný, proto je nutno si na něj *zvyknout*. Stačí, aby si čtenář před příslušným výrazem přimyslel chybějící symbol  $\text{Re}$  označující reálnou část.

Poznámka. Rovinná monochromatická vlna má v teorii vlnění *významné postavení*, a to z několika důvodů. Malou část libovolné vlnoplochy lze pokládat za část roviny. Trigonometrické funkce tvoří tzv. *úplný systém funkcí*, pomocí nichž lze ostatní funkce vyjádřit ve tvaru součtu (tzv. Fourierovy řady)

$$F(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] .$$

Při tom je nutno uvážit také disperzní zákon.

## 11.4 Sférická vlna

Tekutiny (tj. plyny a kapaliny s výjimkou tzv. kapalných krystalů) a ostatní amorfnní látky se vyznačují tím, že jejich vlastnosti jsou ve všech směrech stejné, což označujeme termínem *izotropie\**. V izotropních prostředích se rozruch šíří na všechny strany stejně, takže rozruch  $u(\mathbf{r}, t)$  v daném čase  $t$  a v daném bodě  $\mathbf{r}$  závisí pouze na *absolutní hodnotě vzdálenosti*

$$r \equiv |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad 11(4.1)$$

od místa rozruchu. Rozruch bude sféricky symetrický, z čehož se dá usuzovat, že vlnoplochy budou koncentrické koule rozpinající se (šířící se) fázovou rychlostí  $c$ .

Budeme se zabývat řešením vlnové rovnice 11(2.7) pro trojrozměrné vlnění v *izotropním prostředí*, kdy je

$$u \equiv u(r, t) . \quad 11(4.2)$$

Znovu upozorňujeme, že zde je  $r \equiv |\mathbf{r}|$ . Jednoduchým výpočtem (viz příklad 1 k této kapitole) najdeme, že

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) , \quad 11(4.3)$$

takže vlnová rovnice 11(2.7) bude mít tvar

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \quad 11(4.4)$$

\* Z řeckého  $\text{ἰσος}$  (izos = stejný),  $\text{τροπος}$  (trope = poloha, směr).



Tuto vlnovou rovnici lze dále zjednodušit jednoduchou, v teorii vlnění často užívanou substitucí

$$u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}. \quad 11(4.5)$$

Po dosazení do 11(4.4) dostaneme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad 11(4.6)$$

To je vlnová rovnice typu 11(2.3) pro jednorozměrné vlnění. Rovnice 11(2.3) a 11(4.6) jsou fakticky identické, jelikož se na sebe navzájem převedou záměnou symbolů  $x \leftrightarrow r$ ,  $u \leftrightarrow v$ . Z toho soudíme (viz 11(2.4)), že rovnice 11(4.6) má řešení

$$v \equiv v(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct), \quad 11(4.7)$$

a tudíž

$$u \equiv u(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}. \quad 11(4.8)$$

Vyšetříme význam obou řešení. Vezmeme nejdříve první řešení  $r^{-1}f(r - ct)$ . Výraz  $r_0 - ct_0$  značí fázi vlny v čase  $t_0$  ve vzdálenosti  $r_0$  od počátku souřadnic, tj. na povrchu koule o poloměru  $r_0$ . Ve všech časech  $t$ , a ve všech vzdálenostech  $r$  vyhovujících podmínce  $ct - r = ct_0 - r_0$  bude stejná fáze. Jsou to koncentrické koule

$$r = r_0 + c(t - t_0), \quad 11(4.9)$$

jejichž poloměr roste (vlna se rozbíhá) fázovou rychlostí  $c$ . Z toho důvodu se taková vlna nazývá *rozbíhavou* neboli *divergentní sférickou vlnou*. Ve druhém řešení  $r^{-1}g(r + ct)$  budou místa stejné fáze určena podmínkou  $r + ct = r_0 + ct_0$ , tj.

$$r = r_0 - c(t - t_0). \quad 11(4.10)$$

Jsou to koncentrické koule, jejichž poloměr se zmenšuje fázovou rychlostí  $c$ . Řešení  $r^{-1}g(r + ct)$  představuje *sbíhavou* neboli *konvergentní sférickou vlnu*. Náznorně můžeme říci, že rozbíhavé (sbíhavé) řešení představuje expanzní (kompresní) vlnu.

Budeme se zabývat harmonickou rozbíhavou sférickou vlnou, tj. případem, kdy  $f(r - ct) = a \exp [ik(r - ct)]$ . V tomto případě máme

$$u(r, t) = \frac{a}{r} e^{ik(r - ct)}. \quad 11(4.11)$$

Připomínáme, že zde užíváme úmluvy o komplexní symbolice, zavedené na konci předešlého článku. Stejně jako u rovinné monochromatické vlny najdeme, že  $kcT = 2\pi$ , tj.  $kc = \omega$ , resp.

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad 11(4.12)$$

Rozbíhovou monochromatickou sférickou vlnu charakterizujeme závislostí

$$u(r, t) = \frac{a}{r} e^{i(kr - \omega t)}. \quad 11(4.13)$$

Upozorňujeme, že v exponentu je prostý součin  $kr$  na rozdíl od skalárního součinu  $\mathbf{kr}$  v rovinné monochromatické vlně. Veličinu  $A \equiv a/r$  lze nazvat amplitudou (rozbíhavě) sférické vlny. Amplituda této vlny je tedy nepřímo úměrná vzdálenosti  $r$  (poloměru koule). Později uvidíme, že proudová hustota energie vlnění je přímo úměrná kvadrátu amplitudy. Tok energie plošným elementem  $dS = r^2 d\Omega$  je tak úměrný  $|a/r|^2 r^2 d\Omega = |a|^2 d\Omega$ , kde  $d\Omega$  je element prostorového úhlu definovaný rovnicí D(1.31).

V izotropním prostředí je veličina  $a$  v rovnici 11(4.11) nezávislá na sférických souřadnicích  $r, \vartheta, \varphi$ . V anizotropních prostředích je však šíření sférické vlny směrově závislé, což vyjádříme závislostí

$$u(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{a(\vartheta, \varphi)}{r} e^{i(kr - \omega t)}. \quad 11(4.14)$$

## 11.5 Princip superpozice. Interference vlnění

Vlnový rozruch v daném bodě  $\mathbf{r}$  a v daném čase  $t$  může být vyvolán několika příčinami, tj. je výslednicí několika dílčích rozruchů přicházejících (v čase  $t$ ) do daného bodu  $\mathbf{r}$  z různých míst. Vztah mezi dílčími rozruchy a výsledným rozruchem je nutno pro každý druh vlnění najít *empiricky*.

Vlnění je zpravidla trojrozměrné; tehdy výchylku budeme pokládat za vektorovou veličinu  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Tato „výchylka“ může představovat mechanickou veličinu, změnu hustoty, tlaku a rychlosti tekutiny, ale také nemechanickou veličinu typu intenzity elektrického a magnetického pole. V případech, kdy tyto výchylky jsou malé, rozbořením empirických dat se dospěje k následujícímu poznatku, zvanému *princip superpozice*.

Vyvolá-li první rozruch (při neexistenci jakéhokoliv jiného rozruchu) výchylku  $u_1(\mathbf{r}, t)$  a druhý rozruch (opět při nepřítomnosti jakéhokoliv jiného rozruchu) výchylku  $u_2(\mathbf{r}, t)$ , pak výsledná výchylka  $u(\mathbf{r}, t)$  vyvolaná v daném bodě

$\mathbf{r}$  a v daném čase  $t$  při *současném* působení obou rozruchů je vektorovým součtem – *superpozicí* – obou výchylek

$$u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t) . \quad 11(5.1)$$

Při tom se pochopitelně vždy jedná o výchylky *stejného druhu*.

Princip superpozice vede k tomu, že vlnová rovnice je lineární homogenní diferenciální rovnicí (viz článek 11.2). Čtenář se může ptát, proč z principu superpozice „děláme takovou vědu“, když už víme, že vlnová rovnice automaticky garantuje superpozici vlnění. Při odvozování vlnové rovnice 11(2.3) a 11(2.7) jsme mlčky předpokládali, že rychlost  $c$  šíření rozruchu nezávisí na výchylce  $u$  (amplitudě vlny). Kdyby  $c$  záviselo na  $u$ , tj.  $c \equiv c(u)$ , pak místo jednoduchých vztahů v 11(2.2) bychom museli dosadit

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 1 - t \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -c - t \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t},$$

což by nás nepřivedlo k jednoduché vlnové rovnici 11(2.3).

Princip superpozice nás tedy navíc přivádí k *nezávislosti fázové rychlosti na amplitudě vlny*.

Proces skládání dvou anebo většího počtu vlnění podle principu superpozice se nazývá *interferencí vlnění*. Tento pojem, jenž je jedním z centrálních pojmů v nauce o vlnění, zavedl A. J. FRESNEL (1810).

Z principu superpozice plyne, že jednotlivé dílčí vlnové rozruchy jsou navzájem nezávislé. Při jejich složení však dochází ke specifickým interferenčním jevům, s nimiž se setkáváme prakticky ve všech oborech fyziky. Některé z těchto interferenčních jevů si postupně vysvětlíme.

K interferenci může docházet mezi vlnami různé frekvence a různého vlnového vektoru. S tímto obecným případem se seznámíme v článku 11.8.

Zde se budeme zabývat interferencí dvou rovinných monochromatických vln stejné frekvence (a stejného vlnočtu), tj.

$$u_1 = A_1 \cos(kx - \omega t + \varepsilon_1), \quad u_2 = A_2 \cos(kx - \omega t + \varepsilon_2). \quad 11(5.2)$$

Místo fázových posunutí  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  zvolíme body  $x_1, x_2$  tak, že  $\varepsilon_1 = -kx_1$ ,  $\varepsilon_2 = -kx_2$ ; fáze  $s(x, t) = kx - \omega t + \varepsilon$  vyjádříme rovnicemi

$$s_1(x, t) = k(x - x_1) - \omega t, \quad s_2(x, t) = k(x - x_2) - \omega t.$$

Odtud plyne rovnost fází v příslušných dvou bodech ve všech časech

$$s_1(x_1, t) = s_2(x_2, t) = -\omega t.$$

Zvolíme-li ještě stejné amplitudy  $A_1 = A_2 \equiv a$ , pak je

$$u = u_1 + u_2 = a \cos[k(x - x_1) - \omega t] + a \cos[k(x - x_2) - \omega t].$$

Pomocí známého trigonometrického vzorce

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

získáme pro výslednou vlnu vyjádření

$$u = A \cos (kx - \omega t + \varepsilon), \quad 11(5.3)$$

kde

$$\varepsilon = -\frac{k}{2} (x_1 + x_2) = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad 11(5.4)$$

$$A = 2a \cos \left[ \frac{k}{2} (x_2 - x_1) \right], \quad 11(5.5)$$

Výsledkem složení dvou rovinných monochromatických vln se stejnou konstantní amplitudou je opět rovinná monochromatická vlna  $[\cos (kx - \omega t + \varepsilon)]$ , avšak s amplitudou periodicky závislou na fázovém rozdílu

$$s_2(x, t) - s_1(x, t) = k(x_1 - x_2).$$

Absolutní hodnota této amplitudy se mění v závislosti na fázovém rozdílu v intervalu

$$0 \leq |A| \leq 2 |a|. \quad 11(5.6)$$

Takové zeslabování a zesilování výsledné vlny je typickým projevem interference vlnění. Při dráhovém rozdílu  $|x_2 - x_1|$  vyhovujícím podmínce

$$\frac{k}{2} |x_2 - x_1| = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

je amplituda nulová, obě vlny se navzájem ruší, což je tzv. *rušivá (destruktivní, negativní) interference*. Těto podmínce lze dát názornější smysl, zavedeme-li místo vlnočtu vlnovou délku  $\lambda = 2\pi/k$ , což dá při lichém počtu půlvln

$$A = 0 \quad \text{při} \quad |x_2 - x_1| = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad 11(5.7)$$

Maximální zesílení nazýváme *konstruktivní (pozitivní) interference*. Tomu odpovídá maximální hodnota  $|A| = 2 |a|$  při

$$\frac{k}{2} |x_2 - x_1| = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

tj. při celém počtu vln (sudém počtu půlvln)

$$|A| = 2|a| \quad \text{při} \quad |x_2 - x_1| = n\lambda \equiv 2n \frac{\lambda}{2}. \quad 11(5.8)$$

Interference dvou rovinných monochromatických vln 11(5.2) s různými amplitudami se řeší obdobně. V úloze 2 k této kapitole je ukázáno, že  $u = u_1 + u_2$  se dá převést na tvar

$$u = A \cos(kx - \omega t + \varepsilon), \quad 11(5.9)$$

kde

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2}{A_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 \cos \varepsilon_2}, \quad 11(5.10)$$

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]^{1/2}. \quad 11(5.11)$$

Ve speciálním případě  $A_1 = A_2 = a$  dostaneme 11(5.3) – 11(5.5).

Jak uvidíme později (článek 11.16), intenzita vlnění je přímo úměrná kvadrátu výsledné amplitudy, tj. v daném případě

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Členy  $A_1^2$ ,  $A_2^2$  odpovídají intenzitám *dílčích vlnění*, *interferenční člen*  $2A_1A_2 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$  závisí na *fázovém rozdílu*  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ . Tento člen vymizí při  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \pi/2$ ; při  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$  je  $A^2 = (A_1 + A_2)^2$ , při  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \pi$  je  $A^2 = (A_1 - A_2)^2$ , což názorně ilustruje vliv fázového rozdílu dvou vln na intenzitu výsledné vlny.

## 11.6 Stojaté vlnění

Důležitý případ interference dvou stejných vln nastává, když se obě vlny šíří v navzájem opačných směrech. V jednorozměrném případě tomu odpovídá řešení

$$u = f(x - ct) + f(x + ct). \quad 11(6.1)$$

Počátek  $O$  souřadnice  $x$  položíme do místa, v němž se obě proti sobě postupující vlny setkají v okamžiku  $t = 0$  tak, že obě výchylky  $u_1$ ,  $u_2$  jsou nulové. V případě rovinné monochromatické vlny tomu odpovídá řešení

$$u_1 = a \sin(-kx + \omega t), \quad u_2 = a \sin(kx + \omega t). \quad 11(6.2)$$

Pro výslednou vlnu dostaneme

$$u = u_1 + u_2 = A \sin(\omega t), \quad 11(6.3)$$

kde amplituda

$$A = 2a \cos(kx). \quad 11(6.4)$$

Ve všech místech bodové řady vzniknou jednoduché harmonické kmity  $\sin(\omega t)$  se stejnou fází, avšak výsledná amplituda  $A$  těchto kmitů závisí periodicky na vzdálenosti  $x$  od místa, které jsme zvolili za počátek  $O$ . Absolutní hodnota  $|A|$  je maximální v místech, kde  $\cos(kx) = \pm 1$ , tj.

$$|x| = n \frac{\lambda}{2} \equiv 2n \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 11(6.5)$$

Těmto místům, v nichž kmity mají maximální absolutní hodnotu amplitudy, říkáme *kmitny*. Tyto kmitny jsou (na obě strany) od počátku  $O$  vzdáleny o *celý počet půlvln* neboli o sudý počet čtvrtvln. V bodech, v nichž  $\cos(kx) = 0$ , resp.

$$|x| = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 11(6.6)$$

jsou tzv. *uzly*, z nichž je výchylka *trvale nulová*.

Superpozicí dvou stejných příčných vln šířících se v navzájem opačných směrech vznikne *stojaté vlnění příčné*; obdobnou superpozicí podélných vln vznikne *stojaté vlnění podélné*.

Zopakujeme si zásadní rozdíl mezi postupným a stojatým vlněním. Při postupném vlnění kmitají všechny body se stejnou amplitudou, avšak s různou fází, která se šíří fázovou rychlostí vlnění. Postupné vlnění můžeme znázornit pohybem neměnné vlnovky fázovou rychlostí  $c$ . Při stojatém vlnění je amplituda periodicky závislá na poloze bodu; body vzájemně vzdálené o vlnovou délku kmitají ve stejné fázi, body vzájemně vzdálené o půl vlny s opačnou fází. Stojaté vlnění můžeme znázornit vlnovkou pevnou v prostoru, jejíž amplituda se v každém místě synchronně (současně) periodicky mění.

Ke vzniku stojatého vlnění obvykle dochází tak, že postupná vlna se na konci útvaru odrazí a pohybuje se opačným směrem; interferencí obou postupných vln pak vzniká vlnění stojaté.

## 11.7 Polarizace vlnění

V článku 11.1 jsme zavedli pojem lineární polarizované vlny jako příčné vlny, v níž všechny výchylky leží ve všech místech ve stejné rovině. Nyní budeme vyšetřovat vlnění, které vznikne superpozicí dvou stejných vln lineárně polarizovaných *ve dvou vzájemně kolmých rovinách*. Postup je prakticky shodný s tím, je-

hož jsme užili v článku 3.5 při skládání dvou vzájemně kolmých kmitů, proto výklad matematických úprav bude velice stručný.

Šíření příčné vlny zvolíme ve směru osy  $z$ . Příčnosť vlnění značí, že výchylka  $\mathbf{u}$  je kolmá na směr šíření (vlnový vektor  $\mathbf{k}$ ), tj.

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = 0. \quad 11(7.1)$$

První vlna nechť je lineárně polarizovaná v rovině  $(x, z)$ . Fázi vlny zvolíme tak, aby bylo

$$u_x = A_1 \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t). \quad 11(7.2)$$

Druhá vlna je podle předpokladu lineárně polarizovaná v rovině  $(y, z)$ . Amplituda i fáze této druhé vlny mohou být obecně jiné než u první vlny, což vyjádříme závislostí

$$u_y = A_2 \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \varepsilon), \quad 11(7.3)$$

kde  $\varepsilon$  je (konstantní) fázový rozdíl obou vln. Komponenta  $u_z$  je (s ohledem na transversálnost vln) nulová,  $u_z = 0$ .

Nejdříve si všimněme případu, kdy fázový rozdíl  $\varepsilon = n\pi$ . V takovém případě z 11(7.2) a 11(7.3) plyne

$$u_y = (-1)^n \frac{A_2}{A_1} u_x, \quad 11(7.4)$$

což v proměnných  $u_x, u_y$  představuje rovnici přímky se směrnicí  $(-1)^n (A_2/A_1)$ . Při fázovém rozdílu  $\varepsilon = n\pi$  dvou vln lineárně polarizovaných ve dvou vzájemně kolmých rovinách  $(x, z)$  a  $(y, z)$  vznikne opět vlna lineárně polarizovaná v rovině, jež prochází osou  $z$  a s osou  $x$  svírá úhel  $\alpha$  určený vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha = (-1)^n \frac{A_2}{A_1}. \quad 11(7.5)$$

Stejným postupem jako v článku 3.5 získáme z 11(7.2) a 11(7.3) rovnici křivky, již opisuje výchylka  $\mathbf{u}$ ,

$$\left(\frac{u_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{A_2}\right)^2 - \frac{2u_x u_y}{A_1 A_2} \cos \varepsilon - \sin^2 \varepsilon = 0. \quad 11(7.6)$$

O správnosti této rovnice se snadno přesvědčíme přímým dosazením za  $u_x$  a  $u_y$  a užitím elementárních trigonometrických vztahů. V proměnných  $u_x, u_y$  je 11(7.6) *rovnici elipsy* v necentrálním tvaru.

Při fázovém rozdílu  $\varepsilon = (2n + 1) (\pi/2)$  se 11(7.6) zredukuje na elipsu v centrálním tvaru

$$\left(\frac{u_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{A_2}\right)^2 = 1,$$

což lze získat přímo z 11(7.2) a 11(7.3), jelikož je

$$u_x = A_1 \sin(\mathbf{kr} - \omega t), \quad u_y = (-1)^n A_2 \cos(\mathbf{kr} - \omega t).$$

Shrneme získané výsledky pro fázový rozdíl  $\varepsilon \neq n\pi$ . Superpozicí dvou příčných vln lineárně polarizovaných ve dvou vzájemně kolmých rovinách  $(x, z)$  a  $(y, z)$  vznikne příčná vlna, jejíž výchylka  $\mathbf{u}$  opisuje elipsu (v rovině kolmé ke směru šíření). Takovou vlnu nazýváme *elipticky polarizovaná*. Ve speciálním případě superpozice dvou takových vln se stejnými amplitudami  $A_2 = A_1$  vznikne *kruhově polarizovaná vlna*.

## 11.8 Vlnový balík. Grupová rychlost

Doposud jsme se zabývali superpozicí vln se stejnou frekvencí a stejným vlnovým vektorem (vlnočtem  $k$ ). Nyní se budeme zabývat případem, kdy frekvence i vlnočty interferujících vln jsou *různé*.

Pro dvě vlny

$$u_1 = a \cos(k_1 x - \omega_1 t), \quad u_2 = a \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad 11(8.1)$$

dostaneme superpozici

$$u = u_1 + u_2 = A(x, t) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \quad 11(8.2)$$

kde amplituda

$$A \equiv A(x, t) = 2a \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right). \quad 11(8.3)$$

Budeme předpokládat, že se jedná o interferenci dvou vln s blízkými frekvencemi a blízkými vlnočty, proto položíme

$$\omega_1 \equiv \omega, \quad \omega_2 \equiv \omega + \Delta\omega, \quad k_1 \equiv k, \quad k_2 \equiv k + \Delta k,$$



kde  $\Delta\omega \ll \omega$ ,  $\Delta k \ll k$ . Poněvadž  $\omega$  závisí na  $k$  disperzním zákonem (viz článek 11.3)  $\omega \equiv \omega(k)$ , lze pro malé rozdíly položit  $\Delta\omega = w \Delta k$ , kde

$$w = \frac{d\omega}{dk}. \quad 11(8.4)$$

Jelikož  $\Delta\omega \ll \omega$ ,  $\Delta k \ll k$ , lze v 11(8.2) položit  $k_1 + k_2 \cong 2k$ ,  $\omega_1 + \omega_2 \cong 2\omega$ . Pro amplitudu  $A(x, t)$  takto superponované vlny dostaneme vyjádření

$$A \equiv A(x, t) = 2a \cos \left[ (x - wt) \frac{\Delta k}{2} \right]. \quad 11(8.5)$$

Vznikne tak postupná vlna

$$u = A(x, t) \cos(kx - \omega t) \quad 11(8.6)$$

s amplitudou  $A$  závislou periodicky na souřadnicích a na čase vztahem 11(8.5). Místa stejné fáze  $kx - \omega t = kx_0 - \omega t_0$  se šíří fázovou rychlostí  $c = \omega/k$ .

Absolutní hodnota amplitudy bude *maximální* všude a vždy tam, kde

$$(x_n - wt) \Delta k = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 11(8.7)$$

a bude *nulová* při

$$x_n = wt + (2n + 1) \frac{\pi}{\Delta k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 11(8.8)$$

Tato místa maximálních a minimálních absolutních hodnot amplitudy dělí (nekonečně dlouhou) postupnou vlnu na jednotlivé skupiny (grupy) vln, které se pohybují rychlostí  $w = d\omega/dk$ , zvanou *grupová\**) rychlost vln. Mezi dvěma sousedními místy nulové amplitudy je vzdálenost

$$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k}. \quad 11(8.9)$$

Jelikož  $k = 2\pi/\lambda$ , lze položit  $|\Delta k| \cong (2\pi/\lambda^2) \Delta\lambda$ . Šířka  $\Delta x$  jednotlivé grupy vln je řádově  $\Delta x \cong \lambda^2/\Delta\lambda$ .

Amplituda  $A(x, t)$  bude stejná ve všech místech a časech svázaných vztahem  $x - wt = x_0 - \omega t_0$ , tj.

$$x = x_0 + w(t - t_0). \quad 11(8.10)$$

Jsou to roviny posouvající se v prostoru grupovou rychlostí  $w$ .

\*) Z německého die Gruppe = skupina, svazek,

Zobecnění předešlých výsledků na svazek většího počtu vln v pásmu  $\Delta k$ ,  $\Delta\omega$  je snadné. Výpočet povedeme v komplexní symbolice (viz článek 11.3). Víme, že výsledné vlnění je určeno superpozicí dílčích vlnění

$$u = \sum_k u_k . \quad 11(8.11)$$

Jednotlivé postupné vlny vezmeme ve tvaru

$$u_k = a(k) \exp [i(kx - \omega t)] . \quad 11(8.12)$$

Při spojitém pásmu vlnočtu  $k$  je nutno součet 11(8.11) nahradit integrací, tj.

$$u(x, t) = \int a(k) \exp [i(kx - \omega t)] dk . \quad 11(8.13)$$

Při integraci je ovšem nutno uvážit také disperzní zákon  $\omega \equiv \omega(k)$ . Takto vzniklé vlně říkáme *vlnový balík* neboli *vlnové klubko*.

Jsou-li zadány amplitudy  $a(k)$  jednotlivých vln, pak při známém disperzním zákoně  $\omega(k)$  se výpočet výsledné vlny  $u(x, t)$  redukuje na integraci. V dalším budeme pro konkrétnost předpokládat, že se jedná o superpozici v pásmu

$$k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k \quad 11(8.14)$$

se stejnými amplitudami

$$a(k) = a(k_0) . \quad 11(8.15)$$

pro všechna  $k$  z intervalu 11(8.14). Jedná se tedy o výpočet integrálu

$$u(x, t) = a(k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp [i(kx - \omega t)] dk . \quad 11(8.16)$$

Potřebujeme ještě specifikovat disperzní zákon  $\omega \equiv \omega(k)$ . Pro nepřiliš silné závislosti lze při nepřiliš širokém pásmu  $\Delta k$  položit

$$\omega(k) \cong \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} (k - k_0) \equiv \omega_0 + (k - k_0)w ,$$

kde  $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$  a  $w \equiv d\omega/dk$  je známá nám již grupová rychlost. Argument v integrandu upravíme

$$kx - \omega t = k_0 x - \omega_0 t + (k - k_0) (x - wt) .$$

Vzniklý integrál se snadno vyřeší substitucemi  $k - k_0 = K$ ,  $x - wt = b$ , což dá

$$\int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp [i(k - k_0)(x - wt)] dk = \int_{-\Delta k}^{+\Delta k} \exp (ibK) dK =$$

$$= \frac{1}{ib} (e^{ib\Delta k} - e^{-ib\Delta k}) = 2 \frac{\sin [(x - wt) \Delta k]}{x - wt}.$$

Při poslední úpravě jsme užili Eulerova vzorce  $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha$ . Získali jsme tak hledané řešení

$$u(x, t) = A(x, t) \exp [i(k_0 x - \omega_0 t)]. \quad 11(8.17)$$

kde výsledná amplituda vlnového balíku

$$A(x, t) \equiv A(x - wt) = 2a(k_0) \frac{\sin [(x - wt) \Delta k]}{x - wt}. \quad 11(8.18)$$

Výsledkem superpozice 11(8.16) je postupná vlna  $\exp [i(k_0 x - \omega_0 t)]$  s amplitudou  $A(x, t)$  závislou na souřadnicích a na čase prostřednictvím argumentu  $x - wt$ .

Další postup je stejný jako v případě superpozice dvou vln. Amplituda má tvar funkce  $(\sin y)/y$ , a má tedy absolutní maximum při  $x - wt = 0$ , tj.  $x_{\max} = wt$ . Argument  $|x - wt|$  se dá přepsat jako

$$|x - wt| \equiv |x - x_{\max}| \equiv \Delta x. \quad 11(8.19)$$

Poněvadž maxima  $|A(x, t)|$  jsou klesající funkcí argumentu  $x - wt$ , amplituda  $A(x, t)$  bude prakticky nenulová při  $|(x - wt) \Delta k| \cong 1$ , tj.

$$\Delta x \cdot \Delta k \cong 1. \quad 11(8.20)$$

To je významná *relace neurčitosti* platné pro každý druh vln: čím je pásmo  $\Delta k$  širší, tím je přesnější prostorová lokalizace vlny, a naopak s klesající šířkou pásma roste prostorová rozlehlost vlnového signálu. Číselné ilustrace uvádíme v příložených úlohách.

Intenzita vlnění (viz článek 11.16) je přímo úměrná kvadrátu amplitudy výsledné vlny. Z toho soudíme, že *energie vlnového rozruchu se šíří grupovou rychlostí* (jako sama amplituda). Tato rychlost – na rozdíl od fázové rychlosti  $c$  – *nemůže přesáhnout rychlost světla ve vakuu*.

Závěrem tohoto stručného pojednání o vlnovém balíku a grupové rychlosti připojíme několik poznámek.

1. V anizotropním prostředí má disperzní zákon tvar

$$\omega \equiv \omega(\mathbf{k}) \equiv \omega(k_x, k_y, k_z).$$

V takových prostředcích je nutno zavést vektor grupové rychlosti

$$w_x = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \quad w_y = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \quad w_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}, \quad 11(8.21)$$

což jsou vlastně složky gradientu funkce  $\omega(k_x, k_y, k_z)$  v prostoru vlnového vektoru,  $\mathbf{w} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$ .

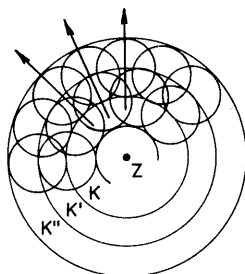
2. Čtenář zajisté ví, že u mikročastic se výrazně projevují také jejich *vlnové vlastnosti*. Podle de Broglieho je nutno částici s hybností  $p$  přiřadit vlnovou délku  $\lambda = h/p$ , kde  $h$  je Planckova konstanta. Obvykle se zavádí  $\hbar = h/2\pi \cong 1,055 \cdot 10^{-34}$  J s, takže je  $p = 2\pi\hbar/\lambda = \hbar k$ , kde  $k$  je vlnčet. Po dosazení  $\Delta k = \Delta p/\hbar$  do 11(8.20) dostaneme známou *Heisenbergovu relaci neurčitosti* mezi lokalizací ( $\Delta x$ ) částice a neurčitostí ( $\Delta p$ ) její hybnosti

$$\Delta x \cdot \Delta p \cong \hbar. \quad 11(8.22)$$

Stav mikročastice nelze tedy (na rozdíl od klasické částice) popsat zadáním její polohy a hybnosti (rychlosti), což znamená, že mikročasticím nelze přiřadit *trajektorii*. To však již patří do kvantové mechaniky.

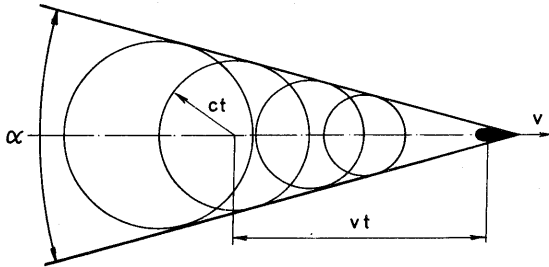
## 11.9 Huygensův-Fresnelův princip

V homogenním a izotropním prostředí se šíří vlnění ve všech bodech a ve všech směrech stejnou fázovou rychlostí  $c$ . Vlnění tedy dospěje za čas  $t$  na všechny strany stejně daleko, tj. na povrch koule o poloměru  $r = ct$ . Plochu, na níž dospěje vlnění současně ve všech jejích bodech, nazýváme *čelní vlnoplochou*.



Obr. 11.5 Vznik elementárních vlnoploch

Když se vlnění setká s překážkami, obraz vlnění se změní. V takovém případě můžeme získat cenné informace o průběhu vlnění, umíme-li ze známého čela vlny v čase  $t$  zkonstruovat čelo vlny v čase  $t + \Delta t$ . Princip, na němž je tato



Obr. 11.6 Brázdění vodní hladiny

konstrukce založena, objevil na základě pozorování Ch. HUYGENS (1690) a později upřesnil A. J. FRESNEL (1810).

Podle *Huygensova-Fresnelova principu* se každý bod, do něhož se čelo vlny dostalo v nějakém čase  $t$ , stává novým zdrojem elementárního rozruchu, z něhož se vlnění začíná šířit na všechny strany. Je-li rychlost šíření vlnění v daném místě rovna  $c$ , pak kolem každého takového bodu se za čas  $\Delta t$  vytvoří elementární kulová vlnoplocha s poloměrem  $c \Delta t$ . Skutečnou vlnoplochu v čase  $t + \Delta t$  je vnější obálka všech těchto elementárních vlnoploch (viz obr. 11.5). Výsledný stav vlnění je určen superpozicí všech elementárních vlnění.

S konkrétními aplikacemi Huygensova-Fresnelova principu se čtenář seznámí v optice. Zde si všimněme známého jevu brázdění, vznikajícího na vodní hladině za jedoucí lodí (viz obr. 11.6). Oba přímé okraje brázdy jsou zjevně obálkou kruhových vlnoploch, jejichž poloměry rostou úměrně s časem, a tedy i se vzdáleností od rovnoměrně plující lodí. Mezi úhlem ( $\alpha$ ) brázdy, rychlostí vlnění ( $c$ ) a rychlostí lodí ( $v$ ) platí vztah

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}. \quad 11(9.1)$$

## 11.10 Odraz a lom vlnění

Vlnění dopadající na rozhraní dvou prostředí se na tomto rozhraní částečně odráží a částečně proniká (láme se) do druhého prostředí. Čtenář zajisté zná ze střední školy některý z intuitivních „obrázkových“ způsobů odvození zákona odrazu a lomu, proto zde použijeme jiný způsob odvození.

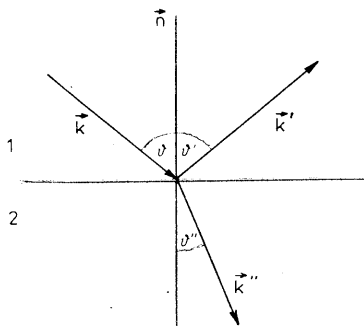
Nechť rovinná monochromatická vlna

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] \quad 11(10.1)$$

dopadá z prostředí 1 na rovinné rozhraní (viz obr. 11.7) s prostředím 2. Odraženou vlnu  $\mathbf{u}'$  a lomenou  $\mathbf{u}''$  zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_0 \exp [i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega't)], \quad 11(10.2)$$

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u}''_0 \exp [i(\mathbf{k}''\mathbf{r} - \omega''t)]. \quad 11(10.3)$$



Obr. 11.7 Odraz a lom vlnění

Ze vztahu

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u}' + \mathbf{u}, \quad 11(10.4)$$

který musí platit *ve všech časech a ve všech bodech rozhraní*, plyne rovnost *fázových faktorů* na obou stranách této rovnice. Platí tedy

$$\omega'' = \omega' = \omega, \quad 11(10.5)$$

$$\mathbf{k}''\mathbf{r} = \mathbf{k}'\mathbf{r} = \mathbf{k}\mathbf{r}. \quad 11(10.6)$$

Vztahy 11(10.5) vyjadřují, že frekvence odražené a lomené vlny jsou rovny frekvenci vlny dopadající; *odraz a lom vln probíhají beze změny frekvence*.

Z rovnosti skalárních součinů 11(10.6) plyne, že vlnové vektory dopadající vlny ( $\mathbf{k}$ ), odražené ( $\mathbf{k}'$ ) a lomené ( $\mathbf{k}''$ ) *leží ve stejné rovině* (jsou komplanární). Rovinu vytvořenou vektorem  $\mathbf{k}$  dopadající vlny a normálovým vektorem  $\mathbf{n}$  rozhraní, nazýváme *rovinou dopadu*. Vektory  $\mathbf{k}$  a  $\mathbf{k}'$  tedy leží v rovině dopadu.

Poněvadž vlna se odráží do prostředí 1, z něhož také dopadá, je rychlost odražené vlny rovna rychlosti vlny dopadající  $c'_1 = c_1$ . S ohledem na 11(10.5) odtud plyne rovnost absolutních hodnot vlnového vektoru  $k' = \omega'/c'_1$  a  $k = \omega/c_1$ , tj.

$$k' = k = \frac{\omega}{c_1}. \quad 11(10.7)$$

Pro lomenou vlnu je  $k'' = (\omega''/c_2) = (\omega/c_2) = (\omega/c_1) (c_1/c_2)$ , tj.

$$\frac{k''}{k} = \frac{c_1}{c_2} \equiv N_{12}, \quad 11(10.8)$$

kde  $c_2$  je fázová rychlost vlnění v prostředí 2. Podíl fázových rychlostí dopadající a lomené vlny se nazývá *relativním indexem* lomu ( $N_{12}$ ) prostředí 1 a 2.

Zvolíme-li za rovinu rozhraní rovinu  $z = 0$ , pak podmínky 11(10.6) budou mít tvar

$$xk_x + yk_y = xk'_x + yk'_y = xk''_x + yk''_y. \quad 11(10.9)$$

Poněvadž tyto podmínky musí platit v libovolném bodě  $(x, y)$  rozhraní, musí být rovný koeficienty u stejných proměnných, tj.

$$k'_x = k''_x = k_x, \quad k'_y = k''_y = k_y. \quad 11(10.9')$$

Označíme-li  $\vartheta$  úhel mezi  $\mathbf{k}$  a normálou  $\mathbf{n}$  rozhraní (úhel dopadu) a  $\vartheta'$  úhel mezi  $\mathbf{k}'$  a normálou  $\mathbf{n}$  rozhraní (úhel odrazu), pak z podmínky  $k'_x = k_x$  plyne  $k' \sin \vartheta' = k \sin \vartheta$ . S ohledem na 11(10.7) získáme hledaný vztah

$$\vartheta' = \vartheta. \quad 11(10.10)$$

*Odražená vlna leží v rovině dopadu, přičemž úhel odrazu je roven úhlu dopadu.*

Označíme-li  $\vartheta''$  úhel mezi  $\mathbf{k}''$  a normálou  $\mathbf{n}$  rozhraní (úhel lomu), pak ze vztahu  $k''_x = k_x$  plyne  $k'' \sin \vartheta'' = k \sin \vartheta$ . Kombinací tohoto vztahu s 11(10.8) dostaneme známý *Snellův zákon lomu* (W. SNELL, 1621)

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{c_1}{c_2} \equiv N_{12}. \quad 11(10.11)$$

*Podíl sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu je roven poměru fázových rychlostí vlnění v obou prostředích, tj. indexu lomu. Pro každou dvojici prostředí má tento poměr hodnotu nezávislou na úhlu dopadu.*

Při vstupu z prostředí s větší fázovou rychlostí do prostředí s menší fázovou rychlostí ( $c_1 > c_2$ ) se vlna lomí ke kolmici, v opačném případě ( $c_1 < c_2$ ) od kolmice. Maximálnímu úhlu lomu  $\vartheta'' = \pi/2$  odpovídá mezní úhel takový, že

$$\sin \delta = \frac{c_1}{c_2} < 1. \quad 11(10.12)$$

Je to maximální úhel dopadu, při němž kromě odrazu nastává také lom. Pro všechny úhly dopadu  $\vartheta > \delta$  nastává *úplný odraz* neboli *totální reflexe*.

Z pohybových rovnice (dynamiky daného vlnění) lze odvodit vztahy mezi amplitudami dopadající, odražené a lomené vlny. Z kvadrátů příslušných ampli-

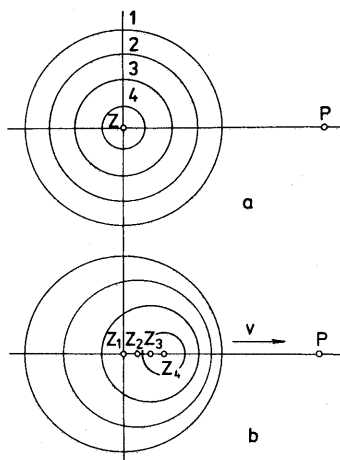
tud se pak získají vztahy mezi *intenzitami* dopadající, odražené a lomené vlny. S konkrétním výpočtem těchto vztahů (tzv. Fresnelových vzorců) se čtenář seznámí v optice a v teorii elektromagnetického pole\*).

## 11.11 Dopplerův jev

Z běžné zkušenosti víme, že výška (frekvence) přijímaného tónu závisí na relativní rychlosti zdroje a pozorovatele. S podobnou situací se setkáváme i u jiných druhů vln, zejména světelných. Tento jev objevil a prozkoumal Ch. DOPPLER (1842), proto se nazývá *Dopplerovým jevem*.

Při výkladu budeme předpokládat, že prostředí, jímž se vlnění šíří je (vzhledem k dané referenční soustavě) v klidu. Jsou-li zdroj i pozorovatel v klidu, pak vlnoplochy jsou koncentrické koule. Na obr. 11.8 a je řez těmito vlnoplochami (po periodách  $T$ ) znázorněn koncentrickými kružnicemi. Pohybuje-li se zdroj konstantní rychlostí  $V$  (viz obr. 11.8b) vůči pozorovateli, pak vyslal vlnoplochu 1 z místa  $Z_1$ , vlnoplochu 2 z místa  $Z_2$  vzdáleného od  $Z_1$  o  $VT$  atd. Směrem k pozorovateli  $P$  jsou sousední vlnoplochy blíže u sebe o vzdálenost  $VT$ . Vlnová délka je tak o  $\Delta\lambda = VT$  kratší, než kdyby byl zdroj v klidu. Fáze vlny se při tom šíří stejnou rychlostí  $c$ , takže pozorovatel  $P$  přijímá vlnění s frekvencí

$$v' = \frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda - VT}.$$



Obr. 11.8 Vznik Dopplerova jevu

\*) Viz např. KVASNICA J., Teorie elektromagnetického pole, Academia Praha 1985.



Zavedeme-li vlnovou délku  $\lambda = cT$ , dostaneme  $\nu' = c/(cT - VT)$ . Poně-  
vadž  $\nu = 1/T$  je (lineární) frekvence kmitů klidového zdroje, bude vztah mezi  
oběma frekvencemi

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - V/c} . \quad 11(11.1)$$

Zde jsme přešli od lineární frekvence  $\nu$  k úhlové frekvenci  $\omega = 2\pi\nu$ . Kdyby  
se zdroj vzdaloval od pozorovatele stejnou rychlostí  $V$ , pak v 11(11.1) nutno  
změnit znaménko rychlosti.

Vzorec 11(11.1) se vztahuje na případ, kdy zdroj se pohybuje k pozorovateli  
rychlostí  $V$  ve směru pozorování. Svírá-li rychlost  $V$  zdroje se směrem pozorování  
úhel  $\Theta$ , pak v 11(11.1) nutno nahradit  $V$  odpovídajícím průmětem  $V \cos \Theta$ , tj.

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{V}{c} \cos \Theta} . \quad 11(11.2)$$

Při přibližování zdroje k pozorovateli ( $0 \leq \Theta < \pi/2$ ) je  $\omega' > \omega$ , při  
vzdalování od pozorovatele ( $\pi/2 < \Theta \leq \pi$ ) je  $\omega' < \omega$ . Při kolmém pohybu  
( $\Theta = \pi/2$ ) ke změně frekvence nedochází\*).

Obdobně budeme postupovat v případě, kdy se pozorovatel  $P$  pohybuje ve  
směru šíření vln od zdroje rychlostí  $v$ . Prostředí i zdroj jsou v klidu, takže daným  
pevným bodem projde za jednu sekundu  $\nu = c/\lambda$  vln. Vzhledem k pohybující-  
mu se pozorovateli mají vlny relativní rychlost  $c - v$  (Galileův adiční teorém  
rychlostí), takže pozorovatel bude přijímat frekvenci  $\nu'' = (c - v)/\lambda =$   
 $= (c - v) \nu/c$ . Mezi kruhovými frekvencemi pak platí vztah

$$\omega'' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \omega . \quad 11(11.3)$$

Svírá-li rychlost  $\mathbf{v}$  pozorovatele  $P$  s vlnovým vektorem  $\mathbf{k}$  (směrem šíření vlny)  
úhel  $\vartheta$ , pak místo 11(11.3) máme

$$\omega'' = \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) \omega . \quad 11(11.4)$$

Dnes se Dopplerova jevu široce využívá zejména kosmonautice. Do rakety se  
umístí rádiový zdroj se stabilizovanou frekvencí  $\omega$ . Vlivem pohybu tohoto

\*) To platí pouze v nerelativistické fyzice. V teorii relativity se ukazuje, že existuje také tzv. příčný  
Dopplerův jev, jenž se však uplatní až při rychlostech zdroje srovnatelných s rychlostí světla ve  
vakuu.

zdroje se na Zemi přijímá signál s frekvencí  $\omega'$ . Ze známých hodnot  $\omega, \omega'$  se pak určí rychlost zdroje. Při vysílání signálu ze Země ke kosmické sondě je nutno rovněž respektovat Dopplerův posuv při příjmu signálu na pohybující se sondě.

## 11.12 Podélné vlnění v pružné tenké tyči

Budeme se zabývat šířením rozruchu při deformaci pružné tenké tyče. Osu tyče zvolíme ve směru osy  $x$ . Podélnou výchylku (deformaci) daného bodu  $x$  v čase  $t$  označíme  $u(x,t)$ . Příslušné poměrné prodloužení (relativní deformace) v daném čase  $t$  je  $\varepsilon = \Delta u / \Delta x$ , což v limitě dá

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} . \quad 11(12.1)$$

Podle Hookova zákona (viz článek 9.1) je relativní deformaci úměrná elastická síla  $F$ . Na element délky  $dx$  tyče působí v podélném směru síla  $dF$  úměrná přírůstku  $\varepsilon$  mezi  $x$  a  $x + dx$ , tj.

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx .$$

Je-li  $q$  příčný průřez tyče a  $E$  její modul pružnosti v tahu nebo tlaku, pak podle Hookova zákona je

$$F = qE\varepsilon , \quad dF = qE d\varepsilon = qE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx .$$

Objemový element  $dV = q dx$  tyče má hmotnost  $dm = \rho q dx$ , kde  $\rho$  je hustota tyče. Elementární síla  $dF$  udělí tomuto elementu zrychlení  $a = \partial^2 u / \partial t^2$ , tj.  $dF = a dm = (\partial^2 u / \partial t^2) \rho q dx$ . Srovnáním obou výrazů pro elementární sílu  $dF$  dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \quad 11(12.2)$$

To je vlnová rovnice 11(2.3), v níž je fázová rychlost vlnění

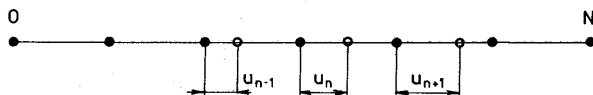
$$c = \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/2} . \quad 11(12.3)$$

Tato rychlost je tím větší, čím větší je modul pružnosti tyče a čím menší je její hustota.

V obecném případě trojrozměrného elastického kontinua nevystačíme s předešlou elementární formulací Hookova zákona; v takovém případě je nutno použít obecných pohybových rovnic kontinua (viz článek 8.5). V izotropním elastickém prostředí existují vlny podélné i příčné; jednoduchý důkaz správnosti tohoto tvrzení uvádíme v řešených úlohách.

### 11.13 Kmity lineárního řetězce

Mikroskopickou obdobou tenké elastické tyče je lineární řetězec atomů. Bude-  
me předpokládat, že všechny atomy jsou stejné a že rovnovážné polohy souse-  
dních atomů se liší o stejnou vzdálenost  $a$ . Tím máme jednorozměrnou analogii  
krystalu. Vlivem elastických sil (Hookův zákon) jednotlivé atomy konají har-



Obr. 11.9 Kmity lineárního řetězce stejných atomů

monické oscilace kolem svých rovnovážných poloh. Budeme předpokládat, že  
na  $n$ -tý atom působí elastickými silami pouze sousední atomy s „pořadovými“  
číslly  $n - 1$  a  $n + 1$ . Označíme-li výchylku  $k$ -tého atomu z rovnovážné  
polohy symbolem  $u_k$ , pak síla  $F_n$  působící na  $n$ -tý atom je (viz obr. 11.9)

$$F_n = -C [(u_n - u_{n-1}) + (u_n - u_{n+1})] = -C(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}),$$

kde  $C > 0$  je kladná konstanta úměrnosti. Pohybový zákon pro  $n$ -tý atom je

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -C(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}). \quad 11(13.1)$$

Rovinná vlna obsahuje závislost  $\exp [i(kx - \omega t)]$ , proto řešení soustavy  
rovnic budeme hledat ve tvaru (nahradíme  $x = na$ )

$$u_n = u_0 \exp [i(nka - \omega t)]. \quad 11(13.2)$$

Výchylky  $u_{n\pm 1}$  se získají odpovídající záměnou  $n \rightarrow n \pm 1$ . Vztah mezi  
frekvencí  $\omega$  a vlnočtem  $k$  dostaneme tak, že 11(13.2) dosadíme do 11(13.1). Po  
elementárních úpravách dostaneme

$$m\omega^2 = C(2 - e^{ika} - e^{-ika}) = 4C \sin^2 \left( \frac{ka}{2} \right).$$

Při úpravě jsme užili  $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ ,  $1 - \cos x = 2 \sin^2 (x/2)$ .

Získali jsme tak disperzní zákon  $\omega \equiv \omega(k)$  ve tvaru

$$\omega = 2\left(\frac{C}{m}\right)^{1/2} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|. \quad 11(13.3)$$

Pro malé hodnoty vlnočtu  $ka \ll 1$  (tj. dlouhé vlny  $\lambda \gg a$ ) lze položit  $\sin(ka/2) \cong ka/2$ , takže je

$$\omega = c_0 k, \quad (ka \ll 1), \quad 11(13.4)$$

kde fázová rychlost

$$c_0 = \left(\frac{C}{m}\right)^{1/2} a. \quad 11(13.5)$$

Tím je konstanta úměrnosti  $C$  svázána s fázovou rychlostí  $c_0$ . Indexem nula vyznačujeme, že se jedná o rychlost při  $k \rightarrow 0$ .

Grupovou rychlost  $w = d\omega/dk$  získáme přímým výpočtem z disperzního zákona 11(13.3).

Vztah 11(13.3) sice určuje závislost  $\omega \equiv \omega(k)$ , avšak neříká nic o možných hodnotách vlnočtu  $k$  (vlnových délkách  $\lambda = 2\pi/k$ ). Tato množina možných hodnot (tzv. spektrum) závisí na tzv. hraničních podmínkách, tj. na tom, co předpokládáme o koncích řetězce. Zpravidla se volí tzv. *cyklické* neboli *Bornovy-Kármánovy podmínky*

$$u_{n+N} = u_n. \quad 11(13.6)$$

Tomu by odpovídala buď řada řetězců s  $N$  atomy anebo řetězec svinutý do tvaru kruhového prstence. Použijeme-li vyjádření 11(13.2), pak z 11(13.6) plyne  $\exp(iNka) = 1$ . Jelikož  $\exp(ix) = 1$  při  $x = 2\pi p$ , bude  $Nka = 2\pi p$ , kde s ohledem na to, že  $k \geq 0$ , je

$$k \equiv k_p = \frac{2\pi}{Na} p, \quad 11(13.7)$$

kde  $p = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  je voleno tak, aby respektovalo  $N$  stupňů volnosti dané soustavy. Po dosažení 11(13.7) do 11(13.3) dostaneme spektrum frekvencí

$$\omega \equiv \omega_p = 2\left(\frac{C}{m}\right)^{1/2} \sin \frac{p\pi}{N}. \quad 11(13.8)$$

## 11.14 Vlny v tekutinách

Budeme se zabývat malým rozruchem (změnou stavu) v *ideální* tekutině. Ukážeme, že z dynamiky tohoto rozruchu (tj. z pohybových rovnic) plyne pro šíření tohoto rozruchu vlnová rovnice.

Hustota  $\varrho \equiv \varrho(\mathbf{r}, t)$ , tlak  $p \equiv p(\mathbf{r}, t)$  a rychlost  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  ideální tekutiny jsou svázány (viz článek 10.3) rovnicí kontinuity (zákonem zachování množství tekutiny) a Eulerovou pohybovou rovnicí

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho v_j) = 0, \quad \varrho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad 11(14.1)$$

Místo souřadnic  $x, y, z$  zde užíváme značení  $x_1, x_2, x_3$  a obvyklé Einsteinovy sumační konvence (viz dodatek D.2).

Soustava 11(14.1) představuje *čtyři* rovnice pro *pět* veličin  $\varrho, p, v_1, v_2, v_3$ , proto je nutno ji doplnit termodynamickou rovnicí *adiabaty*

$$p \equiv p(\varrho), \quad 11(14.2)$$

poněvadž při proudění ideální tekutiny nedochází (podle definice) ke vzniku tepla. U plynů lze užít známé Poissonovy adiabaty  $pV^\kappa = \text{konst}$ , resp.  $p = \text{konst} \cdot \varrho^\kappa$ , kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta. Zde však nebudeme tvar adiabaty specifikovat.

Soustava rovnic 11(14.1) má řešení s *konstantními* hodnotami všech veličin

$$\varrho = \varrho_0 = \text{konst}, \quad p = p_0 = \text{konst}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \text{konst}.$$

Bez újmy na obecnosti lze zvolit  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ , tj. takovou referenční soustavu, vůči níž je tekutina v klidu.

Budeme zkoumat stav, kdy v tekutině vzniknou *malé odchylky* (tzv. poruchy) od těchto ustálených (konstantních) hodnot, tj.

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho', \quad p = p_0 + p', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' = \mathbf{v}'. \quad 11(14.3)$$

Veličiny  $\Delta \varrho = \varrho'$ ,  $\Delta p = p'$ ,  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}'$  jsou podle předpokladu malé veličiny prvního řádu. Při dosazení do 11(14.1) a 11(14.2) zachováme opět pouze veličiny prvního řádu, tj.

$$\begin{aligned} \varrho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= (\varrho_0 + \varrho') \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \cong \varrho_0 \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right), \\ \varrho v_j \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= (\varrho_0 + \varrho') \left( v'_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \cong 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p'}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Z rovnice adiabaty 11(14.2) získáme obdobně  $\Delta p \cong (\partial p / \partial \varrho) \Delta \varrho$ , tj.

$$p' = c^2 \varrho', \quad 11(14.4)$$

kde

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \varrho}. \quad 11(14.5)$$

Soustava 11(14.1) a 11(14.2) se tak zredukuje na tvar

$$\varrho_0 \left( \frac{\partial v_i'}{\partial t} \right) = -c^2 \left( \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \left( \frac{\partial v_i'}{\partial x_i} \right) = 0. \quad 11(14.6)$$

Je to soustava čtyř *lineárních* rovnic pro poruchy  $\varrho'$ ,  $v_i'$ ; porucha  $p'$  je určena rovnicí 11(14.3). Jednoduchou úpravou převedeme 11(14.6) na vlnové rovnice pro poruchy  $\varrho'$ ,  $v_i'$ . Druhou rovnicí zderivujeme podle  $t$ , což dá

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} = -\varrho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_i'}{\partial t} \right).$$

Z první rovnice dosadíme  $\varrho_0 (\partial v_i' / \partial t) = -c^2 (\partial \varrho' / \partial x_i)$ , čímž dostaneme

$$\nabla^2 \varrho' - c^{-2} \left( \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} \right) = 0, \quad 11(14.7)$$

kde  $\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x_i \partial x_i$  je Laplaceův operátor. S ohledem na 11(14.4) platí stejná rovnice i pro poruchu  $p' = c^2 \varrho'$ . Obdobně dostaneme

$$\nabla^2 v_i - c^{-2} \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \right) = 0. \quad 11(14.8)$$

Dospěli jsme tak k závěru, že (malý) *rozruch v tekutině se šíří ve formě vlnění* (zvukových vln), přičemž  $c = (\partial p / \partial \varrho)^{1/2}$  je fázová rychlost šíření těchto vln.

Je neobyčejně důležité, že dochází k (lokální) změně hustoty  $\varrho' \neq 0$ , tj. že tekutina je (byť málo) *stlačitelná*. V dokonale nestlačitelné tekutině ( $\varrho' \equiv 0$ ) by se soustava 11(14.6) zredukovala na  $(\partial v_i / \partial t) = 0$ ,  $(\partial v_i' / \partial x_i) = 0$ . Podle první z těchto rovnic by  $v_i'$  nezáviselo na čase, takže v nestlačitelné tekutině by k vlnění nedošlo.

Řešení rovnic 11(14.7) a 11(14.8) budeme hledat ve tvaru rovinných monochromatických vln

$$\varrho' = \varrho'_0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad v_i' = v'_{0i} \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad 11(14.9)$$

kde  $\varrho'_0$ ,  $v'_{0i}$  jsou amplitudy vln. Rovnice 11(14.7) a 11(14.8) jsou sice samostatné

vlnové rovnice pro  $q'$ ,  $v'_i$ , avšak získali jsme je z rovnic 11(14.6). Vztah (vazbu) mezi  $q'$ ,  $v'_i$  dostaneme dosazením 11(14.9) do 11(14.6). Při tom užitíme

$$\frac{\partial q'}{\partial x_i} = i k_i q', \quad \frac{\partial v'_i}{\partial t} = -i \omega v'_i.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme  $q_0 \omega v'_i = c^2 k_i q'$ , tj.

$$q_0 \omega \mathbf{v}' = c^2 q' \mathbf{k}. \quad 11(14.10)$$

Porucha  $\mathbf{v}'$  je tedy paralelní anebo antiparalelní (v závislosti na znaménku  $q'$ ) s vlnovým vektorem  $\mathbf{k}$ , takže se jedná o vlnění *podélné*. Při tom je opět  $k = \omega/c$ , což plyne po dosazení 11(14.9) do vlnové rovnice.

Položíme-li v 11(14.10)  $k = \omega/c$ , pak dostaneme

$$\frac{v'}{c} = \frac{|q'|}{q_0}. \quad 11(14.11)$$

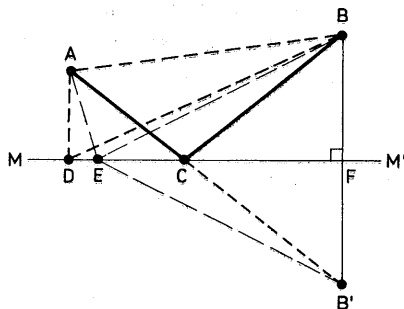
Podle předpokladu je  $|q'| \ll q_0$ , takže musí také být

$$v' \ll c. \quad 11(14.12)$$

Tím jsme potvrdili známý poznatek, že tekutinu (tedy i plyn) lze pokládat za nestlačitelnou, když rychlost jejího proudění je malá ve srovnání s rychlostí zvuku v této tekutině.

## 11.15 Fermatův princip

Už v prvním století n. l. dospěl Hérón Alexandrijský k závěru, že odraz světla od zrcadla probíhá tak, že vzdálenost, kterou při tom světlo urazí od zdroje  $A$  k zrcadlu a pak od zrcadla k pozorovanému bodu  $B$ , je nejkratší možnou.



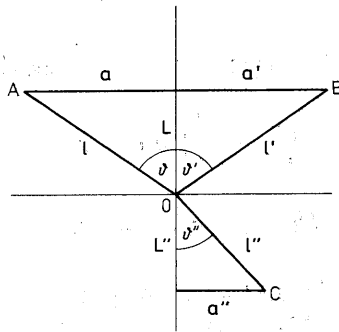
Obr. 11.10

Při přechodu světla do různých prostředí je nutno uvážit různou rychlost šíření světla v těchto prostředích. E. FERMAT (1650) objevil princip, podle něhož světlo překoná vzdálenost za nejkratší možný čas. Později se ukázalo, že tento Fermatův závěr platí pro všechny druhy vlnění, proto jej vyslovíme takto.

*Vlnění se šíří vždy tak, že ze všech možných drah mezi dvěma body A, B se realizuje právě ta, již lze urazit za nejkratší možný čas.*

Snadno se dá dokázat, že z tohoto principu plyne zákon odrazu 11(10.10) i Snellův zákon lomu 11(10.11).

Začneme jednoduchým „obrázkovým“ důkazem zákona odrazu. Na obr. 11.10 jsou znázorněny body A, B, rovina rozhraní (zrcadlo) MM' a tři různé dráhy ADB, AEB, ACB. První úsek AD je nejkratší, avšak druhý úsek DB je nejdelší. U druhého způsobu je úsek AE poněkud delší, avšak druhý úsek EB je značně kratší. Potřebujeme najít takový bod C, že vlnění urazí vzdálenost ACD za nejkratší čas. Jelikož nad rozhraním je všude stejné prostředí, v němž se vlnění šíří stejnou rychlostí  $c \equiv c_1$ , pak to značí najít nejkratší vzdálenost ACB. Tuto vzdálenost určíme tak, že sestrojíme takový zrcadlový bod B', že vzdálenosti BF a FB' jsou stejné ( $BF = FB'$ ). Odtud plyne, že je také  $AEB = AEB'$ ,  $ACB = ACB'$ . Vzdálenost  $ACB = ACB'$  bude však nejkratší tehdy, když  $ACB'$  je přímkou. Odtud plyne, že úhly ACM, B'CM' a BCM' jsou stejné. To vyjadřuje rovnost úhlů dopadu a odrazu, měřených od rozhraní; totéž pochopitelně platí i pro úhly měřené od kolmice.



Obr. 11.11

Snellův zákon lomu se odvodí obdobně. Při tom je nutno uvážit, že čas  $\Delta t$  je přímo úměrný úseku  $\Delta l$  a nepřímo úměrný rychlosti šíření  $c$  na tomto úseku.

Matematická formulace Fermatova principu je tato. Vlnění urazí vzdálenost mezi dvěma body A, B za nejkratší čas, což vede k rovnici

$$\int_A^B dt = \int_A^B \frac{dl}{c} = \text{Min}, \quad 11(15.1)$$



kde  $dl = c dt$  je element dráhy za čas  $dt$ . Je-li dána závislost rychlosti šíření  $c \equiv c(l)$ , pak z 11(15.1) lze odvodit rovnice pro dráhu  $l$ . Odvození těchto obecných rovnic však přesahuje rámec této učebnice, proto se omezíme na dva speciální případy, a sice odraz a lom na rovinném rozhraní (viz obr. 11.11).

Při odrazu je rychlost šíření na úsecích  $AO$  a  $OB$  stejná  $c = c' \equiv c_1$ . Bez újmy na obecnosti zvolíme bod  $B$  tak, aby kolmé vzdálenosti bodů  $A$  a  $B$  od roviny rozhraní byly stejné. Formálně toho můžeme dosáhnout vhodným natočením roviny rozhraní. Čtenář snadno nahlédne, že tato speciální volba nemá vliv na obecnou platnost získaného výsledku.

Rozepsáním integrálu 11(15.1) pro úsek  $AOB$  dostaneme  $(l/c) + (l'/c') = \text{Min}$ , tj.

$$dl + dl' = 0. \quad 11(15.2)$$

Vzdálenost  $AB$  je dána, a tudíž  $a + a' = \text{konst}$ , resp.

$$da + da' = 0. \quad 11(15.3)$$

Z pravoúhlých trojúhelníků na obr. 11.11 plyne  $l^2 = L^2 + a^2$ ,  $l'^2 = L^2 + a'^2$ , odkud diferencováním ( $L = \text{konst}$ ) máme  $2l dl = 2a da$ ,  $2l' dl' = 2a' da'$ , tj.

$$dl = \frac{a}{l} da, \quad dl' = -\frac{a'}{l'} da. \quad 11(15.4)$$

Při poslední úpravě jsme užili 11(15.3). Po dosazení 11(15.4) do 11(15.2) máme

$$\left(\frac{a}{l} - \frac{a'}{l'}\right) da = 0.$$

Musí tedy být  $(a/l) = (a'/l')$ , tj.  $\sin \vartheta' = \sin \vartheta$ ,  $\vartheta' = \vartheta$ , což je rovnice 11(10.10).

Odvození zákona lomu je obdobné. Integrál 11(15.1) rozepsaný pro úsek  $AOC$  dá  $(l/c_1) + (l''/c_2) = \text{Min}$ , tj.

$$\frac{dl}{c_1} + \frac{dl''}{c_2} = 0. \quad 11(15.5)$$

Ze vztahu  $(l'')^2 = (L'')^2 + (a'')^2$  plyne  $dl'' = (a''/l'') da''$ . Jelikož  $a + a'' = \text{konst}$ ,  $da = -da''$ , je  $dl'' = -(a''/l'') da$ . Po dosazení do 11(15.5) pak máme

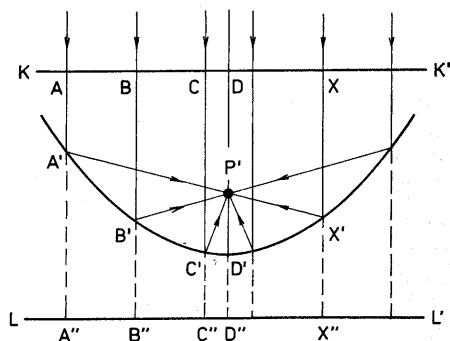
$$\left(\frac{a}{lc_1} - \frac{a''}{l''c_2}\right) da = 0.$$

Odtud plyne

$$\frac{(a/l)}{(a''/l'')} = \frac{c_1}{c_2},$$

resp.  $(\sin \vartheta / \sin \vartheta'') = (c_1/c_2)$ , což je Snellův zákon 11(10.11).

Z mnoha dalších aplikací Fermatova principu uvedeme alespoň klasický příklad tzv. *parabolického zrcadla*. Rovnoběžný svazek paprsků (budeme mluvit o světle) dopadá na zakřivenou zrcadlovou plochu. Máme zjistit, jaký má být



Obr. 11.12 Princip parabolického zrcadla

tvar této plochy, aby všechno světlo odražené od této plochy se soustředilo do jediného bodu  $P'$  (viz obr. 11.12). Vezmeme myšlenou rovinu  $KK'$  kolmou na svazek rovnoběžných paprsků. Na této rovině (vlnoploše) budou časy všech paprsků stejné. Všechny paprsky, které budou pokračovat za touto rovinou směrem na zrcadlo a po odrazu pokračovat do  $P'$ , urazí tuto dráhu za stejný čas. Naším úkolem je tedy najít takovou křivku, pro níž je součet vzdáleností  $XX' + X'P'$  (a tedy i příslušných časů) stejný pro každou výchozí polohu  $X$ . Za tím účelem prodloužíme úsečku  $XX'$  do roviny  $LL'$  a sestrojíme takovou křivku, pro níž  $A'A'' = A'P'$ ,  $B'B'' = B'P'$  atd. Úseky  $AA' + A'P' = AA' + A'A''$ ,  $BB' + B'P' = BB' + B'B''$ , ... (a jim odpovídající časy) budou rovněž stejné. Hledaná křivka je tedy množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu a od dané přímky, a je tudíž *parabolou*. Rotací této křivky kolem její osy dostaneme plochu zvanou *rotační paraboloid*, což je hledaný tvar zrcadla.

## 11.16 Intenzita vlnění

S vlnovým pohybem je spojen přenos energie od místa k místu. Tento *energetický výkon* vlnění charakterizujeme dvěma veličinami. *Proudová hustota energie* ( $j$ ) představuje energii dopadající na jednotkovou plochu (kolmou ke směru šíření)

za jednotku času. Integrací proudové hustoty přes celý uzavřený povrch dostaneme celkový tok energie touto plochou – *intenzitu vlnění* neboli vlnový výkon.

Je-li  $W$  energie,  $V$  objem, pak

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} \quad 11(16.1)$$

je objemová hustota energie. Máme-li trubici (třeba i myšlenou) příčného průřezu  $\Delta q$ , pak

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta q \cdot \Delta t} \quad 11(16.2)$$

je proudová hustota energie (měrný plošný výkon). Při posunu vlnění ve směru osy  $x$  (osy trubice) o  $\Delta x$  bude

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta q \cdot \Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta q \cdot \Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = w \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

jelikož  $\Delta V = \Delta q \cdot \Delta x$  je objemový element. Veličina  $\Delta x/\Delta t$  určuje rychlost přenosu energie. Pro monochromatickou vlnu je to rychlost  $c$ , takže je

$$j = cw. \quad 11(16.3)$$

Zdůrazněme ještě jednou, že tento jednoduchý vztah platí pouze pro *monochromatickou vlnu*, popř. pro vlnový svazek v prostředí bez disperze.

Intenzita vlnění je pak dána vztahem

$$I = \int j \, dS, \quad 11(16.4)$$

kde  $dS$  je plošný element (kolmý na směr šíření).

Obvykle vyšetřujeme přenos energie za jistou dobu  $\tau$  dlouhou ve srovnání s periodami  $T$  kmitů vlny. V takovém případě zavádíme střední veličiny

$$\langle w \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau w \, dt, \quad \langle j \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau j \, dt. \quad 11(16.5)$$

Konkrétní výpočet veličin  $w, j, I$  vyžaduje *dynamiku*, a spadá tak do odpovídajících partií hydrodynamiky, teorie elektromagnetického pole apod. Zde uvedeme pouze *nástin* metodického postupu pro elastické vlny.

Lineární harmonický oscilátor  $x = A \cos \omega t$  má rychlost  $v = -\omega A \sin \omega t$ , což dá pro jeho energii konstantní hodnotu

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

Kmitá-li spojité prostředí hustoty  $\rho$  se stejnou frekvencí  $\omega$ , hustotu energie  $w$  dostaneme záměnou hmotnosti  $m$  hmotností objemové jednotky (hustotou  $\rho$ ), tj.

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad 11(16.6)$$

Pomocí vztahu 11(16.3) dostaneme  $\langle j \rangle = c \langle w \rangle$ .

V reálném prostředí však výchylky  $u$  závisí nejen na čase, ale také na poloze, takže hustota energie  $w$  závisí také na souřadnicích. Budeme uvažovat tenkou elastickou tyč (srovnej článek 11.12). Nechť výchylka  $u \equiv u(x, t)$  závisí na  $x$ ,  $t$  harmonicky

$$u = A \cos (kx - \omega t).$$

Rychlost  $v = (\partial u / \partial t) = -A \omega \sin (kx - \omega t)$ . Pro hustotu  $w_k$  kinetické energie dostaneme

$$w_k = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2 (kx - \omega t). \quad 11(16.7)$$

Hustotu  $w_p$  potenciální energie vypočteme jako práci potřebnou k deformaci objemové jednotky tyče. (Budeme předpokládat, že průřez tyče se při tom nemění.) Na plošnou jednotku působí síla  $E \varepsilon$ , kde  $E$  je modul pružnosti a  $\varepsilon$  relativní prodloužení. Při změně  $\varepsilon$  o  $d\varepsilon$  se v objemové jednotce vykoná elementární práce  $E \varepsilon d\varepsilon$ , odkud integrací plyne pro hustotu potenciální energie

$$w_p = \frac{1}{2} E \varepsilon^2.$$

Z článku 11.12 víme, že relativní prodloužení tenké tyče lze vyjádřit jako  $\varepsilon = (\partial u / \partial x)$ , což dá  $\varepsilon = -kA \sin (kx - \omega t)$ . Je tedy ( $k = \omega/c$ )

$$w_p = \frac{1}{2} E k^2 A^2 \sin^2 (kx - \omega t) = \frac{E \omega^2 A^2}{2c^2} \sin^2 (kx - \omega t).$$

Podle 11(12.3) je  $E = c^2 \rho$ , takže máme

$$w_p = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \sin^2 (kx - \omega t). \quad 11(16.8)$$

Hustoty kinetické a potenciální energie jsou stejné. Pro hustotu  $w$  celkové energie máme vztah

$$w = w_k + w_p = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad 11(16.9)$$

Funkce vyjadřující hustotu energie  $w$  má stejný argument  $(kx - \omega t)$  jako sama výchylka, takže v daném případě se energie šíří prostředím rychlostí  $c = \omega/k$  rovnou fázové rychlosti vlnění. Tento výsledek však platí pouze pro monochromatickou vlnu, jak je zřejmé ze způsobu odvození.

V případě vlnového balíku (viz článek 11.8) vzniklého superpozicí rovinných monochromatických vln je výpočet mnohem složitější; konzistentní výpočet je fakticky možný pouze v rámci mikroskopické teorie.

Pokud se budeme zabývat pouze střední hustotou  $\langle w \rangle$ , pak lze nahradit  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ , jelikož

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Je tedy

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2,$$

což je shodný výraz jako 11(16.6). V případě vlnového balíku lze místo posledního výrazu vzít

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega_0^2 A^2(x, t),$$

kde (viz 11(8.18))

$$A(x, t) = 2a(k_0) \frac{\sin [(x - \omega t) \Delta k]}{x - \omega t}$$

je amplituda vlnového balíku.

*Energie vlnového balíku se přemísťuje stejnou rychlostí jako místa stejné amplitudy, tj. grupovou rychlostí.*

## Řešené úlohy

1. Odvoďte vztah 11(4.3).

Řešení. Nechť  $u \equiv u(r, t)$ . Ze vztahů  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  derivací dostaneme  $2r(\partial r/\partial x) = 2x$ , tj.

$$\left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{x}{r} \quad (1)$$

a obdobné vztahy pro  $(\partial r/\partial y)$ ,  $(\partial r/\partial z)$ . Podle pravidel o derivování složené funkce platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Opětnou derivací vzniklého součinu dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + x \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Vzniklý výraz upravíme pomocí vztahů

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{x}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

čímž dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

Sečtením s obdobnými vztahy pro  $(\partial^2 u/\partial y^2)$ ,  $(\partial^2 u/\partial z^2)$  dostaneme 11(4.3).

2. Proveďte odvození vztahů 11(5.10) a 11(5.11).

Řešení. Pomocí součtového vzorce  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  dostaneme

$$\begin{aligned} u &= A_1 \cos(kx - \omega t + \varepsilon_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \varepsilon_2) = \\ &= (A_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 \cos \varepsilon_2) \cos(kx - \omega t) - (A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2) \\ &\sin(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Položíme

$$A_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 \cos \varepsilon_2 = A \cos \varepsilon, \quad A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2 = A \sin \varepsilon.$$

Vydělením obou vztahů dostaneme 11(5.10), povýšením na druhou a sečtením vzniklých rovnic dospějeme k 11(5.11).

3. Vysílač s vlnovou délkou  $\lambda = 300$  m má být slyšitelný v okruhu  $\Delta x \cong 100$  km. Určete šířku pásma  $\Delta \lambda$  vlnového balíku, který musí takový vysílač produkovat.

Řešení. Ze vztahu 11(8.20) plyne  $|\Delta k| = (2\pi/\lambda^2) \Delta \lambda$ , což dá

$$\Delta \lambda \cong \frac{\lambda^2}{2\pi \Delta x} \cong 0,15 \text{ m}.$$

4. Částice s hmotností  $m = 10^{-9}$  kg je lokalizována v oblasti  $\Delta x = 10^{-6}$  m. Určete neurčitost rychlosti takové částice podle Heisenbergovy relace neurčitosti. Totéž pro  $m = 10^{-30}$  kg,  $\Delta x = 10^{-10}$  m, což zhruba odpovídá elektronu v atomu.

Řešení. Položíme-li  $\Delta p = m \Delta v$ , pak v prvním případě dostaneme  $\Delta v = 10^{-19}$  m s<sup>-1</sup>, což je zanedbatelná veličina, takže lze s vysokou přesností mluvit o trajektorii dané částice. Naproti tomu ve druhém případě je  $\Delta v = 10^6$  m s<sup>-1</sup>, což činí představu trajektorie nepoužitelnou.

5. Odvoďte vzorec pro rychlost šíření zvuku v ideálním plynu. Použijte při tom vzorec 11(14.5) a stavové rovnice ideálního plynu.

Řešení. V rovnici 11(14.5) se derivace vztahuje na adiabatický děj. V ideálním plynu je  $p = \text{konst} \cdot \varrho^\kappa$ , a tudíž  $(\partial p / \partial \varrho) = \kappa p / \varrho$ . Tlak  $p$  vyjádříme pomocí stavové rovnice  $p = \varrho R T / \mu$ , kde  $R$ ,  $T$ ,  $\mu$  značí plynovou konstantu, absolutní teplotu a kilomolovou hmotnost plynu. Je tedy

$$c = \left( \frac{\kappa R T}{\mu} \right)^{1/2}.$$

6. Rychlost šíření zvuku ve vzduchu je  $c_1 = 340$  m s<sup>-1</sup>, ve vodě  $c_2 = 1400$  m s<sup>-1</sup>. Vysvětlete, proč se nad (klidnou) vodní hladinou dobře šíří i slabé zvuky a proč vnější zvuk špatně proniká pod vodní hladinu. Návod: vypočítejte mezní úhel 11(10.12).

Řešení. Ze vzorce pro mezní úhel  $\sin \delta = (c_1 / c_2) \cong 0,24$  plyne  $\delta \cong 14^\circ$ . Zvuk dopadající pod úhlem  $\vartheta > 14^\circ$  (měřeným od kolmice) se totálně odráží. Do vody tedy proniká prakticky pouze zvuk dopadající na vodní hladinu *kolmo*.

7. Zdroj vlnění i pozorovatel se pohybují po společné přímce. Určete Dopplerův posuv frekvence.

Řešení. V označení zavedeném v článku 11.11 platí

$$\omega''' = \frac{c}{c - V} \omega'' = \frac{c}{c - V} \frac{c - v}{c} \omega = \frac{c - v}{c - V} \omega.$$

8. Odvoďte vzorce pro rychlosti šíření elastických vln v homogenním izotropním elastickém kontinuu. Využijte pohybových rovnic z článku 9.1 pro takové prostředí.

Řešení. Pohybové rovnice zapíšeme ve tvaru

$$\varrho \left( \partial^2 u_i / \partial t^2 \right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

kde  $u_i$  jsou složky vektoru deformace,  $\tau_{ij}$  jsou složky tenzoru napětí. Podle Hookova zákona je

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu e_{ij}, \quad (2)$$

kde

$$2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (3)$$

a  $\lambda, \mu$  jsou moduly pružnosti (Laméovy koeficienty). V homogenním kontinuu  $\lambda, \mu$  nezávisí na souřadnicích. Po dosazení (2) do (1) dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 u_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Rovnice se zjednoduší v případě, kdy výchylka  $\mathbf{u}$  závisí pouze na jedné prostorové souřadnici, např.  $x_1 \equiv x$ , tj.  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(x, t)$ . To odpovídá rozruchu šířícímu se ve směru osy  $x$ . Máme tak

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Rovnice (5) popisuje vlnu, jejichž výchylka  $u_x$  se šíří ve směru osy  $x$ , tj. longitudinální (podélnou) vlnu. Rovnice (6) popisují vlny, jejichž výchylky  $u_y, u_z$  jsou kolmé k ose  $x$ , kolmé ke směru šíření, takže se jedná o transverzální (příčnou) vlnu. Rychlosti šíření obou druhů vln jsou dány vztahy

$$c_l = [(\lambda + \mu)/\rho]^{1/2}, \quad c_t = (\mu/\rho)^{1/2}, \quad (7)$$

resp. po zavedení Youngova modulu  $E$  a Poissonova modulu

$$c_l = \left[ \frac{E(1 - \sigma)}{\rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \right]^{1/2}, \quad c_t = \left[ \frac{E}{2\rho(1 + \sigma)} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Při  $\sigma = 0$  (není příčná deformace) dostáváme  $c_l = (E/\rho)^{1/2}$ , což je známý nám již vzorec 11(12.3) pro šíření vln v tenké elastické tyči.

Srovnáním vzorců (7) poskytne pozoruhodnou nerovnost mezi oběma rychlostmi

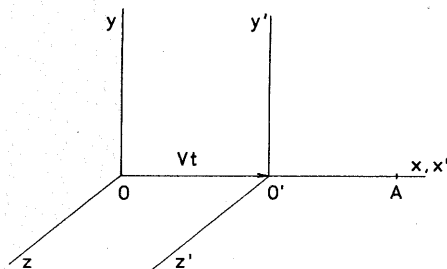
$$c_l \geq c_t \sqrt{2}. \quad (9)$$



# Relativistická mechanika

## 12.1 Michelsonův–Morleyův pokus

Newtonova mechanika je založena na axiomu absolutního, tj. na pohybu těles nezávislého prostoru a času (viz první kapitola). Souhlas předpovědí Newtonovy mechaniky s experimentem ukazuje, že předpoklad absolutního prostoru a absolutního času je (pro danou oblast jevů) přinejmenším *dobrym přiblížením*. S ohledem na *fundamentální význam* a dosah tohoto axiomu je nutno jeho platnost ověřit *rozhodujícím pokusem (experimentum crucis)*. O jednom takovém historickém experimentu zde stručně pojednáme.



Obr. 12.1 Vzájemný pohyb dvou inerciálních soustav

Nejdříve si však všimněme některých důsledků, k nimž přivádí axiom absolutního prostoru a absolutního času. Mějme dvě referenční soustavy  $(x, y, z)$  a  $(x', y', z')$ , jež se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí  $\mathbf{V}$ . Tuto rychlost zvolíme ve směru osy  $x$  (viz obr. 12.1).

Newtonův axiom absolutního prostoru a absolutního času vede k tomu, že mezi oběma soustavami platí

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad 12(1.1)$$

Tato soustava rovnic se obvykle nazývá *Galileiovou transformací*. První tři rovnice vyjadřují nezávislost prostorových vzdáleností a poslední ( $t' = t$ ) nezávislost času na pohybu těles.

Rychlosti částice v obou soustavách  $v_x = dx/dt$ ,  $v'_x = dx'/dt'$  jsou svázány vztahy

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z. \quad 12(1.2)$$

Tento *adiční teorém rychlostí* je nerozlučně spojen s předpokladem nezávislosti chodu času ( $t' = t$ ) na referenční soustavě. Takový předpoklad však není očividný, proto je nutno jej *experimentálně ověřit*.

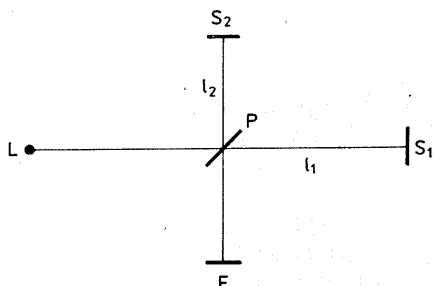
Referenční soustava, v níž těleso nepodrobené působení vnějších sil se pohybuje konstantní rychlostí, je inerciální soustavou. Jelikož rychlost  $V$  vzájemného pohybu obou soustav je podle předpokladu konstantní, zrychlení  $dv'/dt'$  a  $dv/dt$  jsou v obou soustavách stejná. Newtonovy pohybové rovnice  $m(d\mathbf{v}/dt) = -\text{grad } U$  jsou tedy invariantní vůči Galileiově transformaci 12(1.1). Invariantnost pohybových rovnic mechaniky vůči Galileiově transformaci vyjadřuje ekvivalentnost všech inerciálních soustav v Newtonově mechanice neboli tzv. *Galileiův princip relativity*.

Interakci částic v Newtonově mechanice popisujeme pomocí interakční energie, jež závisí na poloze interagujících částic v témže časovém okamžiku. V tom je mlčky obsažen *předpoklad o okamžitém šíření interakce*. Při konečné rychlosti šíření rozruchu (interakce) se změna polohy kterékoliv částice projeví na ostatních částicích s jistým zpožděním, jež závisí na rychlosti šíření tohoto rozruchu. Konečnost či nekonečnost takové rychlosti, popř. existenci maximální rychlosti šíření rozruchu je rovněž nutno odvodit z pozorování.

Adiční teorém 12(1.2) připouští libovolně velikou rychlost, a *vylučuje tedy existenci maximální (mezní) rychlosti šíření*.

Víme, že v mechanice neexistuje *privilegovaná soustava* v klidu, jelikož ji principiálně nelze odlišit od ostatních soustav, jež se vůči ní pohybují konstantní nenulovou rychlostí.

Zdalo by se, že takové rozlišení bude možné pomocí optických (elektromagnetických) jevů. Mějme nějakou privilegovanou soustavu, v níž je (ve směru osy  $x$ ) rychlost šíření světla ve vakuu rovna  $c$ . Ve shodě s adičním teorémem rychlostí by měla být rychlost šíření světla  $c - V$  nebo  $c + V$  v závislosti na



Obr. 12.2 Schéma Michelsonova-Morleyova pokusu

vzájemně orientaci obou rychlostí  $c$  a  $V$ . Tento závěr byl prvně přesvědčivě vyvrácen slavným Michelsonovým-Morleyovým experimentem (A. MICHELSON, E. MORLEY, 1887).

Připomeneme si podstatu tohoto pokusu (viz obr. 12.2). Světlo vycházející z monochromatického zdroje  $L$  (o vlnové délce  $\lambda$ ) se polopropustným zrcadlem  $P$  rozdělí na dva paprsky. Po odrazu od zrcadel  $S_1$  a  $S_2$  se paprsky vrátí přes polopropustné zrcadlo na stínítko  $F$ , na němž se pozoruje interference obou paprsků.

Nechť se interferometr pohybuje ve směru  $PS_1$  rychlostí  $V$  vzhledem k privilegované soustavě. Kdyby platil adiční teorém rychlostí (a tedy i Galileiova transformace), pak doba potřebná k tomu, aby světlo překonalo vzdálenost  $PS_1P$ , by byla

$$t_1 = \frac{l_1}{c - V} + \frac{l_1}{c + V} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2},$$

kde

$$\beta \equiv \frac{V}{c}. \quad 12(1.3)$$

Při pohybu světla od  $P$  k  $S_2$  se zrcadlo  $P$  posune o vzdálenost  $\delta$ , kterou určíme z odpovídajícího pravoúhlého trojúhelníku  $Vt = \delta$ ,  $ct = (\delta^2 + l_2^2)^{1/2}$ . Odtud plyne

$$\delta = \beta \gamma l_2,$$

kde

$$\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv (1 - V^2/c^2)^{-1/2}. \quad 12(1.4)$$

Dobu  $t_2$  potřebnou na to, aby světlo překonalo vzdálenost  $PS_2P$ , vypočteme z rovnice  $ct_2 = 2(\delta^2 + l_2^2)^{1/2}$ , tj.

$$t_2 = \frac{2\gamma l_2}{c}.$$

Rozdíl  $\Delta$  optických drah obou paprsků je

$$\Delta \equiv c(t_1 - t_2) = 2\gamma(\gamma l_1 - l_2).$$

Při pootočení interferometru o  $90^\circ$  se postavení ramen  $l_1$  a  $l_2$  vzájemně vymění, což dá pro rozdíl optických drah

$$\Delta' = 2\gamma(l_1 - \gamma l_2).$$

Odtud plyne, že při pootočení přístroje o  $90^\circ$  se má objevit posun interferenčního obrazce o  $n$  proužků ( $\Delta - \Delta' = n\lambda$ ), kde

$$n = \frac{(\Delta - \Delta')}{\lambda} = 2(l_1 + l_2) \gamma \frac{\gamma - 1}{\lambda}.$$

V uvedeném pokuse bylo užito sodíkového světla (vlnová délka  $\lambda = 55 \cdot 10^{-8}$  m) a interferometru s délkou ramen  $l_1 = l_2 = 11$  m, což při rychlosti Země kolem Slunce  $V \cong 30 \text{ km s}^{-1}$  mělo dát snadno měřitelný posuv  $n = 0,4$  proužku. Ani v uvedeném případě, ani v pozdějších experimentech *nebyl žádný posuv interferenčních proužků pozorován.*

Z negativních výsledků těchto pokusů ALBERT EINSTEIN (1905) dospěl k těmto závěrům, resp. postulátům:

1. *Tvar fyzikálních zákonů je nezávislý na volbě inerciální soustavy, a tudíž nelze žádným pokusem objevit tzv. privilegovanou soustavu (soustavu v absolutním klidu).*

2. *Rychlost světla je ve všech inerciálních soustavách stejná (nezávisí na vzájemné rychlosti zdroje a pozorovatele a je maximální rychlostí šíření fyzikálních účinků (rozhnutí, signálů).*

Poslední tvrzení plyne z toho, že rychlost světla se neskládá s rychlostí zdroje, a je tedy *univerzální konstantou*, jejíž hodnota je podle nejnovějších měření (1985) rovna

$$c = (2,997\,924\,58 \pm 0,000\,000\,01) 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad 12(1.5)$$

Z Einsteinových postulátů plyne, že je nutno pozměnit Galileiovu transformaci tak, aby byla ve shodě s těmito postuláty. To však současně znamená *kardinální revizi názorů na prostor a čas.*

## 12.2 Lorentzova transformace a její důsledky

Invariantnosti rychlosti světla můžeme dát jednoduchou matematickou formu. Mějme dvě referenční soustavy  $K$  a  $K'$  jež se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí. Souřadnice a čas v  $K$  označíme  $x, y, z, t$ , v soustavě  $K'$  je budeme značit  $x', y', z', t'$ .

Světelný signál je vyslán z bodu  $x_1, y_1, z_1$  v soustavě  $K$  v čase  $t_1$  (měřeném v soustavě  $K$ ). Budeme pozorovat šíření tohoto signálu v soustavě  $K$ . Nechť světelný signál dostihne bod  $x_2, y_2, z_2$  této soustavy v čase  $t_2$  (měřeném v soustavě  $K$ ). Signál se šíří rychlostí  $c$ , takže urazí vzdálenost  $c(t_2 - t_1)$ . Tuto vzdálenost lze vyjádřit také jako  $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$ .

V soustavě  $K$  platí

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \quad 12(2.1)$$

V soustavě  $K'$  bylo vyslání světelného signálu zaregistrováno v bodě  $x'_1, y'_1, z'_1$  v čase  $t'_1$  a jeho dopad v bodě  $x'_2, y'_2, z'_2$  v čase  $t'_2$ . (Zdůrazněme, že časy  $t'_1$  a  $t'_2$  jsou měřeny v soustavě  $K'$ .) Jelikož rychlost světla je v obou soustavách stejná (a rovna  $c$ ), bude v  $K'$  na základě obdobných argumentů platit

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0. \quad 12(2.2)$$

S invariantností rychlosti světla tedy souvisí invariantnost tzv. *prostorčasového intervalu*

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &\equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ &= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2, \end{aligned} \quad 12(2.3)$$

popř. v diferenciální formě

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (c dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \\ &= (c dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2. \end{aligned} \quad 12(2.4)$$

Budeme předpokládat, že soustavy  $K$  a  $K'$  se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí  $V$  ve směru osy  $x$  obdobně jako při odvozování Galileiovy transformace (viz obr. 12.1). Novou transformaci souřadnic a času budeme hledat jako lineární zobecnění Galileiovy transformace ve tvaru

$$x' = A(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = B(t - DVx).$$

Koeficienty  $A, B, D$  určíme tak, aby bylo

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

při *všech*  $x, y, z, t$ . Po dosazení transformačních vztahů máme

$$c^2B^2(t - DVx)^2 - A^2(x - Vt)^2 = c^2t^2 - x^2$$

a pak po úpravě

$$(c^2B^2 - A^2V^2)t^2 + 2V(A^2 - c^2B^2D)xt - (A^2 - c^2B^2D^2V^2)x^2 = c^2t^2 - x^2.$$

Porovnáním koeficientů získáme rovnice

$$c^2B^2 - A^2V^2 = c^2, \quad A^2 - c^2B^2D = 0, \quad A^2 - c^2B^2D^2V^2 = 1,$$

které mají řešení

$$D = c^{-2}, \quad A^2 = B^2 = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

Jelikož při  $V = 0$  má být  $x' = x$ ,  $t' = t$ , musí být  $A = B = + (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ .

Hledaná transformace zní

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right), \quad 12(2.5)$$

kde  $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ . Rovnice 12(2.5) představují slavnou *Lorentzovu transformaci*, k níž H. A. LORENTZ (1985) dospěl z požadavku invariance rovnic elektrodynamiky (Maxwellových rovnic). Lorentz však pokládal tuto transformaci za *pouhou matematickou vlastnost (kuriozitu) těchto rovnic*. Teprve ALBERT EINSTEIN (1905) interpretoval tuto transformaci jako *odraz reálných vlastností prostoru a času*. Poznamenejme ještě, že transformace 12(2.5) se označuje jako speciální Lorentzova transformace, což souvisí se speciální volbou pohybu referenčních soustav podél osy  $x$ .

Rozřešením soustavy 12(2.5) vzhledem k  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  dostaneme obrácenou Lorentzovu transformaci

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right), \quad 12(2.6)$$

což odpovídá pohybu soustavy  $(x, y, z, t)$  vůči  $(x', y', z', t')$  rychlostí  $-V$  (minus  $V$ ).

Při  $V \ll c$  (tj.  $c \rightarrow \infty$ ) lze položit  $\gamma = 1$ , čímž se Lorentzova transformace 12(2.5) redukuje na Galileiovu transformaci 12(1.1).

Odvodíme adiční teorém rychlostí pomocí Lorentzovy transformace. Z 12(2.5) najdeme

$$dx' = \gamma(dx - V dt), \quad dt' = \gamma(dt - Vc^{-2} dx).$$

Vydělením obou těchto rovnic dostaneme

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V dt}{dt - c^{-2}V dx} = \frac{(dx/dt) - V}{1 - c^{-2}V(dx/dt)}.$$

Zavedeme-li rychlosti částice v obou soustavách  $v'_x = dx'/dt'$ ,  $v_x = dx/dt$ , dostaneme *Einsteinův adiční teorém rychlostí*

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - c^{-2}Vv_x}, \quad v_x = \frac{V + v'_x}{1 + c^{-2}Vv'_x}. \quad 12(2.7)$$

Pro zbývající dvě složky  $v'_y = dy'/dt'$ ,  $v'_z = dz'/dt'$  dostaneme obdobně

$$v'_y = \frac{\gamma^{-1}v_y}{1 - c^{-2}Vv_x}, \quad v'_z = \frac{\gamma^{-1}v_z}{1 - c^{-2}Vv_x}. \quad 12(2.8)$$

Při  $V \ll c$  dostáváme Newtonův adiční teorém rychlostí 12(1.2), tj.  $v'_x = v_x - V$ ,  $v'_y = v_y$ ,  $v'_z = v_z$ .

Rychlost světla  $c$  se ve shodě s 12(2.7) nemění. Položíme-li  $v_x = c$ , pak  $v'_x \equiv c' = c$ . Složením rychlosti světla (ve vakuu) s libovolnou rychlostí soustavy dostaneme vždy tutéž hodnotu  $c$ , což je ve shodě s *principem konstantní rychlosti světla*.

Poněvadž  $\gamma$  je reálné, musí být  $V < c$ . Při  $V = c$  je Lorentzova transformace singulární ( $\gamma = \infty$ ), což vyjadřuje, že rychlost světla je *mezní rychlostí* pohybu referenčních soustav (hmotných těles).

Všimněme si nyní některých důsledků rovnice 12(2.4). Budeme měřit čas v pohybující se soustavě. V soustavě pevně spojené s pohybujícími se hodinami je časový interval  $dt'$  a poloha hodin se v této soustavě nemění, tj.  $dx' = dy' = dz' = 0$ . Z invariantnosti prostoročasového intervalu 12(2.4) pak plyne

$$dt' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt,$$

kde

$$v = \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} \quad 12(2.9)$$

je rychlost pohybujících se hodin vzhledem k soustavě  $x, y, z, t$ .

Čas měřený v soustavě pohybující se společně s daným tělesem (tj. v soustavě pevně spojené s daným tělesem) je tzv. *vlastní čas* tělesa. Rovnicí  $dt' = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt$  je vyjádřen vlastní čas pomocí času referenční soustavy, vůči níž se zkoumá pohyb. Vlastní čas se zpravidla označuje symbolem  $\tau$ , takže je

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt. \quad 12(2.10)$$

Vlastní čas je ve všech inerciálních systémech stejný, tj.  $\tau$  je *lorentzovským invariantem*.

Integrací 13(2.10) získáme interval  $\tau_2 - \tau_1$  vlastního času

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt. \quad 12(2.11)$$

Z rovnic 12(2.10) a 12(2.11) je vidět, že vlastní čas pohybujícího se tělesa je vždy menší než příslušný časový interval v klidové soustavě. Názorně lze říci, že pohybující se „hodiny“ jdou *pomaleji* než „hodiny“ klidové. Výraz hodiny dáváme do uvozovek, abychom zdůraznili, že se nejedná pouze o hodiny v běžném slova smyslu, ale také o jakýkoliv proces, např. dobu života nestabilní částice, periodu elektromagnetického záření nebo trvání biologických procesů.

Každou událost charakterizujeme polohou  $x, y, z$  a časem  $t$ . Nechť  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  a  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$  charakterizují dvě takové události v soustavě  $K$ . Budeme zkoumat, zdali existuje taková referenční soustava  $K'$ , v níž by obě události probíhaly v jednom a téže místě prostoru. Pro časové intervaly a prostorové vzdálenosti zavedeme označení

$$t_{12} \equiv t_2 - t_1, \quad l_{12}^2 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$t'_{12} \equiv t'_2 - t'_1, \quad l'^2_{12} \equiv (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

Ve shodě s invariantností 12(2.3) prostoročasového intervalu platí

$$s_{12}^2 \equiv c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}. \quad 12(2.12)$$

Z požadavku, aby v soustavě  $K'$  proběhly obě události ve stejném místě, plyne  $l'_{12} = 0$ , a tudíž

$$s_{12}^2 \equiv c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} > 0. \quad 12(2.13)$$

Taková referenční soustava tedy existuje, když  $s_{12}^2 > 0$ , tj. když prostoročasový interval je reálný. Reálné prostoročasové intervaly nazýváme *časupodobnými* intervaly nebo intervaly *časového charakteru*. V případě časupodobných intervalů tedy existuje taková referenční soustava, v níž dvě události proběhly *ve stejném místě*. Doba  $t'_{12}$ , která proběhla mezi těmito dvěma událostmi, je

$$t'_{12} = \frac{1}{c} (c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2)^{1/2}. \quad 12(2.14)$$

Probíhají-li jakékoliv dvě události se stejným tělesem, pak příslušný prostoročasový interval musí být časupodobným intervalem. Vzdálenost  $l_{12}$ , kterou dané těleso urazí mezi těmito dvěma událostmi, je menší než dráha světelného paprsku  $c |t_{12}|$ , jelikož rychlost tělesa je vždy menší než rychlost světla  $c$ . Je tedy  $l_{12} < c |t_{12}|$ , což vede k 12(2.13).

Dvě události mohou být vzájemně příčinně spojeny pouze v tom případě, když prostoročasový interval mezi nimi je časupodobný, jelikož žádná interakce (rozhnutí, signál) se nemůže šířit rychlostí převyšující rychlost světla  $c$ .



Obdobně najdeme referenční soustavu  $K'$ , v níž by dvě události proběhly současně. Položíme-li v 12(2.12)  $t'_{12} = 0$ , dostaneme

$$s_{12}^2 = -l_{12}^2 < 0. \quad 12(2.15)$$

Taková referenční soustava tedy existuje pouze v takovém případě, když prostoročasový interval  $s_{12}$  je imaginární. Takové imaginární prostoročasové intervaly nazýváme *prostorupodobnými* intervaly nebo intervaly *prostorového charakteru*.

Třídění prostoročasových intervalů na časupodobné a prostorupodobné je (s ohledem na invariantnost  $s_{12}$ ) absolutní (invariantní).

Hranici mezi oběma typy prostoročasových intervalů udává tzv. světelný kužel  $s_{12}^2 = 0$ , resp.

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \quad 12(2.16)$$

Připomeňme si, že (viz příklady k matematickým dodatkům) v trojrozměrném prostoru je rovnice kužele  $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta = 0$ . Rovnice 12(2.16) tak definuje kužel v čtyřrozměrném prostoru  $x, y, z, t$ , přičemž v roli směrnice ( $\operatorname{tg} \vartheta$ ) vystupuje rychlost světla  $c$ .

### 12.3 Geometrická interpretace. Minkowského formalismus

HERMAN MINKOWSKI (1908) dal Lorentzově transformaci velice plodnou geometrickou interpretaci, kterou si nyní stručně vysvětlíme.

Výraz pro prostoročasový interval

$$\sigma^2 \equiv -s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2$$

připomíná Pythagorovu větu ve čtyřrozměrném eukleidovském prostoru, jehož ortogonálními osami jsou

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ict = x_4. \quad 12(3.1)$$

S ohledem na znaménko minus u členu  $c^2t^2$ , popř. imaginární jednotku u čtvrté osy  $x_4 = ict$  se takový prostor označuje jako pseudoeukleidovský nebo *Minkowského prostor*. Invariantnost prostoročasového intervalu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

tak vyjadřuje invariantnost délky vůči Lorentzově transformaci (srovnej s rovnicí D(2.5) matematického dodatku).

Prostoročasový interval tak vyjádříme rovnicemi

$$\begin{aligned} -s^2 &\equiv x_\mu x_\mu, \\ -(ds)^2 &\equiv dx_\mu dx_\mu. \end{aligned} \quad 12(3.2)$$

Zde malé řecké indexy probíhají hodnoty 1, 2, 3, 4 a přes dva stejné řecké indexy se provádí sumace od 1 do 4 bez explicitního vypisování sumačního znaku (Einsteinova sumační konvence – viz dodatek D.2). Malé latinské indexy budou nadále probíhat hodnoty 1, 2, 3 a budeme pro ně užívat stejnou sumační konvenci jako ve všech ostatních kapitolách.

Souřadnice  $x_1, x_2, x_3, x_4$  určují polohu *bodů* (*událostí*) ve čtyřrozměrném Minkowského prostoročase. V těchto souřadnicích přepíšeme Lorentzovu transformaci 1(2.5) ve tvaru

$$x'_1 = \gamma(x_1 + i\beta x_4), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \gamma(x_4 - i\beta x_1), \quad 12(3.4)$$

kde jako dříve je  $\beta \equiv V/c$ ,  $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Lorentzovu transformaci 12(3.4) prostoročasových souřadnic vyjádříme rovnicí

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu, \quad 12(3.5)$$

kde matice  $L_{\mu\nu}$  koeficientů Lorentzovy transformace je

$$L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad 12(3.6)$$

V 12(3.5) je užito sumační konvence. Pro ilustraci uvedeme

$$x'_1 = L_{1\nu} x_\nu \equiv L_{11} x_1 + L_{12} x_2 + L_{13} x_3 + L_{14} x_4.$$

Po dosazení  $L_{11} = \gamma$ ,  $L_{12} = L_{13} = 0$ ,  $L_{14} = i\beta\gamma$  dostaneme první rovnici soustavy 12(3.4). Obdobně postupujeme u ostatních rovnic 12(3.4).

V dodatku D.2 jsme z invariantnosti délky průvodiče v trojrozměrném prostoru (vůči transformaci  $x_i = a_{ij} x_j$ ) odvodili vztah  $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ . Snadno odvodíme analogické relace pro koeficienty  $L_{\mu\nu}$  Lorentzovy transformace. Položíme  $x'_\mu = L_{\mu\lambda} x_\lambda$ ,  $x'_\nu = L_{\nu\lambda} x_\lambda$ , čímž dostaneme

$$x'_\mu x'_\nu = L_{\mu\lambda} L_{\nu\lambda} x_\lambda x_\nu.$$

Zavedeme Kroneckerův symbol (viz D.2)  $\delta_{\lambda\nu} = 1$  pro  $\nu = \lambda$ ,  $\delta_{\lambda\nu} = 0$  pro  $\nu \neq \lambda$ , pomocí něhož zapíšeme  $x_\nu x_\nu = \delta_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu$ . Z invariantnosti  $x'_\mu x'_\mu = x_\nu x_\nu$  pak plyne

$$L_{\mu\lambda} L_{\nu\lambda} x_\lambda x_\nu = \delta_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu.$$

Tato rovnice musí být splněna pro všechna  $x_\lambda, x_\nu$ , což vede k rovnosti koeficientů u součinů  $x_\lambda x_\nu$ . Koeficienty Lorentzovy transformace tak splňují relace

$$L_{\mu\lambda}L_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}. \quad 12(3.7)$$

V dodatku D.3 jsme definovali vektor jako soubor veličin, které se při transformaci souřadnic  $x'_i = a_{ij}x_j$  transformují jako souřadnice. Ve shodě s touto definicí nazveme vektorem (*čtyřvektorem*) v Minkowského prostoru čtveřici veličin  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , které se při Lorentzově transformaci  $x'_\mu = L_{\mu\nu}x_\nu$  transformují jako souřadnice, tj.

$$A'_\mu = L_{\mu\nu}A_\nu. \quad 12(3.8)$$

Přirozeným zobecněním definice D(3.3) tenzoru  $T_{ij}$  druhého řádu (v trojrozměrném prostoru) je tenzor  $T_{\mu\nu}$  druhého řádu v Minkowského prostoru. Je to  $4^2 = 16$  veličin  $T_{\mu\nu}$ , jež se při Lorentzově transformaci  $x'_\mu = L_{\mu\kappa}x_\kappa$  transformují podle zákona

$$T'_{\mu\nu} = L_{\mu\kappa}L_{\nu\lambda}T_{\kappa\lambda}. \quad 12(3.9)$$

Obdobně zobecníme skalární součin dvou vektorů. Nechť  $A_\mu, B_\mu$  jsou dva čtýřvektory. Ve výrazu  $A'_\mu B'_\mu$  položíme

$$A'_\mu = L_{\mu\lambda}A_\lambda, \quad B'_\mu = L_{\mu\nu}B_\nu,$$

takže je

$$A'_\mu B'_\mu = L_{\mu\lambda}L_{\mu\nu}A_\lambda B_\nu.$$

Užijeme-li ještě vztahu 12(3.7), dostaneme

$$A'_\mu B'_\mu = \delta_{\lambda\nu}A_\lambda B_\nu = A_\nu B_\nu. \quad 12(3.10)$$

Tento součin dvou vektorů je tedy *nezávislý (invariantní) na volbě Lorentzovy referenční soustavy*. Rozepsáním dostaneme

$$A_\nu B_\nu \equiv A_1 B_1 + A_4 B_4 \equiv \mathbf{AB} + A_4 B_4, \quad 12(3.11)$$

kde  $\mathbf{AB}$  je „obyčejný“ trojrozměrný skalární součin. Nechť

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \quad 12(3.12)$$

je *skalární funkce*. Stejným postupem jako v dodatku D.5 dokážeme, že veličiny

$$A_\nu \equiv \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad 12(3.13)$$

jsou složkami čtyřvektoru, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\mu} = L^{\mu\nu} \left( \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \right). \quad 12(3.14)$$

Obdobně najdeme, že parciální derivace čtyřvektoru  $T_{\kappa\lambda} = \partial A_\lambda / \partial x_\kappa$  se transformují podle zákona 12(3.9), tj. jsou složkami tenzoru v Minkowského prostoru.

## 12.4 Relativistická kinematika a dynamika

Minkowského formalismus je velmi vhodný pro zobecnění základních pojmů a vztahů kinematiky a dynamiky (viz první dvě kapitoly) na relativistickou oblast jevů.

Souřadnice  $x_\mu$  jsou podle definice složkami čtyřvektoru polohového vektoru bodu v Minkowského prostoru. Diferenciály  $dx_\mu$  jsou rovněž složkami čtyřvektoru, jelikož z 12(3.5) plyne

$$dx'_\mu = L_{\mu\nu} dx_\nu. \quad 12(4.1)$$

Podle článku 12.2 je  $ds$ , popř. vlastní čas  $d\tau$  lorentzovským invariantem, takže mezi veličinami

$$u_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{d\tau}, \quad u'_\mu \equiv \frac{dx'_\mu}{d\tau} \quad 12(4.2)$$

platí transformační vztah

$$u'_\mu = L_{\mu\nu} u_\nu. \quad 12(4.3)$$

Z toho plyne, že veličiny  $u_\nu$  jsou složkami čtyřvektoru. Fyzikální smysl tohoto vektoru najdeme následující úvahou.

V 12(4.2) zavedeme „obyčejnou“ trojrozměrnou rychlost  $v_i = dx_i/dt$  a dosadíme za vlastní čas  $(1 - v^2/c^2)^{1/2} dt = d\tau$ . Čtyřvektor  $u_\nu$  má pak tvar

$$u_\nu = \left( \frac{v_i}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \frac{ic}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right). \quad 12(4.4)$$

Při malých rychlostech  $v \ll c$  lze položit  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \cong 1$ , takže prostorové složky jsou  $u_i = v_i$ . To nás opravňuje interpretovat vektor  $u_\nu$  jako čtyřvektor rychlosti. Pro účely reference uvedeme prostorové komponenty ( $\nu = i = 1, 2, 3$ ) a časovou ( $\nu = 4$ ) komponentu tohoto vektoru

$$u_i = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} v_i, \quad u_4 = ic(1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad 12(4.5)$$

Z definice 12(4.4) nebo 12(4.5) je vidět, že pro čtyřvektor  $u_\nu$  platí

$$u_\nu u_\nu = -c^2. \quad 12(4.6)$$

Výraz  $u_\nu u_\nu$  lze nazvat kvadrátem vektoru čtyřrychlosti. Lze proto říci, že kvadrát vektoru čtyřrychlosti je roven záporně vzatému kvadrátu rychlosti světla. Nechme se mýlit tím, že tento kvadrát je záporný, jelikož čtvrtá složka  $u_4$  je (obdobně jako  $x_4$  u souřadnic  $x_\nu$ ) ryze imaginární.

Z 12(4.3) plyne pro diferenciály složek vektorů  $u'_\mu$ ,  $u_\nu$  vztah

$$du'_\mu = L_{\mu\nu} du_\nu. \quad 12(4.7)$$

Poněvadž  $d\tau$  je lorentzovským invariantem, mezi veličinami

$$a'_\mu \equiv \frac{du'_\mu}{d\tau}, \quad a_\nu \equiv \frac{du_\nu}{d\tau} \quad 12(4.8)$$

platí transformační zákon

$$a'_\mu = L_{\mu\nu} a_\nu, \quad 12(4.9)$$

což dokazuje, že  $a_\nu$  jsou složkami čtyřvektoru. Fyzikální význam tohoto čtyřvektoru najdeme obdobně jako u vektoru  $u_\nu$ .

Pro první tři složky ( $\nu = i = 1, 2, 3$ ) je  $a_i = du_i/d\tau$ . Při  $v \ll c$  je  $u_i \cong v_i$ ,  $\tau \cong t$ , takže  $a_i \cong dv_i/dt$  jsou složkami zrychlení. To nás opravňuje interpretovat vektor  $a_\nu$  jako čtyřvektor zrychlení.

Mezi čtyřvektory rychlosti  $u_\nu$  a zrychlení  $a_\nu$  platí

$$u_\nu a_\nu = 0. \quad 12(4.10)$$

Je-li skalární součin dvou nenulových vektorů roven nule, říkáme, že tyto vektory jsou vzájemně ortogonální. Rovnice 12(4.10) vyjadřuje vzájemnou ortogonálnost čtyřvektorů rychlosti a zrychlení. Platnost rovnice 12(4.10) dokážeme tak, že 12(4.6) proderivujeme podle  $\tau$ , což dá

$$(du_\nu/d\tau)u_\nu + u_\nu(du_\nu/d\tau) = 0.$$

Odtud po dosazení  $a_\nu = du_\nu/d\tau$  dostaneme 12(4.10).

Snadno najdeme relativistické zobecnění dynamických veličin. V Newtonově mechanice je hybnost  $\mathbf{p}$  definována vztahem  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , resp.  $p_i = mv_i$ , kde  $m$  je setrvačná hmotnost částice. Jak víme z úvodních kapitol, setrvačná hmotnost charakterizuje schopnost tělesa setrvávat v daném pohybovém stavu a nepřecházet do jiného. V Newtonově mechanice se tato veličina pokládá za charakteristiku tělesa nezávislou na jeho pohybovém stavu (rychlosti). Uvidíme, že tento Newtonův předpoklad je dobrým přiblížením pouze při malých rychlostech ( $v \ll c$ ) částic.

Víme, že  $u_\mu$  je čtyřvektorem rychlosti. Čtyřvektorem je také  $ku_\mu$ , kde  $k$  je skalární konstanta nezávislá na volbě Lorentzovy soustavy. Tuto konstantu označíme (s ohledem na konzistentnost s dřívějším označením) symbolem  $m_0$ . Čtyřvektor  $p_\mu$  hybnosti definujeme vztahem

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau}. \quad 12(4.11)$$

Ve shodě s 12(4.5) jsou prostorové komponenty ( $\mu = i = 1, 2, 3$ ) rovny

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad 12(4.12)$$

Při malých rychlostech  $v \ll c$  dostáváme Newtonovu definici hybnosti  $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$ . (V nerelativistické mechanice se index nula u  $m$  nepíše, jelikož hmotnost se předpokládá konstantní.) Pokud chceme zachovat definici  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ , pak je nutno pro hmotnost  $m$  položit

$$m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad 12(4.13)$$

To je známý Einsteinův vztah pro závislost setrvačné hmotnosti ( $m$ ) na rychlosti ( $v$ ) částice. Veličina  $m_0$  představuje hmotnost částice při  $v = 0$ , proto se nazývá *klidovou hmotností*. Veličina

$$m(1 - v^2/c^2)^{1/2} = m_0$$

je konstantou daného tělesa nezávislou na volbě referenční soustavy.

Čtvrtá složka hybnosti je podle 12(4.5) a 12(4.11) rovna

$$p_4 = im_0 c (1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad 12(4.14)$$

Fyzikální význam této čtvrté komponenty najdeme následující úvahou.

V článku 5.7 jsme odvodili vztah mezi hybností  $p_i$  a Lagrangeovou funkcí  $L$ , jmenovitě  $p_i = (\partial L / \partial v_i)$ . Snadno se přesvědčíme, že hybnost 12(4.12) dostaneme, vezmeme-li lagrangian  $L$  ve tvaru

$$L = -m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad 12(4.15)$$

Derivací  $\partial L / \partial v$  dostaneme 12(4.12), čímž je potvrzena správnost volby lagrangianu 12(4.15). Celková energie  $W$  částice souvisí s lagrangianem vztahem

$$W = \mathbf{p} \mathbf{v} - L.$$

Po dosazení 12(4.12) a 12(4.15) do 12(4.16) dostaneme pro celkovou energii částice vyjádření

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad 12(4.16)$$

To je slavný *Einsteinův vztah mezi hmotností a energií*, o němž pojednáme v následujícím článku.

Srovnáme-li 12(4.14) s 12(4.16), vidíme, že čtvrtá komponenta čtyřvektoru hybnosti  $p_\mu$  souvisí s energií  $W$  vztahem

$$p_4 = iW/c. \quad 12(4.17)$$

V relativistické mechanice energie není skalárem, nýbrž pouze *čtvrtou složkou čtyřvektoru hybnosti*. To má závažné důsledky pro transformaci energie a hybnosti mezi dvěma Lorentzovými systémy. Tak jako je  $x'_1 = \gamma(x_1 + i\beta x_4)$ ,  $x'_4 = \gamma(x_4 - i\beta x_1)$ , je také  $p'_1 = \gamma(p_1 + i\beta p_4)$ ,  $p'_4 = \gamma(p_4 - i\beta p_1)$ , tj.

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta W/c), \quad W' = \gamma(W - \beta c p_x). \quad 12(4.18)$$

K tomu je nutno dodat  $p'_y = p_y$ ,  $p'_z = p_z$ . Zde  $V$  je rychlost referenční soustavy,  $\beta = V/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Poněvadž  $p_\mu$  je čtyřvektorem, veličina  $p_\mu p_\mu$  je skalárem. Z definice 12(4.11) a vztahu 12(4.6) plyne pro tento skalár hodnota

$$p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2. \quad 12(4.19)$$

Rozepíšeme-li  $p_\mu p_\mu = p_i p_i + p_4^2 = p^2 - (W/c)^2$ , pak přepíšeme 12(4.19) ve tvaru

$$W^2 = c^2(p^2 + m_0^2 c^2). \quad 12(4.20)$$

Vydělením rovnice 12(4.12) rovnicí 12(4.16) získáme užitečný vztah mezi rychlostí  $\mathbf{v}$ , hybností  $\mathbf{p}$  a energií  $W$  částice

$$\mathbf{p} = W\mathbf{v}/c^2. \quad 12(4.21)$$

V Newtonově mechanice definujeme složky síly  $F_i$  vztahem  $F_i = dp_i/dt$ . Relativistickým zobecněním je čtyřvektor síly

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0 \frac{du_\mu}{d\tau}. \quad 12(4.22)$$

Položíme-li  $d\tau = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt$ ,  $p_4 = iW/c$ , dostaneme pro  $\mu = j = 1, 2, 3$  a  $\mu = 4$  vyjádření

$$F_j = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (dp_j/dt), \quad F_4 = ic^{-1}(1 - v^2/c^2)^{-1/2} (dW/dt).$$

Čtvrtá složka síly tedy souvisí s časovou změnou energie. Tato souvislost nepřekvapuje, jelikož síla je časová změna hybnosti a čtvrtou složkou hybnosti je (až na numerický faktor  $i/c$ ) energie.

## 12.5 Einsteinův vztah mezi hmotností a energií

V nerelativistické fyzice byly vzájemně nezávislé zákony zachování hmotnosti a energie. Lavoisierův zákon zachování hmotnosti praví, že celková hmotnost látek do reakce vstupujících je rovna celkové hmotnosti látek z reakce vystupujících. Zákon zachování energie je nejobecnější formě vyjádřen prvním termodynamickým principem, podle něhož neexistuje zařízení (perpetuum mobile prvního druhu), které by konalo práci, aniž by se při tom měnila energie tohoto zařízení anebo energie okolních těles.

Podle Einsteinova zákona

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad 12.(5.1)$$

jsou energie  $W$  a hmotnost  $m$  každého hmotného objektu navzájem přímo úměrné, přičemž univerzální konstantou úměrnosti je kvadrát rychlosti světla ve vakuu  $c^2$ . Změna energie  $\Delta W$  má za následek odpovídající změnu hmotnosti  $\Delta m = \Delta W/c^2$  a naopak změně hmotnosti  $\Delta m$  odpovídá změna energie  $\Delta W = c^2 \Delta m$ . Kdybychom zvolili soustavu jednotek, v níž by byla rychlost světla jednotkovou ( $c = 1$ ), číselné charakteristiky  $W$  a  $m$  by byly stejné ( $W = m$ ). Uvedenému Einsteinovu vztahu se proto často říká zákon ekvivalentnosti hmotnosti a energie. Tuto terminologii nepovažujeme za vhodnou, poněvadž hmotnost a energie jsou dva různé pojmy, charakterizující dvě různé vlastnosti hmoty a liší se i rozměrově.

Každé těleso v klidu ( $v = 0$ ) má tzv. *klidovou energii*

$$W_0 = m_0 c^2. \quad 12(5.2)$$

Je poučné upravit vzorec 13(5.1) pro malé rychlosti  $v \ll c$ . Pro  $|e| \ll 1$  lze položit  $(1 - \varepsilon)^{-1/2} \cong 1 + \varepsilon/2$ . Použijeme-li tohoto přiblížení ( $\varepsilon = v^2/c^2$ ) v 12(5.1), dostaneme

$$W \cong m_0 c^2 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) = W_0 + \frac{1}{2} m_0 v^2. \quad 12(5.3)$$

Druhý člen ( $m_0 v^2/2$ ) představuje známý výraz pro kinetickou energii nerelativistické částice.



Pro ilustraci uvedeme několik číselných hodnot. Na zahřátí jednoho kilogramu vody z  $0^\circ$  na  $100^\circ\text{C}$  je nutno dodat energii  $\Delta W = 4,18 \cdot 10^5 \text{ J}$ . Tomu odpovídá přírůstek hmotnosti  $\Delta m = (\Delta W/c^2) = 5 \cdot 10^{-9} \text{ g}$ . Nákladní automobil s klidovou hmotností  $m_0 = 10^4 \text{ kg}$  se pohybuje rychlostí  $v = 20 \text{ m s}^{-1} = 72 \text{ km/hod}$ . Tomu odpovídá kinetická energie  $\Delta W = 2 \cdot 10^6 \text{ J}$  a přírůstek hmotnosti  $\Delta m = 2 \cdot 10^{-8} \text{ g}$ . Vazební energie dvouatomové molekuly je řádově  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Při sloučení  $N = 10^{24}$  atomů tomu odpovídá energie  $\Delta W = 1,6 \cdot 10^5 \text{ J}$  a změna hmotnosti  $\Delta m = 2 \cdot 10^{-9} \text{ g}$ . Z těchto příkladů je vidět, proč mohl Lavoisier objevit a formulovat zákon zachování hmotnosti nezávisle na zákonu zachování energie.

První přímý důkaz platnosti Einsteinova vztahu  $W = mc^2$  přinesla jaderná fyzika. Pečlivým měřením se zjistilo, že hmotnost všech jader je menší, než je součet hmotností všech protonů a neutronů daného jádra. Tento *hmotnostní úbytek* je zužitkován na vazební energii nukleonů v jádře.

Označíme-li  $m_{0p}$ ,  $m_{0n}$  klidové hmotnosti protonu a neutronu,  $Z$ ,  $N = A - Z$  počet protonů a neutronů,  $m_0(Z, A)$  klidovou hmotnost daného jádra, pak hmotnostní úbytek je

$$\Delta m = Zm_{0p} + (A - Z)m_{0n} - m_0(Z, A) . \quad 12(5.4)$$

Tomu odpovídá vazební energie jádra

$$\Delta W = c^2 \Delta m . \quad 12(5.5)$$

U deuteronu byl změřen rozdíl  $\Delta m = 0,002\,388 \text{ u}$ , kde atomová jednotka hmotnosti  $1 \text{ u} = 1,660\,44 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Tomuto hmotnostnímu rozdílu odpovídá energie  $\Delta W = c^2 \Delta m = 2,224 \text{ MeV}$ , což je v dokonalé shodě s experimentálně zjištěnou hodnotou vazební energie deuteronu. Obdobně je tomu u všech atomových jader.

Při procesech jaderného slučování nebo štěpení se aktivuje (uvolňuje) jenom nepatrná část (řádově jedna tisícina) celkové klidové energie (klidové hmotnosti). Existují však procesy, kdy je tato přeměna klidové energie úplná. Elektronu a pozitronu přísluší klidové hmotnosti  $m_0 = 9,109\,534 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  a klidová energie  $W_0 = 0,511\,003 \text{ MeV}$ . Při srážce pozitronu s elektronem dojde k zániku (anihilaci) těchto částic a vzniku fotonů (záření  $\gamma$ ). Energie vzniklých fotonů  $W \geq 2W_0 = 1,022 \text{ MeV}$ . (Znak  $>$  respektuje kinetickou energii elektronu a pozitronu.) Existuje také obrácený proces produkce párů: foton s energií  $W \geq 2W_0$  se může přeměnit na pár elektron + pozitron. Obdobné případy vzniku, zániku a vzájemné přeměny částic jsou zcela běžné v tzv. fyzice vysokých energií. Ve všech těchto případech je Einsteinův vztah mezi hmotností a energií i se všemi jeho důsledky zcela potvrzen.

Einsteinův vztah mezi hmotností a energií je důležitým kritériem samovolného rozpadu částic. Proilustrujeme to na případě rozpadu alfa. Hmotnost jádra

se  $Z$  protony a  $A = Z + N$  nukleony označíme  $m_0(Z, A)$ . Při rozpadu alfa je emitováno jádro  $Z - 2, A - 4$ , jehož hmotnost označíme  $m_0(Z - 2, A - 4)$ . Je-li

$$\Delta m = m_0(Z, A) - m_0(Z - 2, A - 4) - m_{0\alpha} > 0,$$

může docházet k samovolnému rozpadu alfa, přičemž energie  $c^2 \Delta m$  se použije na kinetickou energii produktů rozpadu. Obdobně postupujeme i pro jiné typy rozpadu.

Obecně, je-li  $m_0$  (klidová) hmotnost systému,  $m_{0i}$  hmotnosti jiných částic, přičemž

$$\Delta m = m_0 - \sum_i m_{0i} > 0,$$
12(5.6)

pak je samovolný rozpad energeticky možný. K tomu, aby tento rozpad opravdu nastal, musí být splněny i další podmínky: zachování hybnosti, momentu hybnosti, elektrického náboje a případných dalších veličin.

Všimněme si podrobněji samovolného rozpadu částice s klidovou hmotností  $m_0$  na dvě částice s klidovými hmotnostmi  $m_{01}, m_{02}$ . Nechť rozpadající se částice je v klidu, její energie je tedy  $W_0 = m_0 c^2$ . Samovolný rozpad je možný, když  $m_0 > m_{01} + m_{02}$ . Označíme-li  $W_1, W_2$  energie vzniklých částic, pak ze zákona zachování energie plyne

$$m_0 c^2 = W_1 + W_2.$$
12(5.7)

Při rozpadu se musí zachovávat také hybnost. Počáteční hybnost (klidové) částice byla nulová, proto hybnosti  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  produktů rozpadu jsou svázány podmínkou  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ , tj.  $p_1^2 = p_2^2$ . Energie  $W_1, W_2$  vypočteme pomocí vzorce 12(4.20), tj.

$$W_1^2 = c^2(p_1^2 + m_{01}^2 c^2), \quad W_2^2 = c^2(p_1^2 + m_{02}^2 c^2).$$

Z těchto rovnic vyloučíme  $p_1^2$ , čímž dostaneme

$$W_1^2 - m_{01}^2 c^4 = W_2^2 - m_{02}^2 c^4.$$
12(5.8)

Z rovnic 12(5.7) a 12(5.8) získáme energie vzniklých částic

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2m_0} (m_0^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2) c^2, \\ W_2 &= \frac{1}{2m_0} (m_0^2 - m_{01}^2 + m_{02}^2) c^2. \end{aligned}$$
12(5.9)

Analogicky můžeme zkoumat proces srážky dvou částic v tzv. soustavě hmotného středu (C-soustavě). Podle definic (viz čl. 6.2) je celková hybnost

částic v této soustavě nulová, tj.  $\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} = 0$ . Najdeme energii částic v této soustavě a hmotnost  $m_0$  částice, která může při takové srážce vzniknout.

Nechť v tzv. laboratorní soustavě (L-soustavě) nalétává na klidovou částici (s hmotností  $m_{02}$  a energií  $W_{02} = m_{02}c^2$ ) částice s klidovou hmotností  $m_{01}$  a energií  $W_{1L}$ . Celková energie  $W$  obou částic je v této soustavě rovna

$$W_L = W_{1L} + W_{2L} = W_{1L} + m_{02}c^2 \quad 12(5.10)$$

a celková hybnost

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{p}_{1L} + \mathbf{p}_{2L} = \mathbf{p}_{1L}.$$

Budeme-li obě částice považovat za jeden složený systém, pak rychlost  $\mathbf{v}$  této složené soustavy bude podle 12(4.21) rovna

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}_L}{W_L} = \frac{c^2 \mathbf{p}_{1L}}{W_{1L} + m_{02}c^2}. \quad 12(5.10)$$

To je rychlost pohybu soustavy hmotného středu vůči laboratorní soustavě.

Hmotnost  $m_0$  částice najdeme ze vztahu 12(4.20), tj.  $m^2 c^4 = W_L^2 - c^2 p_L^2$ . Po dosazení  $W_L = W_{1L} + m_{02}c^2$ ,  $c^2 p_L^2 = c^2 p_{1L}^2 = W_{1L}^2 - m_{01}^2 c^4$  dostaneme

$$m_0^2 c^2 = (m_{01}^2 + m_{02}^2) c^2 + 2m_{02} W_{1L}. \quad 12(5.11)$$

## Řešené úlohy

1. Na jakou rychlost je nutno urychlit elektron s klidovou hmotností  $m_0 = 9,1095 \cdot 10^{-31}$  kg, aby jeho hmotnost se rovnala klidové hmotnosti protonu  $M_0 = 1836,1515 m_0$ ?

Řešení. Z rovnice  $m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = M_0$  plyne

$$v = c(1 - m_0^2/M_0^2)^{1/2}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme  $v = 0,99998 c$ .

2. Klidový mezon  $\pi_-$  s klidovou hmotností  $m_{01} = 273 m_0$  se rozpadá na mezon  $\mu_-$  s klidovou hmotností  $m_{02} = 216 m_0$  ( $m_0$  je klidová hmotnost elektronu) a neutrino s klidovou hmotností  $m_{03} = 0$ . Vypočtěte energii mezonu  $\mu$  a neutrina.

Řešení. Energii vyjádříme pomocí 12(4.20). Ze zákona zachování hybnosti

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_2$$

a ze zákona zachování energie

$$m_{01}c^2 = W_2 + W_3 = c \left( p_2^2 + m_{02}^2 c^2 \right)^{1/2} + cp_3$$

po dosazení

$$p_3 = p_2 = c \frac{(m_{01}^2 - m_{02}^2)}{2m_{01}}$$

dostaneme

$$W_2 = \frac{(m_{01}^2 + m_{02}^2)c^2}{2m_{01}},$$
$$W_3 = \frac{(m_{01}^2 - m_{02}^2)c^2}{2m_{01}}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme  $W_2 = 106 \text{ MeV}$ ,  $W_2 - m_{02}^2 c^2 = 6 \text{ MeV}$ ,  $W_3 = 34 \text{ MeV}$ , kde  $1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ .

3. Při srážce elektronu s pozitronem vzniknou dva fotony. Určete vlnovou délku elektromagnetického záření. Energie fotonu je  $h\nu$ , kde  $\nu$  je kmitočet záření a  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$  je Planckova konstanta.

Řešení. Při velmi malé vzájemné rychlosti elektronu a pozitronu ( $v \rightarrow 0$ ) je  $2m_0c^2 = 2h\nu$ , odkud  $\lambda = h/(m_0c) = 2,435 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ .

4. Porovnejte srážkovou energii dvou stejných částic v laboratorní soustavě L a v soustavě hmotného středu C.

Řešení. V laboratorní soustavě je terčíková částice v klidu (viz kapitolu 6), na ni nalétává částice s hybností  $\mathbf{p}_{1L} = \mathbf{p}$ . Je tedy  $\mathbf{p}_{1L} + \mathbf{p}_{2L} = \mathbf{p}_{1L} = \mathbf{p}$ . Rychlost hmotného středu vypočteme ze vztahu  $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / W$ . Odtud dostaneme energii

$$W_L = W_C (1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

resp.

$$W_C = 2^{1/2} m_0 c^2 [1 + W_L / (m_0 c^2)]^{1/2}. \quad (1)$$

Pro vysoké, tzv. ultrarelativistické energie  $W_L \gg m_0 c^2$  je

$$W_L \cong \frac{W_C^2}{2m_0 c^2}. \quad (1')$$

Vztahu (1) se využívá v urychlovačích s tzv. *vstřícnými svazky*. Srážce dvou elektronů urychlených na energii  $W_C$  odpovídá v laboratorní soustavě energie  $W_L$ . Pro elektronové svazky  $W_C = 100 \text{ MeV}$ ,  $m_0c^2 \cong 0,5 \text{ MeV}$  tak získáme srážkovou energii  $W_L \cong 10^4 \text{ MeV}$ , která by byla jinak *nedosažitelná*.

5. Při nepružné srážce dvou elektronů dojde ke vzniku páru elektron – pozitron, takže v koncovém stavu jsou čtyři volné částice s klidovou hmotností  $m_0$ . Určete minimální (tzv. prahovou) energii, při níž může tento jev nastat.

Řešení. V soustavě hmotného středu je to očividně  $4m_0c^2$ . Podle vzorce (1) předešlého příkladu tomu odpovídá v laboratorní soustavě energie

$$2^{1/2}m_0c^2 [1 + W_L/(m_0c^2)]^{1/2} \geq 4 m_0c^2 .$$

Odtud získáme  $W_L \geq 7m_0c^2$ ,  $W_L - m_0c^2 \geq 6m_0c^2 \cong 3 \text{ MeV}$ .

# Matematické dodatky

## D.1 Souřadnicové systémy v rovině a v prostoru

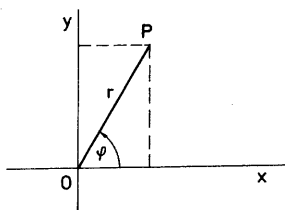
V rovině se nejčastěji užívá kartézská  $(x, y)$  a polární  $(r, \varphi)$  soustava souřadnic. Vztah mezi oběma soustavami je zřejmý z přiloženého obr. D.1:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \text{D(1.1)}$$

kde

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \text{D(1.2)}$$

je vzdálenost bodu  $P$  od počátku  $O$ , úhel  $\varphi$  leží v intervalu  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .



Obr. D.1 Polární soustava souřadnic

Rovnice křivky je určena v kartézské soustavě vztahy

$$y = f(x) \quad \text{nebo} \quad F(x, y) = 0 \quad \text{D(1.3)}$$

a obdobnými vztahy v polárních souřadnicích

$$r = r(\varphi) \quad \text{nebo} \quad \Phi(r, \varphi) = 0. \quad \text{D(1.4)}$$

Křivku lze zadat také *parametricky*. S tímto případem se setkáváme v mechanice, kdy souřadnice bodu jsou určeny jako funkce času

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{nebo} \quad r = r(t), \quad \varphi = f(t). \quad \text{D(1.5)}$$

Vyloučením parametru  $t$  přejdeme k rovnicím D(1.3) nebo D(1.4). Parametrem může být *libovolná* veličina, avšak s ohledem na aplikace budeme parametrem  $t$  rozumět *čas*.

Vzdálenost  $\Delta s$  dvou bodů  $A, B$  se souřadnicemi  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  je určena rovnicí  $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ , kde  $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$ . Přejdem k limitě dostaneme obloukový element  $ds$  křivky

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = [1 + (dy/dx)^2]^{1/2} dx. \quad \text{D(1.6)}$$

Délka oblouku křivky v intervalu  $a \leq x \leq b$  je

$$s = \int_a^b (1 + y'^2)^{1/2} dx, \quad \text{D(1.7)}$$

kde  $y' = dy/dx$ . Je-li křivka zadána parametricky, pak místo D(1.6) a D(1.7) máme

$$ds = [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2} dt, \quad \text{D(1.8)}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2} dt. \quad \text{D(1.9)}$$

Veličiny  $v_x = dx/dt, v_y = dy/dt$  jsou složky rychlosti v kartézských souřadnicích.

Ve vztazích D(1.1) budeme považovat  $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$ . Derivací pak dostaneme

$$(dx/dt) = (dr/dt) \cos \varphi - r(d\varphi/dt) \sin \varphi,$$

$$(dy/dt) = (dr/dt) \sin \varphi + r(d\varphi/dt) \cos \varphi.$$

Dosazením těchto vztahů do D(1.9) dostaneme

$$s = \int_{t_1}^{t_2} [(dr/dt)^2 + r^2(d\varphi/dt)^2]^{1/2} dt. \quad \text{D(1.10)}$$

Pro element  $ds$  a délku oblouku křivky v polárních souřadnicích tedy platí

$$ds = [(dr)^2 + (r d\varphi)^2]^{1/2} = [r^2 + (dr/d\varphi)^2]^{1/2} d\varphi, \quad \text{D(1.11)}$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [r^2 + (dr/d\varphi)^2]^{1/2} d\varphi. \quad \text{D(1.12)}$$

Veličiny  $v_r = dr/dt, v_\varphi = \omega r$  jsou *radiální a azimutální složka rychlosti*,  $\omega = d\varphi/dt$  je *úhlová rychlost*.

Výraz D(1.11) pro délku oblouku křivky má jednoduchý názorný význam. Infinitesimální element  $ds$  oblouku křivky je přeponou pravoúhlého trojúhelníku o odvěsnách  $ds_1 = dr$ ,  $ds_2 = r d\varphi$ .

Element  $dS$  plošky v rovině je v kartézských souřadnicích obdélník o stranách  $ds_1 = dx$ ,  $ds_2 = dy$ , tj.  $dS = dx dy$ . V polárních souřadnicích je  $dS = ds_1 ds_2 = r dr d\varphi$ . Je tedy

$$dS = dx dy, \quad dS = r dr d\varphi. \quad D(1.13)$$

Kartézská soustava  $x, y, z$  v trojrozměrném prostoru je znázorněna na obr. 1.1. Pro délku  $ds$  oblouku křivky máme vztah

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{1/2}. \quad D(1.14)$$

Nechť křivka je zadána parametricky

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Přirozeným zobecněním D(1.9) je vzorec pro délku oblouku prostorové křivky

$$s = \int_{t_1}^{t_2} [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2]^{1/2} dt. \quad D(1.15)$$

Veličiny  $v_x = dx/dt$ ,  $v_y = dy/dt$ ,  $v_z = dz/dt$  jsou složky rychlosti v kartézské soustavě.

Vzorec D(1.14) lze interpretovat jako tělesovou úhlopříčku pravoúhlého rovnoběžnostěnu o stranách

$$ds_1 = dx, \quad ds_2 = dy, \quad ds_3 = dz. \quad D(1.16)$$

Sférický systém souřadnic  $r, \vartheta, \varphi$  je znázorněn na obr. 1.3. Vztah mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi je dán rovnicemi

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad D(1.17)$$

přičemž

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad D(1.18)$$

V rovnicích D(1.17) budeme předpokládat parametrické zadání  $r = r(t)$ ,  $\vartheta = \vartheta(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Stejným postupem jako při odvozování D(1.9) dostaneme

$$s = \int_{t_1}^{t_2} [(dr/dt)^2 + r^2(d\vartheta/dt)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi/dt)^2]^{1/2} dt. \quad D(1.19)$$

Veličiny  $v_r = dr/dt$ ,  $v_\vartheta = r(d\vartheta/dt)$ ,  $v_\varphi = r \sin \vartheta (d\varphi/dt)$  jsou radiální, polární a azimutální složky rychlosti.



Pro element  $ds$  délky oblouku křivky pak platí

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\vartheta)^2 + (r \sin \vartheta d\varphi)^2. \quad D(1.20)$$

To je vlastně Pythagorova věta pro tělesnou úhlopříčku pravoúhlého rovnoběžnostěnu, jehož strany jsou *vzájemně kolmé* elementární obloučky

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\vartheta, \quad ds_3 = r \sin \vartheta d\varphi. \quad D(1.21)$$

Cylindrická soustava souřadnic  $\varrho, \varphi, z$  je znázorněna na obr. 1.2. Vztah ke kartézské soustavě udávají rovnice

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z, \quad D(1.22)$$

přičemž

$$\varrho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty \leq z \leq +\infty. \quad D(1.23)$$

Výpočet délky oblouku křivky je obdobný, proto uvedeme pouze výsledek

$$s = \int_{t_1}^{t_2} [(d\varrho/dt)^2 + \varrho^2(d\varphi/dt)^2 + (dz/dt)^2]^{1/2} dt. \quad D(1.24)$$

Veličiny  $v_\varrho = d\varrho/dt$ ,  $v_\varphi = \varrho(d\varphi/dt)$ ,  $v_z = dz/dt$  jsou *radiální, azimutální a axiální složky rychlosti*. Elementární ortogonální obloučky jsou

$$ds_1 = d\varrho, \quad ds_2 = \varrho d\varphi, \quad ds_3 = dz, \quad D(1.25)$$

$$(ds)^2 = (d\varrho)^2 + (\varrho d\varphi)^2 + (dz)^2. \quad D(1.26)$$

Elementární ortogonální obloučky  $ds_1, ds_2, ds_3$  se vyjadřují pomocí souřadnic  $q_1, q_2, q_3$  ve tvaru

$$ds_1 = h_1 dq_1, \quad ds_2 = h_2 dq_2, \quad ds_3 = h_3 dq_3, \quad D(1.27)$$

$$(ds)^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2. \quad D(1.28)$$

Veličiny  $h_i$  jsou tzv. *Laméovy koeficienty*. V kartézské soustavě je  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ ,  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ . Sférické soustavě odpovídá  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \vartheta$ ,  $q_3 = \varphi$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = r$ ,  $h_3 = r \sin \vartheta$ . Pro cylindrickou soustavu máme  $q_1 = \varrho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = \varrho$ ,  $h_3 = 1$ .

Z elementárních ortogonálních obloučků  $ds_i$  lze snadno sestavovat plošné elementy  $dS_j$ . Tak např. plošný element v rovině  $(x, y)$  kolmé k ose  $z$  (ose 3) je  $dS_3 = dx dy$ . Pomocí D(1.27) zapíšeme

$$\begin{aligned} dS_1 &= ds_2 ds_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3, \\ dS_2 &= ds_3 ds_1 = h_3 h_1 dq_3 dq_1, \\ dS_3 &= ds_1 ds_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad D(1.29)$$

Speciální případy si čtenář snadno odvodí. Pro účely reference uvedeme pouze plošný element  $dS$  na povrchu koule o poloměru  $r$  (tj. plošný element kolmý k poloměru)

$$dS = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi . \quad D(1.30)$$

Veličina

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi . \quad D(1.31)$$

představuje *element prostorového úhlu*.

Objemový element  $dV$  v kartézských souřadnicích můžeme vyjádřit jako objem pravoúhlého kváдру o hranách  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , tj.  $dV = dx \, dy \, dz$ . Obecně je

$$dV = ds_1 \, ds_2 \, ds_3 = h_1 h_2 h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3 . \quad D(1.32)$$

Ve sférické a cylindrické soustavě je

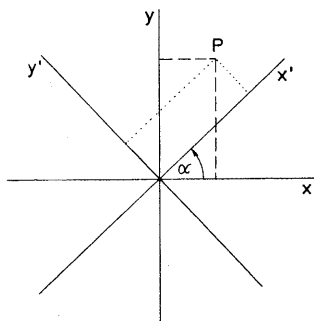
$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad dV = \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz . \quad D(1.33)$$

## D.2 Transformace souřadnicových systémů

V praxi se často setkáváme se souřadnicovými systémy, jejichž počátky jsou vůči sobě posunuty a jejichž osy jsou vzájemně pootočený. Potřebujeme znát „převodové vztahy“ mezi souřadnicemi bodu (a dalších veličin) v obou soustavách.

Nejdříve uvedeme rotaci kartézské soustavy  $(x, y, z)$  kolem osy  $z$  o úhel  $\alpha$ . Jedná se tedy o rotaci v rovině  $(x, y)$ , jak ji ilustruje obr. D.2. Jednoduchým výpočtem dostaneme vztah mezi souřadnicemi  $(x, y, z)$  a  $(x', y', z')$  bodu  $P$  v obou soustavách

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z' = z, \quad D(2.1)$$



Obr. D.2

popř. obrácenou transformaci

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \quad z = z'. \quad D(2.2)$$

Transformace D(2.1) jsou speciálním případem lineárních transformací souřadnic. Pro kompaktnější zápis zavedeme místo  $x, y, z$  označení  $x_1, x_2, x_3$ . Lineární transformaci vyjádříme rovnicí

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k. \quad D(2.3)$$

Sčítací index ( $k$ ) se zde vyskytuje právě dvakrát ( $a_{ik} x_k$ ). Výrazy podobného typu se vyskytují velmi často, proto zavedeme *Einsteinovu sumační konvenci*: vyskytnou-li se ve výrazu nějaký index právě dvakrát, budeme rozuměti sumaci přes tento index, aniž bychom vypisovali sumační znak. Místo D(2.3) tak zapíšeme

$$x'_i = a_{ik} x_k. \quad D(2.4)$$

Obdobně místo

$$\sum_{j,k} T_{jk} R_{jk}, \quad \sum_k T_{kk}$$

zapíšeme

$$T_{jk} R_{jk}, \quad T_{kk}.$$

Při násobení výrazů je nutno dbát na to, abychom v jednotlivých součinitelích použili jiné označení sumačního indexu. Kvadrát délky průvodiče je  $x'_i x'_i$ , popř.  $x_j x_j$ . V prvním faktoru  $x'_i$  položíme  $x'_i = a_{ij} x_j$  a ve druhém  $x'_i = a_{ik} x_k$  (jiné označení sumačního indexu). Z požadavku neměnnosti (invariantnosti) délky průvodiče při transformaci D(2.4) plyne

$$x'_i x'_i = a_{ij} a_{ik} x_j x_k = x_j x_j. \quad D(2.5)$$

Zavedeme *Kroneckerův symbol*

$$\delta_{jk} = 1 \quad \text{pro} \quad j = k, \quad \delta_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad j \neq k, \quad D(2.6)$$

pomocí něhož zapíšeme  $x_j x_j = \delta_{jk} x_j x_k$ , takže je

$$a_{ij} a_{ik} x_j x_k = \delta_{jk} x_j x_k.$$

Tato rovnice musí platit pro všechna  $x_j, x_k$ , což vede k podmínce pro koeficienty transformace

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \quad D(2.7)$$

Transformace, jež nemění délku průvodiče, nazveme *unitární*. V dalším budeme mít všude na mysli *pouze* takové transformace, aniž bychom to pokaždé uváděli.

Obrácenou (inverzní) transformaci k D(2.4) najdeme takto: Vynásobíme tuto rovnici  $a_{ij}$  (sčítání přes  $i$ ), což dá  $a_{ij}x'_i = a_{ij}a_{ik}x_k$ . S ohledem na D(2.7) je

$$x_j = a_{ij}x'_i. \quad \text{D(2.8)}$$

Upozorňujeme čtenáře na *jinou polohu* sčítacího indexu ve srovnání s D(2.4)

Pomocí inverzní transformace D(2.8) se snadno přesvědčíme o platnosti vztahu

$$a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}, \quad \text{D(2.9)}$$

analogického k D(2.7). Opět upozorňujeme na polohu sčítacího indexu.

Podmínce D(2.7) lze dát jednoduchou interpretaci pomocí teorie determinantů. Označíme-li  $a$  matici koeficientů  $a_{ij}$ ,  $a^T$  matici transponovanou  $a_{ij}^T = a_{ji}$ , pak D(2.7) zapíšeme ve tvaru

$$a_{ji}^T a_{ik} = \delta_{jk}. \quad \text{D(2.10)}$$

Součinem  $ab$  dvou matic je matice  $c$  s elementy

$$c_{jk} = (ab)_{jk} = a_{ji}b_{ik}. \quad \text{D(2.11)}$$

Vztahy D(2.10) jsou speciálním případem této definice. Je tedy

$$(a^T a)_{jk} = \delta_{jk}. \quad \text{D(2.12)}$$

Na pravé straně je jednotková matice, takže pro determinant platí  $\det(a^T a) = 1$ . Poněvadž hodnota determinantu se při transpozici nemění, je  $(\det a)^2 = 1$ , tj.

$$\det a = \pm 1. \quad \text{D(2.13)}$$

Rotace jsou spojitě transformace, proto při pootočení o libovolný úhel musí být hodnota D(2.13) stejná (nezávislá na úhlu rotace). Při pootočení o nulový úhel je  $a_{ij} = \delta_{ij}$ , takže

$$\det a = +1 \quad \text{při rotacích.} \quad \text{D(2.14)}$$

Při zrcadlení  $x' = -x$ ,  $y' = -y$ ,  $z' = -z$  (tj.  $x'_i = -x_i$ ) je  $a_{ij} = -\delta_{ij}$ , takže

$$\det a = -1 \quad \text{při zrcadlení.} \quad \text{D(2.15)}$$

Připomeňme si, že determinantem  $\det a$  zde rozumíme výraz

$$\det a \equiv \begin{vmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \\ - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \quad \text{D(2.16)}$$

Poznámky. Zde se omezíme na lineární transformace. Obecnější případ nelineárních transformací přesahuje rámec této učebnice.

Pro konkrétnost máme všude na mysli *trojrozměrný* prostor. Transformace D(2.4) a podmínky D(2.7) lze však snadno rozšířit i na *vícerozměrné* prostory.

### D.3 Skaláry, vektory a tenzory

*Skalárem* nazýváme takovou veličinu, která nezávisí (je invariantní) na volbě souřadnicové soustavy; číselná hodnota skalární veličiny může záviset pouze na volbě měřících jednotek. Odtud pochází také název: latinsky *scala* = stupnice. Při rotacích souřadnicové soustavy  $x'_i = a_{ij}x_j$  tedy platí

$$S(x') = S(x). \quad \text{D(3.1)}$$

Symbols  $x, x'$  označují trojice veličin  $(x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3)$ . Příklady skaláru jsou počet částic, délka průvodiče  $r^2 = x_i x_i$ .

*Vektorem*  $\mathbf{A}$  (z latinského *vector* – jezdec, nositel) nazýváme trojici veličin (komponenty vektoru)  $A_1, A_2, A_3$ , která se při transformaci souřadnic  $x'_i = a_{ij}x_j$  transformuje jako souřadnice, tj.

$$A'_i = a_{ij}A_j. \quad \text{D(3.2)}$$

*Délkou neboli absolutní hodnotou (normou) vektoru*  $\mathbf{A}$  nazýváme veličinu

$$A \equiv |\mathbf{A}| = (A_i A_i)^{1/2}. \quad \text{D(3.2')}$$

Poněvadž vektor se (podle definice) transformuje jako souřadnice, je také délka vektoru skalárem ( $A'_i A'_i = A_j A_j$ ), o čemž se lze přesvědčit i přímým výpočtem. *Jednotkový vektor* má jednotkovou délku.

Příklady vektorů jsou průvodič  $\mathbf{r}$  (polohový vektor) o složkách  $r_i \equiv x_i$ , rychlost  $\mathbf{v}$  o složkách  $v_i \equiv dx_i/dt$ , zrychlení  $\mathbf{a}$  o složkách  $a_i \equiv dv_i/dt$ , hybnost  $\mathbf{p}$  o složkách  $p_i \equiv mv_i$ .

Často se setkáváme s veličinami, které obsahují součiny komponent dvou anebo více vektorů. Příkladem mohou být výrazy typu  $x_i x_j$  v momentu setrvač-

nosti,  $x_j F_k$  v momentu síly. Potřebujeme znát transformační vlastnosti takových veličin (pro porovnání těchto veličin v různých referenčních soustavách). Necht'  $A_i, B_j$  jsou složky dvou vektorů. Součinu  $A_i B_j$  bude v nové soustavě odpovídat  $A'_i B'_j$ . Po dosazení  $A'_i = a_{ik} A_k$ ,  $B'_j = a_{jl} B_l$  máme  $A'_i B'_j = a_{ik} a_{jl} A_k B_l$ . To nás přivádí k následující definici.

*Tenzorem druhého řádu* nazýváme soubor veličin  $T_{ij}$ , které se při transformaci souřadnic  $x'_i = a_{ik} x_k$  transformují jako součiny komponent dvou vektorů, tj.

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}. \quad \text{D(3.3)}$$

Podobně tenzorem třetího řádu rozumíme soubor veličin  $T_{ijk}$ , transformují jako součiny komponent tří vektorů, tj.

$$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}. \quad \text{D(3.4)}$$

Zobecnění na tenzory vyšších řádů je očividné. Název tenzor pochází z toho, že podobnými veličinami se popisují napětí v různých prostředích (latinsky *tensio* = napětí).

Skaláry, vektory a tenzory mohou mít při stejných transformačních vlastnostech vůči rotaci různé vlastnosti vůči zrcadlení souřadnic  $x'_i = -x_i$ , proto předchozí definice vyžadují jisté upřesnění.

Veličinu  $S$ , která je invariantní jak vůči rotaci, tak vůči zrcadlení, nazýváme *pravým skalárem*. *Pseudoskalár*  $P$  je veličina  $P = P(x)$ , která je invariantní vůči rotaci, avšak při zrcadlení souřadnic  $x'_i = -x_i$  mění znaménko, tj.  $P' = -P$  (při zrcadlení). Vektor  $\mathbf{V}$ , jenž se při rotacích i při zrcadlení transformuje jako souřadnice, nazýváme *pravým neboli polárním vektorem*. *Axiálním vektorem*  $\mathbf{A}$  nazýváme takový vektor, jenž se při rotacích transformuje jako souřadnice, avšak při zrcadlení souřadnic se nemění, tj.  $\mathbf{A}' = +\mathbf{A}$  (při zrcadlení). Konkrétní příklady skalárů, pseudoskalárů, polárních i axiálních vektorů uvádíme na konci dodatku D.4.

Tenzory mohou mít různé vlastnosti symetrie vůči záměně indexů. *Symetrickým* tenzorem  $S_{ij}$  druhého řádu nazýváme tenzor, pro nějž pro všechna  $i, j$  platí  $S_{ij} = +S_{ji}$ . *Antisymetrický tenzor* je definován vztahy  $A_{ij} = -A_{ji}$  pro všechna  $i, j$ . Příkladem symetrického tenzoru je  $S_{ij} = A_i B_j + A_j B_i = S_{ji}$ , příkladem antisymetrického tenzoru je  $A_{ij} = A_i B_j - A_j B_i = -A_{ji}$ . Snadno se dokáže, že symetrie a antisymetrie nezávisí na volbě soustavy souřadnic, tj. platí-li  $S_{ij} = +S_{ji}$ ,  $A_{ij} = -A_{ji}$ , je v každé soustavě  $S'_{ij} = +S'_{ji}$ ,  $A'_{ij} = -A'_{ji}$ .

Kroneckerův symbol  $\delta_{ij}$  definovaný vztahy D(2.6) lze interpretovat jako symetrický tenzor druhého řádu. (Z definice plyne  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .) Ve shodě s definicí D(3.3) je

$$\delta'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}, \quad \text{D(3.5)}$$

takže  $\delta_{ij}$  je symetrickým tenzorem druhého řádu, jehož komponenty se při transformacích souřadnic nemění.

Poznámky. Na střední škole se vektor  $\mathbf{A}$  obvykle zapisuje ve tvaru

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 \equiv A_i\mathbf{e}_i, \quad \text{D(3.6)}$$

kde  $A_i$  jsou složky vektoru a  $\mathbf{e}_i$  (obvykle označované  $i, j, k$ ) jsou jednotkové vektory ve směru  $i$ -té osy.

Zde mluvíme o vektorech v trojrozměrném prostoru  $x_1, x_2, x_3$ . Definici D(2.4) transformace souřadnic lze rozšířit na libovolný počet  $n$  dimenzí; sčítání od 1 do 3 se nahradí sčítáním do 1 do  $n$ . Obdobně se definují vektory a tenzory ve vícerozměrných prostorech.

## D.4 Základy vektorové a tenzorové algebry

Lineární kombinací  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$  rozumíme vektor o složkách

$$C_i = \alpha A_i + \beta B_i. \quad \text{D(4.1)}$$

Zde jsou obsaženy speciální případy: násobek vektoru ( $\beta = 0, C_i = \alpha A_i$ ), sčítání a odečítání vektorů ( $\beta = +\alpha = \pm 1, C_i = A_i \pm B_i$ ). Případu  $\beta = 0, \alpha = -1$  odpovídá vektor opačný  $C_i = -A_i, C_i + A_i = 0$ . Obdobně pro tenzory  $R_{ij}, T_{ij}$  je součet a rozdíl definován rovnicemi

$$Q_{ij} = R_{ij} \pm T_{ij}. \quad \text{D(4.2)}$$

Zobecnění na lineární kombinaci je obdobné jako u vektorů.

Z definice plyne, že pro vektory a tenzory platí

$$\begin{aligned} A_i + (B_i + C_i) &= (A_i + B_i) + C_i, \\ P_{ij}(R_{kl} + T_{kl}) &= P_{ij}R_{kl} + P_{ij}T_{kl}. \end{aligned} \quad \text{D(4.3)}$$

Součin tenzoru druhého řádu  $P_{ij}$  a vektoru  $C_k$  obsahuje veličiny  $T_{ijk} = P_{ij}C_k$ . Snadno se přesvědčíme, že pro  $T_{ijk}$  platí transformační zákon D(3.4), takže  $T_{ijk}$  je tenzorem třetího řádu. Obdobně  $P_{ij}P_{kl}$  je tenzorem čtvrtého řádu. V této hierarchii vytváření tenzorů vyšších řádů lze pokračovat. Nyní si vysvětlíme obrácený postup, jímž lze z tenzorů vyšších řádů vytvářet tenzory řádu nižšího.

S prvním takovým případem jsme se již setkali, když ze složek  $x_i$  vektoru průvodiče jsme vytvořili skalár  $x_i x_i$ . To je speciální případ obecné vlastnosti tenzorů, kterou si nyní vysvětlíme.

Začneme součtem diagonálních elementů  $T_{ii} \equiv T_{11} + T_{22} + T_{33}$  (užíváme sumační konvenci – viz D.2) tenzoru druhého řádu. V novém systému souřadnic bude  $T'_{ii}$ . V definičním vztahu D(3.3) položíme  $j = i$  a uijeme D(2.7), což dá

$$T'_{ii} = a_{ik}a_{il}T_{kl} = \delta_{kl}T_{kl} = T_{kk}. \quad \text{D(4.4)}$$

Součet diagonálních elementů tenzoru druhého řádu nezávisí na volbě souřadnicové soustavy, a je tedy skalárem (invariantem). Vezmeme-li tenzor třetího řádu  $T_{ijk}$ , v němž položíme  $j = k$  (a sčítáme přes dva stejné indexy), pak z D(3.4) plyne, že veličiny  $A_i \equiv T_{ijj}$  se transformují podle vztahu

$$A'_i \equiv T'_{ijj} = a_{il}a_{jm}a_{jn}T_{lmn} = a_{il}\delta_{mn}T_{lmn} = a_{il}T_{lmn},$$

tj. ( $T_{lmn} \equiv A_l$ )

$$A'_i = a_{il}A_l.$$

Veličiny  $A_i$  se tedy transformují podle D(3.2), tj. jsou složkami vektoru.

Pro snazší formulaci získaných výsledků zavedeme následující definici. Součet přes každou dvojici stejných indexů v tenzoru  $T_{ijkl\dots}$  nazýváme *úžením* neboli *kontrakcí* tenzoru přes tuto dvojici.

Úžením tenzoru  $T_{ij}$  druhého řádu ( $T_{ii}$ ) jsme získali skalár (tenzor nultého řádu), úžením tenzoru  $T_{ijk}$  třetího řádu ( $T_{ijj}$ ) získáme vektor (tenzor prvního řádu). Jednoduchým zobecněním dospějeme k následující větě.

*Každé úžení tenzoru snižuje řád tenzoru o dvě.*

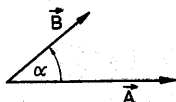
Přejdeme k některým důležitým případům tohoto teoremu. Nechť tenzor  $T_{ij}$  je součinem komponent dvou vektorů, tj.  $T_{ij} = A_iB_j$ . Ve shodě s D(4.4) platí

$$A'_iB'_i = A_kB_k. \quad \text{D(4.5)}$$

Ze dvou vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  jsme tak vytvořili skalár, proto součin  $A_kB_k$  nazýváme *skalárním součinem* dvou vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  a značíme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \mathbf{AB} \equiv A_kB_k. \quad \text{D(4.6)}$$

Pokud to nepovede k nejasnostem, budeme tečku označující skalární součin vynechávat.



Obr. D.3 Skalární součin dvou vektorů



Definice D(4.6) je totožná s obvyklou definicí skalárního součinu dvou vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  jako součinu absolutních hodnot těchto vektorů a kosinu úhlu mezi těmito vektory (viz obr. D.3)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \mathbf{AB} = AB \cos \alpha, \quad \text{D(4.7)}$$

kde

$$A \equiv |\mathbf{A}| \equiv (A_i A_i)^{1/2}, \quad B \equiv |\mathbf{B}| \equiv (B_j B_j)^{1/2}$$

jsou (viz D(3.2')) délky příslušných vektorů. Zapišeme-li vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  podle definice D(3.6), tj.  $\mathbf{A} = a_j \mathbf{e}_j$ ,  $\mathbf{B} = B_k \mathbf{e}_k$  a užijeme-li ortogonálnosti vektorové báze ( $\alpha_{jk}$  je úhel mezi  $\mathbf{e}_j$  a  $\mathbf{e}_k$ )

$$\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \cos \alpha_{jk} = \delta_{jk}. \quad \text{D(4.8)}$$

dostaneme

$$\mathbf{AB} = (A_j \mathbf{e}_j) (B_k \mathbf{e}_k) = A_j B_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = A_j B_k \delta_{jk} = A_k B_k.$$

Z definice D(4.6), popř. D(4.7) je zřejmé ( $\cos \alpha$  je sudou funkcí), že záměna pořadí vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  při skalárním násobení nemá vliv na hodnotu skalárního součinu. Skalární součin dvou vektorů je *komutativní operací*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}. \quad \text{D(4.9)}$$

Dále platí distributivní zákon

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \quad \text{D(4.10)}$$

Pro dva vzájemně kolmé vektory  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$  platí  $\mathbf{AB} = 0$ .

Ze dvou tenzorů druhého řádu  $R_{ij}$  a  $T_{kl}$  lze vytvořit tenzor čtvrtého řádu  $R_{ij} T_{kl}$ . Dvojím úžením ( $i = k, j = l$ ) dostaneme skalár (tenzor nultého řádu)

$$R_{ij} T_{ij} = R'_{ij} T'_{ij} = \text{skalár (invariant)}. \quad \text{D(4.11)}$$

Ve speciálním případě  $R_{ij} = T_{ij}$  dostaneme, že součet kvadrátů všech komponent tenzoru druhého řádu je skalár (invariant)

$$T_{ij} T_{ij} = \text{skalár (invariant)}. \quad \text{D(4.11')}$$

Z tenzoru druhého řádu lze tedy vytvořit dva nezávislé invarianty: lineární  $T_{ii}$  a kvadratický  $T_{ij} T_{ij}$ . Snadno se dokáže, že všechny ostatní invarianty tohoto tenzoru jsou funkcí těchto dvou základních invariantů.

Tenzor  $T_{ij}$  druhého řádu má (v trojrozměrném prostoru)  $3^2 = 9$  nezávislých komponent. Symetrický tenzor  $T_{ij} = T_{ji}$  má  $9 - 3 = 6$  nezávislých komponent. Vhodnou transformací  $T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$  lze vyloučit (anulovat) nediagonální komponenty ( $T'_{12} = T'_{21} = T'_{13} = T'_{31} = T'_{23} = T'_{32} = 0$ ), takže zby-

dou pouze diagonální komponenty  $T'_{11}, T'_{22}, T'_{33}$ . Těto proceduře se říká *diagonalizace nebo redukce tenzoru k hlavním osám*; diagonální komponenty jsou hlavní hodnoty tenzoru.

Pro další účely je výhodné definovat znaménkovou funkci

$$\text{Sign } \alpha = \begin{cases} +1 & \text{pro } \alpha > 0 \\ -1 & \text{pro } \alpha < 0 \\ 0 & \text{pro } \alpha = 0. \end{cases} \quad \text{D(4.12)}$$

Pomocí této funkce definujeme tzv. *permutační symbol (zvaný též Levi-Civitaův nebo Ricciův symbol)*

$$e_{ijk} = \text{Sign} [(j - i)(k - i)(k - j)]. \quad \text{D(4.13)}$$

Je-li  $e_{ijk} = +1$ , mluvíme o sudé permutaci, při  $e_{ijk} = -1$  o liché permutaci indexů  $i, j, k$ . Z definice je zřejmé, že jediné nenulové hodnoty  $e_{ijk}$  jsou  $\pm 1$  při  $i \neq j \neq k$ , přičemž  $e_{ijk} = +1$  při sudé a  $e_{ijk} = -1$  při liché permutaci indexů  $i \neq j \neq k$ . Jsou-li alespoň dva indexy stejné, je  $e_{ijk} = 0$ . Z definice D(4.13) je vidět, že  $e_{ijk}$  je antisymetrické vůči záměně libovolné dvojice indexů, např.  $e_{ijk} = -e_{jik} = -e_{ikj}$ .

Symbol  $e_{ijk}$  lze interpretovat jako úplně antisymetrický tenzor třetího řádu. Vezmeme-li  $i = 1, j = 2, k = 3$ , pak ve shodě s D(4.13) je  $e_{123} = +1$ ; pro  $e'_{123}$  poskytne D(3.4) vyjádření  $e'_{123} = a_{11}a_{22}a_{33}e_{lmn}$ . Snadno se přesvědčíme, že pravá strana této rovnice je  $\det a$  (viz D(2.16)), tj.  $e'_{123} = \det a$ . Při rotacích (viz D(2.14)) je  $\det a = +1$ , takže je také  $e'_{123} = +1 = e_{123}$ . Při zrcadlení (viz D(2.15)) je  $\det a = -1$ ,  $e'_{123} = -1$ . Pro ostatní kombinace indexů  $i, j, k$  je rozbor stejný; výsledek zní

$$e'_{ijk} = +e_{ijk} \quad \text{při rotacích,} \quad \text{D(4.14)}$$

$$e'_{ijk} = -e_{ijk} \quad \text{při zrcadlení.} \quad \text{D(4.15)}$$

Symbol  $e_{ijk}$  je tedy úplně antisymetrickým tenzorem třetího řádu, přičemž komponenty tohoto tenzoru se při rotacích nemění a při zrcadlení mění znaménko. Tenzorového charakteru symbolu  $e_{ijk}$  s výhodou využijeme v dalším výkladu.

Ze dvou vektorů  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  o složkách  $A_j, B_k$  lze vytvořit antisymetrický tenzor druhého řádu

$$T_{jk} \equiv A_j B_k - A_k B_j = -T_{kj}. \quad \text{D(4.16)}$$

Tenzorový charakter je zřejmý z toho, že se jedná o součiny komponent dvou vektorů, antisymetrie je zřejmá z definice. Diagonální elementy ( $j = k$ ) jsou nulové, ze šesti nediagonálních komponent jsou nezávislé tři, za něž vezmeme

$$\begin{aligned} C_1 \equiv T_{23} &= A_2 B_3 - A_3 B_2, & C_2 \equiv T_{31} &= A_3 B_1 - A_1 B_3, \\ C_3 \equiv T_{12} &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \quad \text{D(4.17)}$$

Pomocí symbolu  $e_{ijk}$  zapíšeme tyto vztahy jednoduše

$$C_i = e_{ijk} A_j B_k . \quad D(4.18)$$

Pro ilustraci „mechanismu“ tohoto zápisu uvedeme  $C_1 = e_{ijk} A_j B_k$ . Nenulové jsou pouze členy  $e_{123} = +1$  a  $e_{132} = -1$ , což dá  $C_1 = A_1 B_2 - A_2 B_1$ .

Ze zápisu D(4.18) je okamžitě vidět, že  $C_i$  představuje složky vektoru. Poněvadž  $e_{ijk}$  je tenzorem třetího řádu a  $A_j B_k$  tenzorem druhého řádu, jedná se o dvojitý úžetí, což dá tenzor prvního řádu – vektor. Máme tak způsob, jak ze součinu dvou vektorů vytvořit nový vektor. Vlastnosti tohoto nového vektoru se snadno odvodí z jeho definice. Z D(4.17) okamžitě plyne

$$A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3 \equiv A_i C_i \equiv \mathbf{A} \mathbf{C} = 0 , \quad D(4.19)$$

$$B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3 \equiv B_i C_i \equiv \mathbf{B} \mathbf{C} = 0 , \quad D(4.20)$$

což značí, že vektor  $\mathbf{C}$  je *kolmý* jak na vektor  $\mathbf{A}$ , tak na vektor  $\mathbf{B}$ , a tudíž je kolmý na *rovinu* vytvořenou vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{C} \perp \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C} \perp \mathbf{B}$ ). Pro délku vektoru  $\mathbf{C}$  dostaneme

$$C^2 \equiv C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = A^2 B^2 - (A_i B_i)^2 .$$

Jelikož  $A_i B_i = AB \cos \alpha$  je skalárním součinem, bude

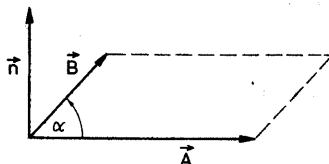
$$C^2 = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \alpha) = A^2 B^2 \sin^2 \alpha .$$

Délka  $C$  vektoru  $\mathbf{C}$  je tedy  $C = AB \sin \alpha$ . Zbývá určit orientaci normály  $\mathbf{n}$  k rovině vytvořené vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  (viz obr. D.4).

V pravotočivé vázi volíme orientaci vektoru  $\mathbf{n}$  tak, aby vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{n}$  tvořily pravotočivou bázi: točíme pravotočivým šroubem po kratší cestě od prvního vektoru ( $\mathbf{A}$ ) k druhému vektoru ( $\mathbf{B}$ ); směr pohybu šroubu přitom udává orientaci vektoru  $\mathbf{n}$ .

Takto definovaný *vektorový součin* dvou vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  budeme značit některým z těchto způsobů:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = AB \sin \alpha \mathbf{n} . \quad D(4.21)$$



Obr. D.4 Vektorový součin dvou vektorů

Záměnou pořadí vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  se mění i orientace vektorového součinu

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} . \quad \text{D(4.22)}$$

Pokud jsou oba vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  nenulové, pak z rovnice  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$  plyne *rovnoběžnost* ( $\sin \alpha = 0$ ) vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ .

Vektorový součin definuje plochu rovnoběžníku vytvořeného vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ; orientace vektoru  $\mathbf{n}$  určuje (definitoricky) orientaci této plochy. V geometrii je plocha vektorem, jenž kromě absolutní hodnoty má orientaci ve směru normály k této ploše. (U zakřivených ploch se orientace plošného elementu mění s jeho polohou.)

Pro účely reference uvedeme vektorové součiny jednotkových vektorů  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3(i, j, k)$  ortogonální báze

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 , \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 , \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 . \quad \text{D(4.23)}$$

Zapišeme-li vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  pomocí této ortogonální báze

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 , \quad \mathbf{B} = B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3$$

a pak ve vektorovém součinu  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  užijeme distributivnosti a vztahů D(4.23), dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{e}_1 + \\ &+ (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{e}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{e}_3 . \end{aligned} \quad \text{D(4.24)}$$

S příklady na užití vektorového součinu se čtenář seznámí v různých oborech fyziky. Zde uvedeme pouze moment síly  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  a moment hybnosti  $\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

Skalární a vektorový součin vektorů lze různě kombinovat. Zde se budeme zabývat tzv. smíšeným součinem

$$S \equiv \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] .$$

Poněvadž  $\mathbf{B} \times \mathbf{C} \equiv \mathbf{D}$  představuje (orientovanou) plochu rovnoběžníku, pak skalární součin  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$  představuje objem rovnoběžnostěnu sestaveného z vektorů  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ . (Objem rovnoběžnostěnu vyjádříme jako součin obsahu základny a výšky.) Po těchto poznámkách přejdeme k výpočtu smíšeného součinu. Použijeme-li vyjádření skalárního a vektorového součinu  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = A_i D_i$ ,  $D_i = e_{ijk} B_j C_k$ , dostaneme

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = e_{ijk} A_i B_j C_k . \quad \text{D(4.25)}$$

Výsledek lze zapsat také pomocí determinantu

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad \text{D(4.26)}$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že smíšený součin se nemění při cyklické permutaci

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{A}] = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]. \quad \text{D(4.27)}$$

Je-li  $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = 0$ , pak vektory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  leží v jedné rovině, vektory jsou komplanární, objem rovnoběžnostěnu je nulový.

Dvojitý vektorový součin

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$$

vypočteme nejnázve takto: Vezmeme třetí komponentu

$$\begin{aligned} D_3 &= A_1[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]_2 - A_2[\mathbf{B} \times \mathbf{C}]_1 = \\ &= A_1[B_3C_1 - B_1C_3] - A_2[B_2C_3 - B_3C_2] = \\ &= B_3(A_1C_1 + A_2C_2) - C_3(A_1B_1 + A_2B_2). \end{aligned}$$

V posledním výrazu na pravé straně přidáme a odečteme  $A_3B_3C_3$ , což dá  $D_3 = (\mathbf{AC})B_3 - (\mathbf{AB})C_3$ . Provedeme-li totéž pro zbývající komponenty, dostaneme

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = (\mathbf{AC})\mathbf{B} - (\mathbf{AB})\mathbf{C}. \quad \text{D(4.28)}$$

Vektorový součin  $\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$  leží v rovině vytvořené vektory  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ .

Vzorci D(4.28) lze užít k rozkladu vektoru  $\mathbf{B}$  na dvě části, z nichž jedna je paralelní a druhá kolmá k vektoru  $\mathbf{A}$ . Ve vzorci D(4.28) položíme  $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ , což dá

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{A}] = A^2\mathbf{B} - (\mathbf{AB})\mathbf{A}.$$

Odtud plyne

$$\mathbf{B} = (\mathbf{aB})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{a}], \quad \text{D(4.29)}$$

kde  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{A}/A$  je jednotkový vektor ve směru vektoru  $\mathbf{A}$ . Člen  $(\mathbf{aB})\mathbf{a}$  představuje složku paralelní s  $\mathbf{A}$ , člen  $\mathbf{a} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{a}]$  složku kolmou k  $\mathbf{A}$ . Tím je úloha řešena.

Odvození následujících dvou vztahů je v příložených úlohách

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}] = (\mathbf{AC})(\mathbf{BD}) - (\mathbf{AD})(\mathbf{BC}), \quad \text{D(4.30)}$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \times [\mathbf{C} \times \mathbf{D}] = (\mathbf{A} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}])\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}])\mathbf{A}. \quad \text{D(4.31)}$$

Nyní již můžeme uvést slíbené příklady (viz konec dodatku D.3) pravých skalárů, pseudoskalárů, polárních a axiálních vektorů. Polohový vektor  $\mathbf{r}$ , rychlost  $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{r}/dt$ , hybnost  $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ , vektor  $\mathbf{F} \equiv d\mathbf{p}/dt$  se očividně transformují jako souřadnice jak při rotacích, tak při zrcadlení, a jsou tedy polárními vektory. Naproti tomu vektorový součin dvou polárních vektorů se však při zrcadlení nemění, a je tedy axiálním vektorem. Příkladem mohou být moment hybnosti  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  a moment síly  $\mathbf{M} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Skalární součin dvou polárních nebo dvou axiálních vektorů se nemění ani při zrcadlení, takže je pravým skalárem. Naproti tomu skalární součin polárního a axiálního vektoru (např.  $\mathbf{M}\mathbf{v}$ ) mění při zrcadlení znaménko, a je tedy pseudoskalárem.

## D.5 Základy vektorové a tenzorové analýzy

Derivaci  $df/dx$  funkce  $f = f(x)$  jedné proměnné definujeme známým způsobem

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

V případě funkce více proměnných, např.  $f = f(x, y, z)$ , definujeme tzv. parciální derivace  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$ ,  $\partial f/\partial z$  analogicky jako u funkce jedné proměnné

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}. \end{aligned} \quad \text{D(5.1)}$$

Geometrický nebo fyzikální význam parciálních derivací je v tom, že např. derivace  $\partial f/\partial x$  určuje rychlost změny veličiny (funkce)  $f = f(x, y, z)$  při pohybu podél osy  $x$ . (Obdobný význam mají zbývající parciální derivace  $\partial f/\partial y$ ,  $\partial f/\partial z$ .) Derivace vyšších řádů, např.  $\partial^2 f/\partial x^2$ ,  $\partial^2 f/\partial x \partial y$  se definují ve shodě s definicí D(5.1).

Veličiny  $(\partial f/\partial x) dx$ ,  $(\partial f/\partial y) dy$ ,  $(\partial f/\partial z) dz$  představují parciální diferenciály funkce  $f(x, y, z)$ . Výraz

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad \text{D(5.2)}$$

neboli v číslování os  $(x, y, z) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$  a sumační konvenci

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \text{D(5.3)}$$

je úplným neboli totálním diferenciálem funkce  $f(x_1, x_2, x_3)$ . Mějme skalární funkci

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) = f(x_1, x_2, x_3). \quad \text{D(5.4)}$$

Pro úplné diferenciály v proměnných  $x'_i, x_j$  platí

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} dx'_i = \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j. \quad \text{D(5.5)}$$

Ze vzorce D(2.8) plyne

$$dx_j = a_{ij} dx'_i \quad \text{D(5.6)}$$

a pak po dosazení do D(5.5) dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} dx'_i = a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx'_i.$$

Porovnáním koeficientů u  $dx'_i$  získáme transformační zákon derivací

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad \text{D(5.7)}$$

Parciální derivace  $A_j \equiv \partial f / \partial x_j$  se tedy transformují podle vztahu D(3.2), takže představují složky vektoru. Tento vektor nazýváme *gradient* a značíme buď  $\text{grad } f$ , nebo  $\nabla f$  (čteme nabra  $f$ ), tj.

$$\text{grad } f \equiv \nabla f \equiv \mathbf{e}_j \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad \text{D(5.8)}$$

Symbolický operátor nabra je

$$\text{grad} \equiv \nabla \equiv \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad \text{D(5.8')}$$

Označení gradient pochází z latinského *gradiens* = stoupající, název symbolu  $\nabla$  má svůj původ v podobnosti se starým hudebním nástrojem nabra. Úplný diferenciál D(5.3) můžeme vyjádřit skalárním součinem

$$df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f \equiv d\mathbf{r} \cdot \text{grad } f. \quad \text{D(5.9)}$$

Promítneme-li vektor  $\nabla f$  do směru charakterizovaného jednotkovým vektorem  $\mathbf{v}$ , pak veličina

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cos \alpha_i \quad \text{D(5.10)}$$

je derivace skalární funkce  $f$  ve směru  $\mathbf{v}$ . Přitom  $\cos \alpha_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$  jsou kosiny úhlů mezi směrem  $\mathbf{v}$  a bázovými vektory  $\mathbf{e}_i$ .

Derivace  $\partial f / \partial x_i$  představují složky gradientu v kartézské soustavě. Použijeme-li označení  $ds_1 = h_1 dq_1$ ,  $ds_2 = h_2 dq_2$ ,  $ds_3 = h_3 dq_3$  pro elementární obloučky v křivočaré ortogonální soustavě  $q_1, q_2, q_3$  (viz D(1.27)), pak složky gradientu definujeme vztahy

$$\text{grad}_i f = \frac{\partial f}{\partial s_i} \quad \text{D(5.11)}$$

Pro účely reference uvedeme složky gradientu ve sférických  $(r, \vartheta, \varphi)$  a cylindrických  $(\rho, \varphi, z)$  souřadnicích

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \quad \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{D(5.12)}$$

Nyní přejdeme k nalezení transformačních vlastností parciálních derivací složek vektorů. Pro úplný diferenciál  $l$ -té složky  $A_l$  máme analogicky k D(5.3) vyjádření

$$dA_l = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} dx_k \quad \text{D(5.13)}$$

a obdobně pro  $A'_j$  v čárkovaných souřadnicích

$$dA'_j = \frac{\partial A'_j}{\partial x'_i} dx'_i \quad \text{D(5.14)}$$

Z transformačního zákona  $A'_j = a_{jl} A_l$  plyne  $dA'_j = a_{jl} dA_l$ , což ve spojení s D(5.13) dá

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'_i} dx'_i = a_{jl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} dx_k$$



Dosadíme-li ještě  $dx_k = a_{ik} dx'_i$ , dostaneme

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'_i} dx'_i = a_{ik} a_{jl} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} dx'_i.$$

Parciální derivace vektoru

$$T_{kl} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} A_l, \quad T'_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x'_i} A'_j \quad \text{D(5.15)}$$

se tedy transformují podle vztahu

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}, \quad \text{D(5.16)}$$

takže ve shodě s definicí D(3.3) jsou to složky *tenzoru druhého řádu*. Obdobně najdeme, že parciální derivace  $R_{ijk} \equiv \partial T_{jk} / \partial x_i$  tenzoru druhého řádu jsou tenzorem třetího řádu. V této hierarchii lze pokračovat.

Přejdeme k některým důležitým speciálním případům. Je-li vektor  $\mathbf{A}$  gradientem skalární funkce  $\mathbf{A} = \nabla f$ ,  $A_j = \partial f / \partial x_j$ , pak  $\partial A_j / \partial x_i$ , tj.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{D(5.17)}$$

je symetrickým tenzorem druhého řádu. (Symetrie plyne ze záměnnosti pořadí derivací.)

Úžením tenzoru druhého řádu (viz D.4) získáme skalár. Speciálně pro D(5.17) úžení dá

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \equiv \nabla^2 f, \quad \text{D(5.18)}$$

kde

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{D(5.19)}$$

je *Laplaceův operátor*, který lze zapsat jako kvadrát operátoru nabla ( $\nabla$ ). V literatuře se užívá též označení  $\Delta$ . Jelikož symbol  $\Delta$  se užívá pro diferenci, dáváme přednost označení  $\nabla^2$ .

Jiný příklad úžení dostaneme tak, že v D(5.15) položíme  $k = l$ ,  $j = i$ . Jelikož  $T'_{ii} = T_{kk}$ , je také

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i} = \text{skalár}. \quad \text{D(5.20)}$$

Výraz  $\partial A_k / \partial x_k$  můžeme vyjádřit jako skalární součin a nazýváme jej *divergence vektoru  $\mathbf{A}$*  a značíme

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad \text{D(5.21)}$$

Označení divergence pochází z toho, že výrazy tohoto typu se vyjadřuje intenzita vytékání tekutiny, elektrického náboje, apod. (Latinsky *divergens* = rozbíhající se.) Operace *div* souvisí s Laplaceovým operátorem. Je-li  $\mathbf{A} = \operatorname{grad} f$ ,  $A_k = \partial f / \partial x_k$ , pak

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \equiv \nabla^2 f. \quad \text{D(5.22)}$$

Vezmeme nyní antisymetrický tenzor vytvořený z derivací vektoru

$$F_{jk} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} A_k - \frac{\partial}{\partial x_k} A_j \equiv -F_{kj}. \quad \text{D(5.23)}$$

Z dodatku D.4 víme, že z antisymetrického tenzoru lze vytvořit vektor  $\mathbf{C}$  o složkách

$$\begin{aligned} C_1 \equiv F_{23} &\equiv \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, & C_2 \equiv F_{31} &\equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \\ C_3 \equiv F_{12} &\equiv \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}, \end{aligned} \quad \text{D(5.24)}$$

neboli

$$C_i \equiv e_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}. \quad \text{D(5.25)}$$

Všimněme si fyzikálního významu tohoto vektoru. Nechť  $\mathbf{A} = \mathbf{v}$  je vektor rychlosti proudění tekutiny. Veličina  $\partial v_y / \partial x$  určuje růst  $y$ -ové složky rychlosti podél  $x$ -ové osy, obdobně  $\partial v_x / \partial y$  představuje růst  $x$ -ové složky rychlosti podél  $y$ -ové osy. Rozdíl těchto dvou veličin popisuje rotaci (víření) tekutiny v rovině  $x, y$ . Odtud také pochází označení tohoto vektoru – *rotace*, zkratkou *rot  $\mathbf{A}$* . V anglické literatuře se dodnes používá původního označení *Curl  $\mathbf{A}$*  (anglicky *curl* = vír).

Zavedeme vektor *rot  $\mathbf{A}$*  o složkách

$$\operatorname{rot}_i \mathbf{A} \equiv (\operatorname{rot} \mathbf{A})_i \equiv e_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}, \quad \text{D(5.26)}$$

takže je

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_1 \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{e}_3 \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right). \quad \text{D(5.27)}$$

Pomocí operátoru  $\nabla$  zapíšeme  $\text{rot } \mathbf{A}$  ve tvaru vektorového součinu

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \quad \text{D(5.28)}$$

Je-li  $\mathbf{A} = \text{grad } f$ , tj.  $A_i = \partial f / \partial x_i$ , pak s ohledem na D(5.17) je  $(\partial A_j / \partial x_k) \equiv (\partial A_k / \partial x_j)$ , takže platí vektorová identita

$$\text{rot grad } f \equiv 0. \quad \text{D(5.29)}$$

Snadno se také přesvědčíme o platnosti identity

$$\text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0. \quad \text{D(5.30)}$$

Závěrem *naznačíme* důkaz dvou důležitých teorémů, které se vyskytují v mnoha oblastech matematiky a fyziky.

Integrál přes uzavřenou plochu  $\mathbf{S}$

$$\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{S} \equiv \oint A_i \, dS_i \equiv \oint (A_x \, dS_x + A_y \, dS_y + A_z \, dS_z) \quad \text{D(5.31)}$$

nazveme *tokem vektoru*  $\mathbf{A}$  plochou  $\mathbf{S}$ . (Integrály tohoto typu se popisuje proudění tekutin, energie apod.; odtud název tok.) Rozdíl toku složky  $A_x$  mezi ploškami  $dS_x = dz \, dy$  postavenými mezi  $(x + dx, y, z)$  a  $(x, y, z)$  je

$$[A_x(x + dx, y, z) - A_x(x, y, z)] \, dy \, dz.$$

Podobně jako je  $f(x + dx) - f(x) = (df/dx) \, dx$ , je také

$$A_x(x + dx, y, z) - A_x(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} \, dx.$$

Rozdíl toku je tak  $(\partial A_x / \partial x) \, dx \, dy \, dz = (\partial A_x / \partial x) \, dV$ , kde  $dV = dx \, dy \, dz$  je objemový element. Obdobně upravíme členy  $A_y \, dS_y$  a  $A_z \, dS_z$ .

Výsledkem těchto úprav je *Gaussova věta*

$$\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \int \text{div } \mathbf{A} \, dV, \quad \text{D(5.32)}$$

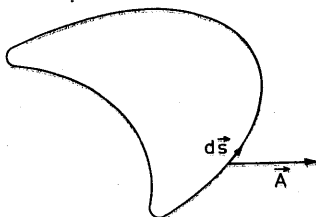
kteřá převádí integrál přes *uzavřenou plochu* na integrál přes *objem* vytvořený touto uzavřenou plochou. Přepíšeme-li  $\mathbf{A} \, d\mathbf{S} = A_j \, dS_j$ ,

$\text{div } \mathbf{A} = (\partial A_j / \partial x_j)$ , můžeme Gaussovu větu vyjádřit v „mnemotechnickém tvaru“

$$\oint dS_j (\dots) = \int dV \frac{\partial}{\partial x_j} (\dots) . \quad \text{D(5.33)}$$

Je-li v D(5.31) místo vektoru tenzor, pak je

$$\oint dS_j T_{ij} = \int dV \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} . \quad \text{D(5.34)}$$



Obr. D.5 Cirkulace vektoru podél křivky

Cirkulací  $\Gamma$  vektoru  $\mathbf{A}$  podél uzavřené křivky  $\mathbf{s}$  nazýváme integrál (viz obr. D.5)

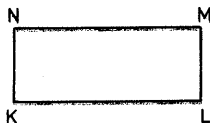
$$\Gamma \equiv \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{s} \equiv \oint (A_x \, ds_x + A_y \, ds_y + A_z \, ds_z) . \quad \text{D(5.35)}$$

Vezmeme křivku (viz obr. D.6) ve tvaru obdélníku  $KLMN$  ležícího v rovině  $(x, y)$ . V takovém případě bude  $ds_x = dx$ ,  $ds_y = dy$ ,  $ds_z = 0$ , takže se jedná o integrál

$$\Gamma = \oint (A_x \, dx + A_y \, dy) .$$

Souřadnice bodů necht' jsou  $K(x, y, z)$ ,  $L(x + dx, y, z)$ ,  $M(x + dx, y + dy, z)$ ,  $N(x, y + dy, z)$ . Cirkulace  $A_x$  na úsecích  $KL$  a  $MN$  je

$$[A_x(x, y, z) - A_x(x, y + dy, z)] \, dx = - \frac{\partial A_x}{\partial y} \, dy \, dz .$$



Obr. D.6

Použili jsme rozvoje  $A_x(x, y + dy, z) = A_x(x, y, z) + (\partial A_x / \partial y) dy$ . Obdobně dostaneme pro úseky  $LM$  a  $NK$

$$[A_y(x + dx, y, z) - A_y(x, y, z)] dy = \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy.$$

Je tedy

$$\Gamma = \int \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] dS_z, \quad \text{D(5.36)}$$

kde  $dS_z = dx dy$  je element plošky v rovině  $(x, y)$  a integrál se bere přes plochu vytvořenou uzavřenou křivkou  $\mathbf{s}$ . Podle D(5.27) je integrand třetí ( $z$ -ovou) složkou vektoru  $\text{rot } \mathbf{A}$ .

V případě obecně orientované prostorové křivky platí *Stokesova věta*

$$\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \int \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{S}, \quad \text{D(5.37)}$$

kteřá převádí integrál po uzavřené křivce na integrál přes plochu vytvořenou touto uzavřenou křivkou.

Ve speciálním případě, kdy  $\mathbf{A}$  je gradientem skalární funkce  $f$ ,  $\mathbf{A} \equiv \text{grad } f$ , pak ve shodě s identitou D(5.29) je  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  a cirkulace takového vektoru po libovolné uzavřené křivce je rovna nule

$$\oint \text{grad } f \cdot d\mathbf{s} \equiv 0. \quad \text{D(5.38)}$$

Snadno se dokáže také obrácené tvrzení: je-li  $\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = 0$ , pak  $\mathbf{A} = \text{grad } f$ . Významnou aplikací tohoto teorému je práce  $\oint \mathbf{F} \, d\mathbf{s}$  vykonaná silou  $\mathbf{F}$  po uzavřené křivce. Je-li tato práce nulová při libovolné uzavřené křivce (dráze), pak je nutně vektor síly  $\mathbf{F}$  gradientem jisté skalární funkce ( $f = -U$ , kde  $U$  je potenciální energie)  $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ . Vektory  $\mathbf{A}$  typu  $\mathbf{A} = \text{grad } f$  se proto nazývají potenciální nebo nevírové.

## Řešené úlohy

1. Ukažte, že rovnici elipsy lze vyjádřit v parametrickém tvaru  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ .

Řešení. Z vyjádření plyne známý tvar rovnice elipsy

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1.$$

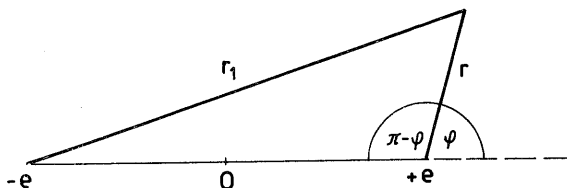
2. Ukažte, že rovnici hyperboly  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$  lze zapsat v parametrickém tvaru

$$x = \frac{a}{2} (e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{b}{2} (e^t - e^{-t}).$$

Řešení. Ziská se přímým dosazením.

3. Najděte rovnici elipsy a hyperboly v polárních souřadnicích.

Řešení. Elipsa je geometrickým místem bodů, jež mají stálý součet vzdáleností od dvou pevných bodů (ohnisek). Tyto dva pevné body zvolíme na ose  $x$  (symet-



Obr. D.7

ricky kolem počátku) se souřadnicemi  $\pm e$ . Průvodič  $r$  povedeme z ohniska  $+e$ . Součet vzdáleností  $r + r_1 = 2a$ . Z přiloženého obr. D.7 plyne

$$r_1^2 = (2e)^2 + r^2 - 2r(2e) \cos(\pi - \varphi).$$

Po dosazení do  $r + r_1 = 2a$  dostaneme hledaný výsledek

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

kde  $p = b^2/a$ ,  $b = (a^2 - e^2)^{1/2}$ ,  $\varepsilon = e/a$ .

Pro hyperbolu je konstantní rozdíl  $|r_1 - r_2| = 2a$ . Výsledkem je rovnice

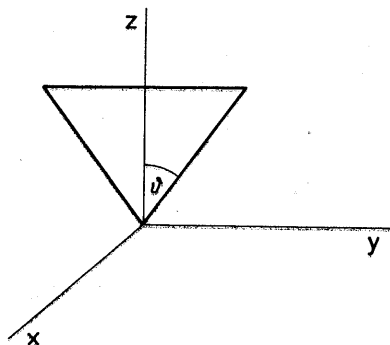
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)}, \quad p = b^2/a, \quad b = (e^2 - a^2)^{1/2}.$$

4. Vyšetřete plochu  $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ .

Řešení. Jedná se o ohraničenou plochu  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ ,  $|z| \leq c$ . Zvolíme  $z = z_0$  (rovina), pak dostaneme  $(x/a')^2 + (y/b')^2 = 1$ , kde  $a' = a(1 - z_0^2/c^2)^{1/2}$ ,  $b' = b(1 - z_0^2/c^2)^{1/2}$ . Průsečíky roviny  $z = z_0$  s danou plochou jsou elipsy s poloosami  $a'$ ,  $b'$ . Obdobně postupujeme pro roviny  $x = x_0$  a  $y = y_0$ . Plocha je elipsoid.

5. Najděte rovnici kužele.

Řešení. Kužel s rozvorovým úhlem  $2\vartheta$  je (viz obr. D.8) určen podmínkou  $\cos \vartheta = z/r$ . Odtud po úpravě dostaneme  $x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta = 0$ .



Obr. D.8

6. Dokažte vztahy D(4.30) a D(4.31).

Řešení. Rozepíšeme skalární součin

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}] = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_1 [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]_1 + [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_2 [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]_2 + [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_3 [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]_3.$$

Po dosazení za složky vektorových součinů (viz D(4.24)) dostaneme hledaný výsledek. Elegantněji pomocí sumační konvence a symbolu  $e_{ijk}$  dostaneme

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}] = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i [\mathbf{C} \times \mathbf{D}]_i = e_{ijk} A_j B_k e_{ilm} C_l D_m.$$

Po užití vztahu  $e_{ijk} e_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$  dospějeme k D(4.30). Druhý vztah D(4.31) se dokáže osobně.

## LITERATURA

- BROŽ J. a kol.: Základy fyzikálních měření. I. SPN Praha 1967, II. SPN Praha 1974.
- BRDIČKA M.: Mechanika kontinua, NČSAV Praha 1959.
- GOLDSTEIN H.: Classical Mechanics. Addison Wesley Reading 1969.
- KITTEL Ch. et all.: Mechanics – Berkley Physics Course. Mc Graw-Hill, New York 1965. Existuje též ruský a slovenský překlad.
- TRKAL V.: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. NČSAV Praha 1956.
- REKTORYS K.: Přehled užité matematiky. SNTL Praha 1963.



## OZNAČENÍ ZÁKLADNÍCH VELIČIN

<b>a</b>	zrychlení
<b>b, B</b>	moment hybnosti
<i>c</i>	fázová rychlost vlnění, v 12. kapitole rychlost světla
$e_{ij}$	tenzor deformace
<b>f, F</b>	síla
<i>g</i>	tíhové zrychlení
<b>G</b>	hustota objemové síly
$I_{ij}$	tenzor momentu setrvačnosti
<b>J</b>	impuls síly
$J_i$	momenty setrvačnosti
<i>k</i>	vlnočet
<b>k</b>	vlnový vektor
<b>M</b>	moment síly
<i>m</i>	hmotnost
<b>p, P</b>	hybnost
<i>p</i>	tlak
<b>r</b>	polohový vektor
<i>s</i>	délka oblouku křivky
<b>S</b>	plocha (jako vektor)
<i>t</i>	čas
<i>T</i>	charakteristická doba, perioda
<b>v</b>	rychlost
<i>V</i>	objem
<b>w</b>	grupová rychlost vlnění
<i>W</i>	energie
$W_k$	kinetická energie
$W_p$	potenciální energie
$\delta_{ij}$	Kroneckerův symbol
$\nabla$	operátor nabla (gradient)

$\nabla^2$	Laplaceův operátor
$\lambda$	vlnová délka (v kapitole 11)
$\nu$	frekvence (kmitočet)
$\varrho$	hustota
$\sigma_{ij}$	tenzor napětí
$\omega$	úhlová (kruhová) frekvence
$\Omega$	prostorový úhel
$\omega, \boldsymbol{\Omega}$	vektor úhlové rychlosti

# VĚCNÝ A JMENNÝ REJSTŘÍK

- adiční teorém rychlostí 17
  - – – Einsteinův 417
  - – – Newtonův 17, 418
- aeromechanika 331
- d'ALEMBERT 372
- d'Alembertovo řešení 374
- algebra tenzorová 442
- algebra vektorová 442
- Amontonsův zákon tření 50
- amplituda kmitu 64
- amplituda vlny 381, 382, 383, 388, 390
- analýza tenzorová 449
  - vektorová 449
- anelasticita 49
- aperiodický pohyb tlumený 67, 69–72, 78
- ARCHIMEDES 339
- Archimedův zákon 339, 361
- asymetrický volný setrvačnik 236
  
- barometrická rovnice 337
- barometrický tlak 336
- Bernoulliho rovnice 346–350
- binghamská kapalina 300
- Binghamův model 299
- bod 8
  - fázový 151
  - hmotný 9
  - reprezentativní 151
- Boylův-Mariotteův zákon 336
- brázdění hladiny 392
  
- C-soustava 162, 430
- celková energie 53
  - – zákon zachování 53
- celková hybnost 136
  - – soustavy hmotných bodů 136
  
- centrální síla 42, 110
  - silové pole 110, 144
- Ciolkovského rovnice 58
- CORIOLIS 18
- Coriolisova síla 29
- Coriolisovo zrychlení 18
- Couettovo proudění 266
- coulombická síla 113, 133
- Coulombovo tření 50
- creep 296
  
- čas 7
  - absolutní 8, 16
  - vlastní 418
- činitel jakosti 92–93
- číslo Poissonovo 309
  - Reynoldsovo 358
- čistý tah 269
  - tlak 270
- čtyřvektor 422
  - hybnosti 426
  - rychlosti 423
  - síly 426
  - zrychlení 424
- deformace 256–263
  - malé 259
  - objemová 283, 288, 301
  - relativní 397
  - rovinná 261
  - tvarová 283
  - válce vlastní tíhou 323–328
- délka redukováná 246
  - – fyzického kyvadla 246
- deviační moment setrvačnosti 212, 216, 250
- derivace obyčejná 449

- derivace parciální 449
  - vektoru 451
  - ve směru 451
- diagonalizace tenzoru 218, 445
- direkční moment 318
- disipativní procesy 48
  - síla 48
- disperzní zákon 377, 388, 391, 399
- divergence vektoru 453
  - - rychlosti 345
- doba kmitu 64, 74
  - - kyvadla 208
- dokonalá kapalina 331
  - tekutina 331
- dokonalý plyn 332
- DOPPLER 395
- Dopplerův jev 395
  - - příčný 396
- dráha 12
- druhá impulsová věta 139
- družice umělá 128, 130
  - - stacionární 129
- dvojice sil 196
- dynamická ekvivalentnost 194
  - - soustavy sil 194
- dynamika 7
  - hmotného bodu 21
  - kontinua 281
  - relativistická 423
  - tekutin 342
    - - základní rovnice 342-350
  - tuhého tělesa 192-201
  
- E - modul 282
- efekt gyroskopický 241
- EINSTEIN 415
- Einsteinova konvence 9, 438
- Einsteinovy postuláty 426, 427
- Einsteinův vztah mezi hmotností a energií 426, 427
- ekvipotenciální plocha 45
- elastické koeficienty 282
- elevační úhel 35
- energetická diference 162
  - vrstva 158
- energie 42
  - celková 36, 53
  - harmonických kmitů 88-93
  - kinetická 39, 142, 223, 225
  - mechanická 42
    - polohová 41
    - potenciální 41, 142
    - vnitřní 143, 150
    - zákon zachování 53, 150
- EUKLEIDES 8
- Eukleidův prostor 8
- Eulerovy rovnice hydrodynamiky 346
  - - pro setrvačnick 213-215, 219, 226
  
- fáze kmitu 69
- fázová konstanta 64
  - rychlost 371
- FERMAT 402
- Fermatův princip 402
- formalismus Minkowského 420
- frekvence 64
  - harmonická 65
  - rezonanční 82
  - úhlová 64
- FRESNEL 382, 391
- fyzické kyvadlo 206
  - - redukovaná délka 209, 246
  
- G - modul 282
- GALILEI 16
- Galileiova souřadnicová soustava 27
  - transformace 16, 412
- Galileiův princip relativity 21, 413
- Gaussova věta 454, 455
- gradient 450
- gravitační hmotnost 24
  - konstanta 114
  - síla 112, 115
  - silové pole 113-115, 116-127, 131-133
  - zákon 24
- gyrokompas 241
- gyroskop 241
- gyroskopický efekt 241
  
- HAMILTON 156
- hamiltonián 155
- Hamiltonova funkce 156
- Hamiltonovy rovnice 156
- harmonická funkce 65
- harmonický kmit 64-109
  - - tlumený 67, 69, 73-77
- harmonický oscilátor 100
  - pohyb 64
- Helmholtzova věta 255
- Héron Alexandrijský 402

- herpolhodiový kužel 231
- hlavní momenty setrvačnosti 218
  - napětí 277
  - osy setrvačnosti 216–220
  - – tenzoru 277, 445
- hmotnost 22
  - bodová 9
  - gravitační 22
  - klidová 425
  - redukovaná 112, 162
  - setrvačná 24
  - soustavy hmotných bodů 134
  - vztah s energií 426, 427
- hmotnostní úbytek 428
- hmotný bod 9, 27, 185
  - střed 9, 112, 135, 198
  - – tuhého tělesa 186
- homogenní gravitační pole 116–120
  - napětí 275
- hookovská látka 288, 304
- Hookův model 293, 298
  - zákon 281
  - – pro smyk 287, 313
  - – pro tah 310
  - – zobecněný 282–287, 301
- horizont umělý 241
- hustota 185
- Huygensův–Fresnelův princip 391
- hybnost 22, 426
  - soustavy hmotných bodů 136
  - zákon zachování 53, 56, 145, 150
- hydraulické zařízení 334
- hydraulický lis 334
- hydrodynamika 341–360
- hydrostatický paradox 336
  - tlak 335
- hydrostatika 332–341
  
- Chasletova věta 190
  
- impuls síly 53
  - momentu síly 54
- impulsová věta druhá 139
  - – první 137
- inerciální soustava 27, 426, 427
- intenzita silového pole 44
  - vlnění 405
- interference destruktivní 383
  - konstruktivní 383
  - negativní 383
- pozitivní 383
- vlnění 381
- interval časového charakteru 419
  - časopodobný 419
  - prostoročasový 416
  - prostorového charakteru 420
  - prostorupodobný 420
- invariant 443
  - lorentzovský 418
- izolovaná soustava 145
  - – hmotných bodů 145
  - – těles 36
- izotropní tah 285
  
- jádro atomové 176, 428
- jev Dopplerův 395, 396
  - – příčný 396
  - interference 382
  
- kanál 160
  - reakce 160
  - vstupní 160
  - výstupní 160
- kapalina 331–332
  - binghamská 300
  - dokonalá 331
  - ideální 331
  - viskózní 289
- kapilární viskozimetrie 357
- Kardanův závěs 227
- Kelvinův model 293
- Keplerova úloha 120–127
- Keplerovy zákony 114, 120–127
- Keplerův zákon druhý 120
  - – první 124
  - – třetí 127
- kinematická viskozita 353
- kinematický řetěz 16
- kinematika 7
  - relativistická 423
  - spojitého prostředí 253–255
  - tuhého tělesa 185–192
- kinetická energie 39
  - – otáčejícího se tělesa 223–225
  - – soustavy hmotných bodů 142
- kladka těžká 206, 245
- klasická elastická látka 288
  - teorie pružnosti 304
- klidová hmotnost 425

- klidové tření 50
- kmit 64–109
  - harmonický 64–109
  - – vynucený 79–84
- kmitna 385
- kmity lineárního řetězce 398
  - skládání 93–100
  - vynucené 100–102
- koeficient viskozity 290
- koeficienty elastické 282
  - Laméovy 436
- komplexní symbolika 85–88
- konstanta gravitační 114
- konstanty Laméovy 282, 310
- kontinuum 253
- kontrakce tenzoru 443
- konzervativní silové pole 40
- korekce vážení na vakuum 360
- kosmická rychlost druhá 125
  - – první 128
- Königova věta 144, 223, 224, 247
- Kroneckerův symbol 10, 438
- kruhová frekvence 64
- křivost 13
  - poloměr 13
- kužel 458
  - herpolhodiový 231
  - polhodiový 229
  - světelný 420
- kyvadlo fyzické 246
  - – redukovaná délka 246
  - matematické 208
  - torzní 330
  
- L – soustava 162
- labilní rovnováha 48
- laboratorní soustava souřadnic 28, 139, 162
- Lagrangeova funkce 154
- Lagrangeova metoda popisu kontinua 254
- Lagrangeovy rovnice 152
  - – druhého druhu 154
  - – prvního druhu 152
- lagrangian 154
- Laméovy koeficienty 282, 310, 436
  - konstanty 282, 310, 436
- laminární proudění 358
- látka elastická klasická 288
  - hookovská 288, 304
  - nelineárně viskózní 291
  - newtonovská 291
    - plastická 298
    - Saint-Venantova 298
    - viskoelastická 293
    - viskózní 289
- Lissajousovy obrazce 99
- logaritmický dekrement 76
- lom vlnění 393
- LORENTZ 417
- Lorentzova transformace 417
  
- MACH 368
- Machův vlnostroj 368
- malé deformace 259
- Maxwellův model 293
- mechanická energie 42
  - – zákon zachování 42
- mechanika 7
  - kontinua 253
  - Newtonova 21–26
  - relativistická 161, 412, 423
  - tekutin 331–365
- Mešcherského rovnice 59
- metacentrum 361
- mezni aperiodický pohyb 69, 72–73, 78
- mezni vrstva 360
- MINKOWSKI 420
- model Binghamův 299
  - Hookův 293, 298
  - Kelvinův 293
  - Maxwellův 293
  - Newtonův 293–298
  - Prandtlův 299
  - Saint-Venantův 298
  - Scott-Blairův 300
  - Voigtův 293
- modely reologické 293–301
  - viskoelastické 296
- modul E 282
  - G 282
  - pružnosti v tahu 282, 310
  - pružnosti ve smyku 282
  - stlačitelnosti 286
  - Youngův 282
- moment deviační 212, 250
  - direkční 318
  - dvojice sil 197
  - hybnosti 25, 110
- moment hybnosti soustavy 210
  - – soustavy hmotných bodů 139
  - – zákon zachování 36, 53, 56, 148, 150

- moment plošný 320
- moment setrvačnosti 203, 242–245
  - – deviační 212, 250
  - – hlavní 218
  - – tenzor 210–233
- moment síly 24, 203
  - – impuls 54
  
- napětí 267–278
  - hlavní roviny 278
  - hlavní směry 278
  - homogenní 275
  - rovinné 278
  - smykové 276, 350
  - tahové 270, 276
  - tenzor 276
  - tlakové 270, 276
- napěťová síla 274
- Navierova-Stokesova rovnice 353, 352
- neinerciální soustava 27
- nekonzervativní silová pole 48
- nelineární viskózní látka 291
- neneutronovská látka 291
- nestlačitelná tekutina 331, 332
- neutrální rovina 319
  - vlákno 320
- nevířové proudění 342
- NEWTON 8, 16
- newtonovská látka 290
  - tekutina 351
- Newtonovy pohybové zákony 21–26
- Newtonův gravitační zákon 24
  - model 293, 298
  - viskózní zákon 290
  - vzorec pro odpor prostředí 359
- nosník 318
  - podepřený 322
  - vetknutý 318
- nutace 239
  
- obecné reologické modely 299
- objemová deformace 283, 288, 301
  - síla 272
- odpor prostředí 48, 49
  - – Newtonův vzorec 359
- odraz vlnění 393
- odstředivá síla 29, 339
- odstředivé zrychlení 18
- odvalování 231
  
- ohyb 318–323
- okamžitý výkon 38
- operátor Laplaceův 452
  - nabla 450
- osa otáčení 188, 191, 201
  - – pevná 188
  - – volná 233–236
- oscilátor harmonický 100
  - prostorový 129
- otáčení kontinua 255
- otáčení tuhého tělesa 187
  - – – kolem pevné osy 187, 201–210
  - – – – pevného bodu 189, 210
  
- parabolické zrcadlo 405
- paradox hydrodynamický 350
  - hydrostatický 336
- Pascalův zákon 334
- periodický pohyb 64
- pérové váhy tlumené 77
- pevná osa otáčení 188
- plastická kapalina 300
  - látka 298
- plošná rychlost 111
  - síla 272
- plošný moment 320
- plyn 331, 332
  - barotropní 332
  - dokonalý 332
  - podepřený nosník 322
- podmínky Bornovy-Kármánovy 399
  - cyklické 399
- pohyb 7
  - aperiodický tlumený 69, 72, 73, 78
  - infinitní 160
  - mezní aperiodický 69, 72, 73, 78
  - periodický 64
  - postupný 190
  - posuvný 190
  - přímočarý 13
  - relativní 7
  - rovinný 111, 120
  - translační 16
  - v C a L soustavě 163
  - v centrálním poli 110–113
  - kontinua–Eulerova metoda 254
  - – Lagrangeova metoda 254
  - – translační 255
- pohyblivost 52
- pohybová rovnice 30, 31

- - harmonického kmitu 66
- - hmotného středu 193
- - kontinua 280, 281
- - soustavy hmotných bodů 136
- - tekutin 346
- - tělesa otáčejícího se kolem pevné osy 204
- - tuhého tělesa 193
- - vrhů 116
- pohybové zákony Newtonovy 21-26
- Poiseuillův zákon 356
- Poissonovo číslo 309
- Poissonův poměr 309
- pokus Michelsonův-Morleyův 412
- polarizace eliptická 387
  - kruhová 387
  - lineární 369, 387
  - vlnění 369, 385
- pole centrální 144
  - silové 36
  - vektorové 36
- polhodiový kužel 229
- poloha 9
  - hmotného bodu 9
- polohová energie 41
- postupný pohyb 190
- posunutí virtuální 152
- posuvný pohyb 190
- potenciál 145
  - silového pole 45
- potenciální energie 41
  - - soustavy hmotných bodů 142, 144
- potenciálové proudění 342
  - silové pole 40
- práce 36, 37
- práh reakce 161
- Prandtlův model 299
- precese 239, 240
  - pseudoregulární 239
  - regulární 232
  - setrvačniku 239
- princip Fermatův 402
  - Huygensův-Fresnelův 391
  - konstantní rychlosti světla 415, 418
  - parabolického zrcadla 405
  - relativity Einsteinův 426
  - relativity Galileův 21
  - Saint-Venantův 268, 305
  - superpozice 93, 97
    - - sil 25
    - - vlnění 381
- prostor absolutní 7
  - eukleidovský 8
  - fázový 151
  - hybností 151
  - impulsový 151
  - konfigurační 151
  - Minkowského 420
  - pseudoeukleidovský 420
- prostorový oscilátor 129
- proudění Couettovo 266
  - ideální tekutiny 341-350
  - laminární 358
  - nevířivé 342
  - potenciálové 342
  - stacionární 341
  - turbulentní 358
  - ustálené 341
  - viskózní tekutiny 350-360
  - vířivé 341
- proudnice 254, 341
- proudová trubice 343
- proudové vlákno 343
- pružná síla 113, 128
  - vazba 100
- pružnost 304-330
- přetlak 336
- pseudoregulární precese 239
- pseudoskalár 441
  
- ráz těles 160
- rázy 95-97
- reakce 160, 161
  - kanál 160
  - práh 161
- reaktivní tažná síla 58
- reálné těleso 185
- redukovaná délka kyvadla 209, 246
  - hmotnost 112
  - - soustavy hmotných bodů 147
- referenční soustava 7
- regulární precese 232
- relace neurčitosti 390
  - - Heisenbergovy 391, 410
- relaxace napětí 296
- relaxační doba 77
- reologická klasifikace látek 281, 287-301
  - rovina 294
- reologické modely 293-301
- reologie 253, 281, 287-301
- Reynoldsovo číslo 358



- rezonance 81–84, 88, 92
  - energie 92, 93
  - výchylky 82–84
- rezonanční frekvence 82
- rotace tuhého tělesa 187
  - vektoru 454
  - – rychlosti 342
- rovina 433
  - dopadu 393
  - nakloněná 158
  - neutrální 319
- rovinná deformace 261
- rovinné napětí 287
- rovinný pohyb 111, 120
- rovnice barometrická 337
  - Bernoulliova 346–350
  - Ciolkovského 58
  - elipsoidu 457
  - elipsy 457
  - Eulerova hydrodynamická 346
  - Eulerovy pro setrvačnik 213–215, 219, 226
  - Hamiltonovy 154
  - hydrostatické rovnováhy 333
  - kompatibility deformací 305
  - kontinuity 343–345
  - Lagrangeovy druhého druhu 154
  - Lagrangeovy prvního druhu 152
  - Meščerského 59
  - Navierova-Stokesova 352–353
  - Oswaldova-deWaelova 292
  - pohybové hmotného bodu 30, 31
  - – kontinua 280, 281
  - – Lagrangeovy 152–154
  - reologická 294
  - rovnováhy kontinua 278–280
  - sekulární 218, 277
  - toku 291
  - vlnová 372
- rovnováha indiferentní 200
  - labilní 48
  - stabilní 48, 200
  - stálá 200
  - tekutin 332–341
  - tělesa 236
  - tuhého tělesa 198–201
  - volná 200
  - vratká 200
- rozdělení úhlové 171, 179
- rozpad 161, 177, 180
  - samovolný (spontánní) 161, 180, 429
  - $\pi$  mezonu 430
- rozptyl 160
  - elastický (pružný) 160
  - na absolutně tvrdé sféře 171
  - na centrálním poli 167
  - neelastický (nepružný) 160
  - obrácená úloha 172, 182
  - Rutherfordův 175
  - účinný průřez 170, 181
- RUTHERFORD 176
- Rutherfordovy pokusy 176
- Rutherfordův rozptyl 133, 175
  - vzorec 175
- rychlost 12
  - axiální 436
  - azimutální 434, 436
  - deformace 263–266
  - fázová 371
  - grupová 387
  - okamžitá 12
  - plošná 111
  - precese 231–233
  - průměrná 12
  - radiální 434–436
  - úhlová 13, 188, 434
  - unášivá 28
- Saint-Venantova látka 298
- Saint-Venantův model 298
  - – princip 268, 305
- setrvačná hmotnost 24
  - síla 29
- setrvačnická 225–241
  - asymetrický 225, 236
  - bezsilový 225
  - hovorový 225, 241
  - kulový 225–227
  - symetrický 225
  - těžký symetrický 225, 236–241
  - volný symetrický 225, 227–235
- setrvačnosti zákon 21, 56
- síla 22
  - centrální 42, 110
  - Coriolisova 29
  - coulombická 113, 133
  - elastická 67, 79
  - disipativní 48
  - gravitační 24, 112, 115
  - konzervativní 41
  - napěťová 274

- síla nekonzervativní 48
  - objemová 272
  - odstředivá 29, 339
  - plošná 272
  - princip superpozice 25
  - pružná 113, 128
  - reaktivní 58
  - setrvačná 29
  - vnější 136
  - vnitřní 136
  - vynucující 79, 84
- siločára 47
- silové pole 36
  - – centrální 42, 43, 110, 144
  - – disipativních sil 48
  - – ekvipotenciální plocha 45
  - – gravitační 43, 44, 113–115, 120–127, 131–133
  - – homogenní 42
  - – intenzita 44
  - – konzervativní 40
  - – nekonzervativních sil 48
  - – potenciál 40, 45
  - – siločára 47
- skalár 440, 444
- skalární součin 443
- skládání kmitů 93–100
  - pohybů 26
- smyk 270, 311–313
  - čistý 266
- smykové napětí 270, 276, 350
  - tření 49
- součin skalární 422, 443
  - smíšený 447
  - vektorový 446
- součinitel klidového tření 50
  - smyslového tření 50
  - valivého tření 51
- souřadnice cylindrické 11, 436
  - kartézské 10, 433, 435
  - křivočaré 151, 436
  - ortogonální 14, 436
  - polární 433
  - sférické 11, 435
  - transformace 437
- souřadnicová soustava Galileiova 27
  - – inerciální 27
  - – hmotného středu 162, 430
  - – laboratorní 28, 162
  - – neinerciální 27
  - – privilegovaná 415
- soustava cylindrická 11, 436
  - hmotného středu 139, 162, 430
  - hmotných bodů 186, 134
  - izolovaná 36
  - jednotek 114
  - kartézská 10, 433, 435
  - laboratorní 139, 162
  - polární 433
  - privilegovaná 415
  - referenční 7
  - vztažná 7
- spojité nádoby 336.
  - prostředí 253
- srážky 160
- stabilita plování 339, 361
- stabilní rovnováha 48
- stacionární pohyb kontinua 254
  - proudění 341
- Steinerova věta 221–223
- Stokesova věta 445
- Stokesův zákon 359
- stupně volnosti 150
  - – tuhého tělesa 187, 193
- suché tření 50
- superpozice sil 25
  - vlnění 373, 381
- svazek částic 170, 181
  - vstříčný 432
- šikmý vrh 31
- šířka rezonanční křivky 93
- tah 306–310
  - čistý 269
  - izotropní 285
- tahové napětí 270, 276
- tečení 296
- tekutina 281, 289
  - dokonalá 331
  - nestlačitelná 331
  - newtonovská 351
  - viskózní 289, 350
- tenzor 422, 441
  - antisymetrický 441
  - deviátor 283
  - diagonalizace 445
  - hlavní osy 277
  - izotropní část 283
  - Levi-Civitův 445

- tenzor malých deformací 259, 294–297
  - momentu setrvačnosti 213
  - napětí 276
  - redukce k hlavním osám 277, 445
  - Ricciův 445
  - rychlosti deformace 260, 263
  - symetrický 441
  - velkých deformací 259
- tenzorová algebra 442
  - analýza 449
- teorie pružnosti klasická 304
  - – základní úloha 304–306
- těleso 7
  - absolutně tuhé 152
  - izotropní 282
  - otáčející se kolem bodu 225
  - tuhé 152, 185–201
  - vztažné 7
- těžiště 112, 135
- těžišťová soustava 139
- těžký setrvačnický 236, 241
- tíha 32
- tíhové pole 113, 116–120
- tíhové zrychlení 394
- tíže – objemová síla 273
- tlak 270, 284, 331
  - barometrický 336
  - čistý 270
  - hydrostatický 335
- tlakové napětí 270
- tlumený kmit 67, 69, 73–77
  - systém 78
- točivost 25, 110
- toková rovnice 291
- torze 314–318
- torzní kyvadlo 330
- totální reflexe 394
- trajektorie 9, 11, 190
  - částice kontinua 253
  - fázová 151
  - konzervativního systému 151
  - reprezentativní 151
  - zadání 12
- transformace Galileiova 16, 412
  - inverzní 439
  - Lorentzova 415, 417
  - souřadnic 437
  - unitární 439
  - zrcadlení 439
- translace 190
- translační pohyb kontinua 255
  - tření 49
    - Coulombovo 50
    - klidové 50
    - smykové 49
    - součinitel 50, 51
    - suché 50
    - valivé 49, 51
    - vlečné 49
    - vnější 49
    - vnitřní 49
  - tuhá soustava 135
    - – hmotných bodů 135, 187
  - tuhé těleso 185–201
    - – dynamika 192–201
    - – kinematika 185–192
  - tuhost pružiny 67
  - turbulentní proudění 358
  - tvarová deformace 283
- účinný průřez 170, 181
  - – diferenciální 170
  - – Rutherfordův 171
  - – totální 171
- událost 419, 421
- úhel 432
  - azimutální 435
  - mezní 394, 410
  - otáčení 188
  - polární 433, 435
  - prostorový 437
  - smyku 263
- úhlová frekvence 64
  - rychlost 13, 188, 434
  - – otáčení tělesa 192
- umělý horizont 394
- unášivá rychlost 28
- unášivé zrychlení 29
- úplný odraz 394
- ustálené proudění 341
- ustálený pohyb kontinua 254
- uzel 385
- úžení tenzoru 443
- valení 209, 231, 247, 249
- valivé tření 49, 51
- vázané kmity 100–102
  - oscilátory 100–102
- vazbová síla 118
- vazby 118, 152, 199

- vazby pružné 100
- vazkost 49
- vektor 9, 440
  - axiální 441
  - čtyřrozměrný 422
  - čtyřrychlosti 423
  - čtyřzrychlení 423
  - jednotkový 9
  - napětí 272
  - normálový 14
  - polohový 9
  - posunutí 256
  - potenciálový 456
  - rotace 193
  - tečný 14
  - úhlové rychlosti 188
  - vlnový 377
- Venturiův vodoměr 362
- vetknutý nosník 318
- věta Eulerova 190
  - Helmholtzova 255
  - Chaslesova 190
  - impulsová druhá 139
  - - první 137
  - Königova 144, 223, 224, 247
  - o hybnosti soustavy 137
  - Steinerova 221-223
- virtuální posunutí 152
- vířivé proudění 341
- viskoelastičita 293-298
- viskoelastická látka 293
- viskoelastické modely 296
- viskometrie kapilární 357
- viskozita kinematická 49, 353
- viskózní kapalina 289
  - látka 289
  - tekutina 289, 350
  - zákon Newtonův 290
- vlečné tření 49
- vlna 367
  - divergentní 380
  - konvergentní 380
  - lomená 394
  - monochromatická 371, 376, 378
  - odražená 394
  - polarizovaná 369
  - rovinná 371, 376, 378
  - rozbíhavá 380
  - sbíhavá 380
  - sférická 379
  - vlnění 366, 368
    - elipticky polarizované 387
    - intenzita 406
    - kruhově polarizované 387
    - lineárně polarizované 369
    - longitudinální 370, 402
    - podélné 370, 402
    - postupné 367
    - příčné 368, 381
    - stojaté 381, 384, 385
    - v tekutinách 400
    - v tenké pružné tyči 379
  - vlnoplocha 370, 371, 380
    - čelní 391
  - vlnostroj Machův 367, 368
  - vlnová délka 369
    - rovnice 372, 374
  - vlnový balík 387
    - vektor 376
  - vnější síla 136
  - vnitřní energie 144, 150
    - - potenciální 144
  - vnitřní síla 136
- Voigtův model 293
- volná osa 233-236
  - soustava hmotných bodů 135
- volný hmotný bod 27, 116
  - pád 35
  - symetrický setrvačnick 225
- vrh 31, 193
  - pohybové rovnice 116, 117
  - šikmý 31
- vynucený harmonický kmit 79-87
- výkon 38
- vztlak 339
- Youngův modul 282, 310
- základní úloha teorie pružnosti 304-306
- zákon akce a reakce 22, 26
  - Amontonsův 50
  - Archimedův 339, 361
  - Boyleův-Mariotteův 336
  - disperze 377, 399
  - gravitační 24, 114
  - Hookův 281, 313
  - Hookův pro smyk 313
  - Hookův pro tah 310
  - odrazu vlnění 394, 404
  - Pascalův 334

- zákon Poisseuillův 356
- setrvačnosti 21
- síly 21, 23
- skládání pohybů 26
- Stokesův 359
- zachování 161
- – energie 36, 150, 118–120
- – hybnosti 36, 53, 56
- – momentu hybnosti 36, 53, 56, 110, 120, 150
- zákony pohybové Newtonovy 21, 22, 26
- Keplerovy 114, 120–127
- závěs Kardanův 227
- zrychlení 15
- Coriolisovo 18
- normálové 18
- odstředivé 18
- okamžité 15
- tečné 15
- tíhové 32, 115

# OBSAH

<b>Předmluva</b> . . . . .	5
<b>Kapitola 1</b>	
<b>Kinematika hmotného bodu</b> . . . . .	7
1.1 Prostor a čas . . . . .	7
1.2 Poloha, trajektorie, rychlost a zrychlení hmotného bodu . . . . .	9
1.3 Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě . . . . .	16
Řešené úlohy . . . . .	18
<b>Kapitola 2</b>	
<b>Dynamika hmotného bodu.</b> . . . . .	21
2.1 Základní zákony klasické mechaniky . . . . .	21
2.2 Pohybové rovnice. . . . .	30
2.3 Práce . . . . .	36
2.4 Konzervativní silová pole . . . . .	40
2.5 Nekonzervativní silová pole, disipativní procesy, tření . . . . .	48
2.6 Impuls síly a zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti . . . . .	53
Řešené úlohy . . . . .	59
<b>Kapitola 3</b>	
<b>Kmity</b> . . . . .	64
3.1 Harmonický kmit . . . . .	64
3.2 Tlumený harmonický kmit a aperiodický tlumený pohyb . . . . .	67
3.3 Vynucený harmonický kmit, rezonance, komplexní symbolika . . . . .	79
3.4 Energie harmonických kmitů, činitel jakosti $Q$ . . . . .	88
3.5 Skládání kmitů . . . . .	93
3.6 Vázané kmity . . . . .	100
Řešené úlohy . . . . .	102

Kapitola 4	
<b>Pohyb v centrálním silovém poli</b>	110
4.1 Obecné vlastnosti pohybu v centrálním poli	110
4.2 Gravitační a tíhové pole	113
4.3 Keplerova úloha	120
Řešené úlohy	128
Kapitola 5	
<b>Soustava hmotných bodů</b>	134
5.1 Popis soustavy hmotných bodů	134
5.2 Pohybové rovnice soustavy hmotných bodů	136
5.3 Kinetická a potenciální energie soustavy hmotných bodů	142
5.4 Izolovaná soustava hmotných bodů	145
5.5 Konfigurační, impulsový a fázový prostor	150
5.6 Vazby. Lagrangeovy rovnice prvního druhu	152
5.7 Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Hamiltonovy kanonické rovnice	154
Řešené úlohy	157
Kapitola 6	
<b>Ráz těles</b>	160
6.1 Klasifikace srážek	160
6.2 Soustava laboratorní a soustava hmotného středu	162
6.3 Rozptyl na centrálním poli	167
6.4 Rozptyl na absolutně tvrdé sféře	172
6.5 Rutherfordův vzorec	175
6.6 Rozpad částic	177
Řešené úlohy	179
Kapitola 7	
<b>Mechanika tuhého tělesa</b>	185
7.1 Kinematika tuhého tělesa	185
7.2 Dynamika tuhého tělesa	192
7.3 Otáčení kolem pevné osy	201
7.4 Tenzor setrvačnosti, Eulerovy pohybové rovnice	210
7.5 Volný symetrický setrvačnick	225
7.6 Těžký symetrický setrvačnick	236
Řešené úlohy	242

Kapitola 8	
<b>Mechanika spojitých prostředí – reologie</b>	253
8.1 Kinematika spojitého prostředí – kontinua	253
8.2 Deformace	256
8.3 Rychlost deformace	263
8.4 Napětí	267
8.5 Rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua	278
8.6 Reologická klasifikace látek, zobecněný Hookův zákon	281
Řešené úlohy	301
Kapitola 9	
<b>Pružnost</b>	304
9.1 Základní úloha teorie pružnosti	304
9.2 Tah	306
9.3 Smyk a torze	311
9.4 Ohyb	318
9.5 Deformace válce vlastní tíhou	323
Řešené úlohy	328
Kapitola 10	
<b>Mechanika tekutin</b>	331
10.1 Kapalina a plyn	331
10.2 Rovnováha tekutin	332
10.3 Proudění ideální tekutiny	341
10.4 Proudění viskózní tekutiny	350
Řešené úlohy	360
Kapitola 11	
<b>Vlnění</b>	366
11.1 Vznik postupných vln	366
11.2 Vlnová rovnice	372
11.3 Rovinná monochromatická vlna. Vlnový vektor	
Disperzní zákon	375
11.4 Sférická vlna	379
11.5 Princip superpozice. Interference vlnění	381
11.6 Stojaté vlnění	384
11.7 Polarizace vlnění	385
11.8 Vlnový balík. Grupová rychlost	387
11.9 Huygensův-Fresnelův princip	391
11.10 Odraz a lom vlnění	392
	475



11.11 Dopplerův jev . . . . .	395
11.12 Podélné vlnění v pružné tenké tyči . . . . .	397
11.13 Kmity lineárního řetězce . . . . .	398
11.14 Vlny v tekutinách . . . . .	400
11.15 Fermatův princip . . . . .	402
11.16 Intenzita vlnění . . . . .	405
Řešené úlohy . . . . .	408
Kapitola 12	
<b>Relativistická mechanika . . . . .</b>	<b>412</b>
12.1 Michelsonův-Morleyův pokus . . . . .	412
12.2 Lorentzova transformace a její důsledky . . . . .	415
12.3 Geometrická interpretace. Minkowského formalismus . . . . .	420
12.4 Relativistická kinematika a dynamika . . . . .	423
12.5 Einsteinův vztah mezi hmotností a energií . . . . .	427
Řešené úlohy . . . . .	430
<b>Matematické dodatky . . . . .</b>	<b>433</b>
D.1 Souřadnicové systémy v rovině a v prostoru . . . . .	433
D.2 Transformace souřadnicových systémů . . . . .	437
D.3 Skaláry, vektory a tenzory . . . . .	440
D.4 Základy vektorové a tenzorové algebry . . . . .	442
D.5 Základy vektorové a tenzorové analýzy . . . . .	449
Řešené úlohy . . . . .	456
<b>Literatura . . . . .</b>	<b>459</b>
<b>Označení základních veličin . . . . .</b>	<b>460</b>
<b>Věcný a jmenný rejstřík . . . . .</b>	<b>462</b>

æ

## Mechanika

PROF. RNDr. JOZEF KVASNICA, DrSc.  
RNDr. ANTONÍN HAVRÁNEK, CSc.  
PROF. RNDr. PAVEL LUKÁČ, DrSc.  
DOC. RNDr. BORIS SPRUŠIL, CSc.

Vydala Academia  
nakladatelství Československé akademie věd  
v Praze 1988

Přebal a vazbu navrhl Jaroslav Krouz  
Odpovědný redaktor Daniel Zítka  
Technická redaktorka Stanislava Herdegenová

Vydání 1. – 480 stran (164 obrázků)

Sazba: Odbor technické přípravy vědecké literatury  
Academia Praha  
Tisk: Tisk Brno, n. p., Český Těšín

29,70 AA – 30,27 VA  
Náklad 3 000 výtisků – 03/5 – 1 468  
21-047-88

Cena váz. výtisku Kčs 35,-

# Mechanika

ACADEMIA

JOZEF KVASNICA

ANTONÍN HAVRÁNEK

PAVEL LUKÁČ

BORIS SPRUŠIL

Reprint 1. vydání

# Předmluva k druhému vydání

*Po šestnácti letech dáváme čtenáři do rukou druhé vydání knihy Mechanika. Bohužel z autorů žijeme již jen dva (A. Havránek a P. Lukáč), a proto jsem se jako autor podstatné části textu ujal přípravy druhého vydání. Vedoucí autorského kolektivu prvního vydání Jozef Kvasnica odvedl svou práci na sjednocení textu, jeho věcné a technické úpravě natolik kvalitně, že jsem se s nakladatelstvím dohodl vydat dílo v téměř nezměněné podobě. V neposlední řadě k tomu přispěla i skutečnost, že si s profesorem Lukáčem neumíme představit, jak bychom originálně a pěkně napsané kapitoly Jozefa Kvasnicy a Borise Sprušila upravovali a nějak podstatněji zlepšili. Také se domníváme, že pro potenciální zájemce je nanejvýš účelné, aby kniha byla co nejdříve opět v prodeji. Doufáme jenom, že případné chyby, které se do knihy vloudily, laskavý čtenář promine.*

*V klasických partiích, které jsou hlavním obsahem předkládané učebnice, se mechanika mění jen zvolna. Proto si myslíme, že i po šestnácti letech může učebnice sloužit k výuce tak, jak je uvedeno v předmluvě k prvnímu vydání. V posledních letech nastal rychlejší vývoj mechaniky především v mechanice kontinua (hydroaeromechanika a reologie) a při vyšetřování nelineárních dynamických soustav, kde se především zkoumá závislost řešení pohybových rovnic na počátečních podmínkách.*

*Knihy Mechanika byla první ze série učebnic vydaných učiteli Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze k základnímu kurzu fyziky. Následovaly učebnice z atomové a jaderné fyziky, molekulové fyziky, elektřiny a magnetismu. Za šestnáct let od prvního vydání naší knihy vyšly i další zajímavé knihy rozšiřující českou fyzikálně-pedagogickou literaturu pro vysoké školy a vyšší třídy středních škol. Některé tituly týkající se posledního rozvoje mechaniky a tituly, jež uvádějí čtenáře do modernějších fyzikálních učebnic a příruček, jsme doplnili do přehledu citované literatury, který jsme proti prvnímu vydání podstatně rozšířili.*

Antonín Havránek

## LITERATURA

### Literatura k prvnímu vydání s aktualizacemi

- BRDIČKA M.: *Mechanika kontinua*. NČSAV, Praha 1959; 2. upravené vyd. BRDIČKA M., SAMEK L. a SOPKO B.: *Mechanika kontinua*. Academia, Praha 2000, 799 s.
- BROŽ J. aj.: *Základy fyzikálních měření I*. SPN, Praha 1969, 524 s.; *Základy fyzikálních měření II*. SPN, Praha 1974, 756 s.; 2. vyd. *Základy fyzikálních měření I*. SPN, Praha 1983, 669 s.
- GOLDSTEIN H.: *Classical Mechanics*. Addison Wesley, Reading 1969.
- KITTEL CH. et all.: *Mechanics – Berkley Physics Course*. Mc Graw – Hill, New York 1965. Existuje též slovenský překlad.
- REKTORYS K. aj.: *Přehled užité matematiky*. SNTL, Praha 1963. Přepracované vydání: REKTORYS K. aj.: *Přehled užité matematiky I. a II.* Prometheus, Praha 2000, 2 sv., 720 s. a 874 s.
- TRKAL V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. NČSAV, Praha 1956.

### Publikace doplněné do druhého vydání

- BARNES H., HUTTON J. F. and WALTERS K.: *An introduction to rheology*. Elsevier, Amsterdam 1993, 524 s.
- BATCHELOR G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. University Press, Cambridge 2000, 615 s.
- BRDIČKA M. a HLADÍK A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987, 581 s.
- FÄHNRIICH J., HAVRÁNEK A. a SLAVÍNSKÁ D.: *Příklady z mechaniky*. 5. vyd., Karolinum, Praha 2001, 154 s.
- FEYNMAN R. P., LEIGHTON R. B. a SANDS M. L.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými Příklady*. Díl 1/3, 2/3 a 3/3. Fragment, Havlíčkův Brod 2000 (Díl 1/3), 732 s., 2001 (Díl 2/3), 806 s., 2002 (Díl 3/3), 435 s.
- FIALA J. a SKÁLA L.: *Úvod do nelineární fyziky*. Matfyzpress, Praha 2003, 221 s.
- HALLIDAY D., RESNICK R. a WALKER J.: *Fyzika*. Vutium a Prometheus, Brno 2001, 5. sv.
- HAVRÁNEK A.: *Klasická mechanika I – Hmotný bod a tuhé těleso*. Karolinum, Praha 2002, 242 s., *Klasická mechanika II – Kontinuum*. Karolinum, Praha 2003, 176 s., *Klasická mechanika III – Vlnění a akustika* (plán na 2005).
- HEJZLAR R.: *Mechanika tekutin*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2001.
- HORÁK J., KRLÍN L. a RAIDL A.: *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*. Academia, Praha 2003.
- HORSKÝ J., NOVOTNÝ J. a ŠTEFANÍK M.: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001, 412 s.
- KVASNICA J.: *Matematický aparát fyziky*. Academia, Praha 1997, 2. vyd., 383 s.
- MACUR J.: *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*. VUT Brno PC-DIR, Brno 1995, 87 s.
- MECHLOVÁ E. a KOŠTÁL K. (eds): *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz*. Prometheus, Praha 1999, 588 s.
- RAAB M.: *Materiály a člověk*. Encyklopedický dům, Praha 1999, 228 s.
- SEDLÁK B. a ŠTOLL I.: *Elektrina a magnetismus*. Academia a Karolinum, Praha 1993, 600 s.; *Elektrina a magnetismus*. 2. oprav. vyd., Academia, Praha 2002, 632 s.
- SVOBODA E. a BAKULE R.: *Molekulová fyzika*. Academia, Praha 1992, 275 s.
- ÚLEHLA I., SUK M. a TRKA Z.: *Atomy, jádra, částice*. Academia, Praha 1990, 469 s.



prof. RNDr. Jozef Kvasnica, DrSc.  
doc. RNDr. Antonín Havránek, CSc.  
prof. RNDr. Pavel Lukáč, DrSc.  
prof. RNDr. Boris Sprušil, DrSc.

## MECHANIKA

Vydala Academia, nakladatelství Akademie věd České republiky  
Legerova 61, 120 00 Praha 2

Vazbu navrhl Oleg Man  
Odpovědný redaktor Daniel Zitko  
Redaktor 2. vydání Mgr. Aleš Baďura  
Technická redaktorka Stanislava Herdegenová

Vydání 2., 2004

Z původní sazby vytiskla Serifa, s.r.o., Jinonická 80, Praha 5  
Ediční číslo 10189  
ISBN 80-200-1268-0 (2. vyd.)