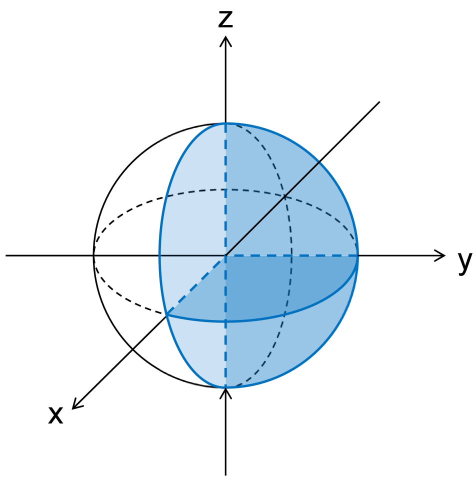
Řešení testu 2b

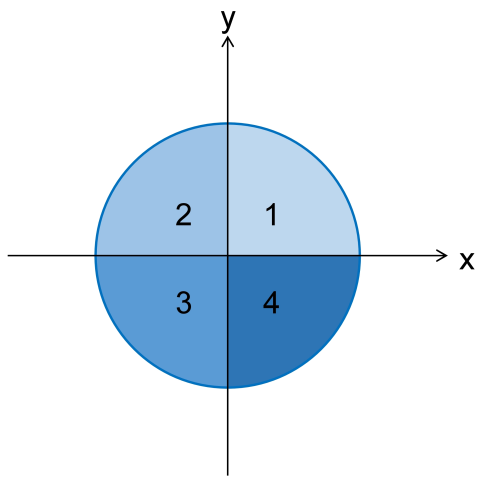
Mechanika a molekulová fyzika
NOFY021

úterý 9. ledna 2024

Příklad 1 - Nehomogenní koule

Zadání: Vypočítejte polohu hmotného středu koule o poloměru R, která vznikne slepením 4 homogenních čtvrkoulí, jejichž hmotnosti jsou v poměru 1:2:3:4, viz obrázek.





Řešení: Nejprve spočítejme polohu hmotného středu (x_T, y_T, z_T) jedné čtvrkoule, která je obecně dána objemovými integrály:

$$x_T = \frac{1}{V}\int_V x\,\mathrm{d}V, \tag{1}$$

$$y_T = \frac{1}{V}\int_V y\,\mathrm{d}V, \tag{2}$$

$$z_T = \frac{1}{V}\int_V z\,\mathrm{d}V. \tag{3}$$

Pro výpočet objemových integrálů použijeme sférické souřadnice (r, θ, φ).

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Objem čtvrtkoule je $V = \frac{1}{3}\pi R^3$, integrační meze pro čtvrtkouli jsou následující.

$$r \in [0, R]$$
$$\theta \in [0, \pi]$$
$$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Dosadíme do integrálů (1)–(3) a dopočítáme.

$$x_T = \frac{3}{\pi R^3} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin\theta \cos\varphi \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

$$x_T = \frac{3}{\pi R^3} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2\theta \cos\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

$$x_T = \frac{3}{\pi R^3} \int\limits_0^R r^3 \,\mathrm{d}r \int\limits_0^\pi \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$x_T = \frac{3}{\pi R^3} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^\pi [\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$x_T = \frac{3}{\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1$$

$$x_T = \frac{3}{8} R \tag{4}$$

$$y_T = \frac{3}{\pi R^3} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin\theta \sin\varphi \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

$$y_T = \frac{3}{\pi R^3} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2\theta \sin\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

$$y_T = \frac{3}{\pi R^3} \int\limits_0^R r^3 \,\mathrm{d}r \int\limits_0^\pi \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$y_T = \frac{3}{\pi R^3} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^\pi [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$y_T = \frac{3}{\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1$$

$$y_T = \frac{3}{8} R \tag{5}$$

$$z_T = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$z_T = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\theta\cos\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$z_T = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}\varphi$$
$$z_T = \frac{3}{\pi R^3} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^\pi [1]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$z_T = \frac{3}{\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$z_T = 0 \tag{6}$$

Polohu hmotného středu výsledné koule vypočítáme jako vážený průměr poloh hmotných středů jednotlivých částí.

$$\vec{r}_T = \frac{m_1\vec{r}_{T_1} + m_2\vec{r}_{T_2} + m_3\vec{r}_{T_3} + m_4\vec{r}_{T_4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \tag{7}$$

Polohy hmotných středů jednotlivých částí určíme ze symetrie a pomocí rovnic (4) a (5), z-ové polohy jsou nulové podle rovnice (6).

$$x_{T_1} = +\frac{3R}{8} \qquad y_{T_1} = +\frac{3R}{8} \tag{8}$$
$$x_{T_2} = -\frac{3R}{8} \qquad y_{T_2} = +\frac{3R}{8} \tag{9}$$
$$x_{T_3} = -\frac{3R}{8} \qquad y_{T_3} = -\frac{3R}{8} \tag{10}$$
$$x_{T_4} = +\frac{3R}{8} \qquad y_{T_4} = -\frac{3R}{8} \tag{11}$$

Dosadíme do rovnice (7) a dopočítáme.

$$x_T = \frac{1-2-3+4}{1+2+3+4}\frac{3R}{8} = 0 \tag{12}$$
$$y_T = \frac{1+2-3-4}{1+2+3+4}\frac{3R}{8} = -\frac{3R}{20} \tag{13}$$

Poloha hmotného středu koule je tedy $r_T = (0, -3R/20, 0)$.

Příklad 2 - Tlumený harmonický oscilátor

Zadání: Tlumený harmonický oscilátor je charakterizován těmito parametry: vlastní úhlová frekvence $\omega_0 = 1.5\ \mathrm{s}^{-1}$ a tlumicí koeficient $\delta = 2.5\ \mathrm{s}^{-1}$. Jaký typ pohybu bude konat tento oscilátor? V čase $t = 0$ s je výchylka závaží $x_0 = 1$ cm a jeho rychlost $v_0 = -10\ \mathrm{cm\,s}^{-1}$. Vypočítejte, v jakém (konečném) čase bude výchylka oscilátoru nulová.

Řešení: V případě $\delta > \omega_0$ koná oscilátor *aperiodický pohyb*, který je obecně dan vztahem:

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta+\psi)t} + C_2 e^{(-\delta-\psi)t}, \tag{1}$$

kde $\psi = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = 2\ \mathrm{s}^{-1}$. Derivací podle času dostaneme časovou závislosti rychlosti.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1(-\delta+\psi)e^{(-\delta+\psi)t} + C_2(-\delta-\psi)e^{(-\delta-\psi)t} \tag{2}$$

Nyní dosaďme v čase $t = 0$ počáteční podmínky x_0 a v_0.

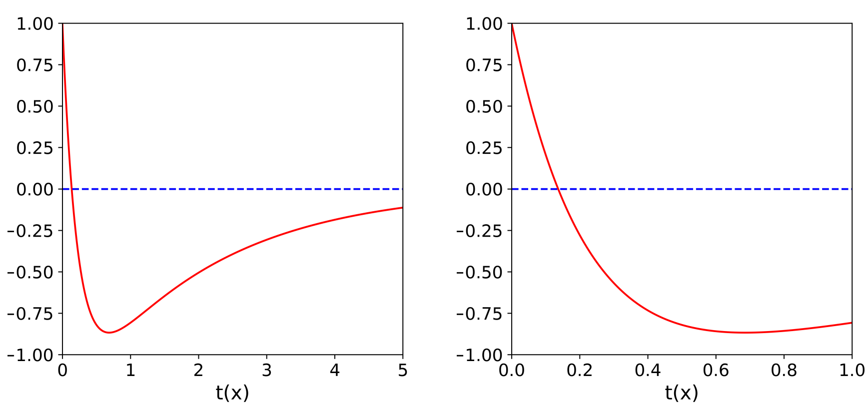
$$x_0 = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = x_0 - C_1$$
$$v_0 = C_1(-\delta+\psi) + C_2(-\delta-\psi)$$

$$v_0 = -C_1\delta + C_1\psi - x_0\delta + C_1\delta - x_0\psi + C_1\psi$$
$$C_1 = \frac{v_0 + x_0\delta + x_0\psi}{2\psi}$$
$$C_2 = \frac{-v_0 - x_0\delta + x_0\psi}{2\psi}$$

Časová závislost výchylky oscilátoru je tedy:

$$x(t) = \frac{v_0 + x_0\delta + x_0\psi}{2\psi} e^{(-\delta+\psi)t} + \frac{-v_0 - x_0\delta + x_0\psi}{2\psi} e^{(-\delta-\psi)t} \tag{3}$$

Graf závislosti $x(t)$ je na obrázku.



Nyní už jen vypočítáme čas, pro který je výchylka nulová.

$$0 = \frac{v_0 + x_0\delta + x_0\psi}{2\psi} e^{(-\delta+\psi)t_0} + \frac{-v_0 - x_0\delta + x_0\psi}{2\psi} e^{(-\delta-\psi)t_0}$$

$$\frac{v_0 + x_0\delta - x_0\psi}{2\psi} e^{-\delta t_0} e^{-\psi t_0} = \frac{v_0 + x_0\delta + x_0\psi}{2\psi} e^{-\delta t_0} e^{\psi t_0}$$

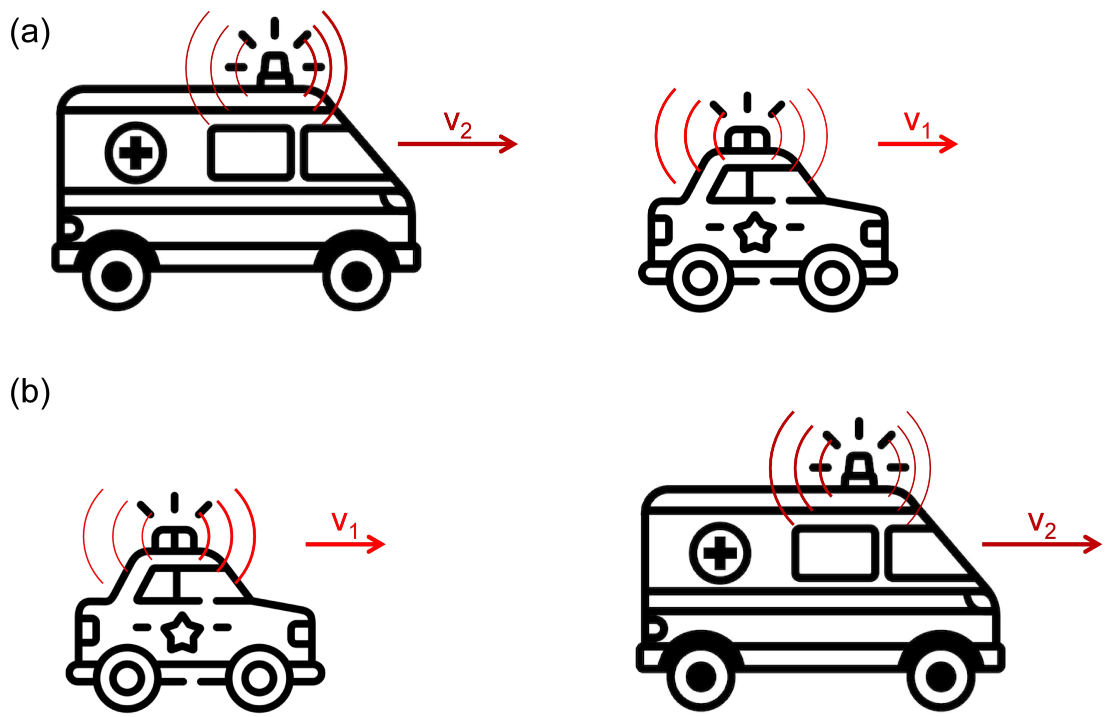
$$e^{-2\psi t_0} = \frac{v_0 + x_0\delta + x_0\psi}{v_0 + x_0\delta - x_0\psi}$$

$$t_0 = \frac{1}{2\psi} \ln\left(\frac{v_0 + x_0(\delta - \psi)}{v_0 + x_0(\delta + \psi)}\right) \tag{4}$$

$$t_0 \doteq 0.14 \text{ s} \tag{5}$$

Příklad 3 - Dopplerův jev

Zadání: K nehodě přijíždí policejní vůz rychlostí $v_1 = 80$ km/h a sanitka rychlostí $v_2 = 90$ km/h. Frekvence policejní sirény je $f_1 = 600$ Hz, frekvence sirény sanitky je $f_2 = 1400$ Hz. Rychlost šíření zvuku je 340 m s^{-1}.
(a) Sanitka jede za policejním vozem (přibližuje se k němu). Jakou frekvenci policejní sirény uslyší záchranáři v sanitce? Jakou frekvenci sanitkové sirény uslyší policisté?
(b) Sanitka předjede policejní vůz (vzdaluje se od něj). Jakou frekvenci policejní sirény tentokrát uslyší záchranáři v sanitce? Jakou frekvenci sanitkové sirény tentokrát uslyší policisté?



Řešení: Obecně je frekvence vlnění f, kterou vnímá pozorovatel, posunutá vůči původní frekvenci f_0 podle Dopplerova jevu:

$$f = f_0 \frac{v + v_p}{v + v_s}, \tag{1}$$

kde v je rychlost zvuku, v_p rychlost pozorovatele a v_s rychlost zdroje vlnění.
Rychlosti v_p a v_s mají kladné znaménko, je-li jejich směr opačný něž směr šíření vlnění. Tzn. pozorovatel se pohybuje směrem ke zdroji resp. zdroj se pohybuje směrem od pozorovatele. V opačných případech jsou rychlosti v_p a v_s záporné.
Totéž lze odvodit z *vlastní zkušenosti*. V případě pozorovatele blížícího se ke zdroji vlnění, je pozorovaná frekvence vyšší a rychlost pozorovatele v_p tedy dosazujeme do rovnice (1) jako kladnou. Pro vzdalujícího se pozorovatele je pozorovaná frekvence nižší a rychlost pozorovatele v_p dosazujeme do rovnice (1) jako zápornou. Podobně lze odvodit, že v případě

přibližujícího se zdroje, je pozorovaná frekvence vyšší a rychlost zdroje v_s dosazujeme do rovnice (1) jako zápornou. Pro vzdalující se zdroj je pozorovaná frekvence nižší a rychlost zdroje v_p dosazujeme do rovnice (1) jako kladnou.

(a) Sanitka se přibližuje k policejnímu vozu, ten se od ní naopak vzdaluje. Pro pozorované frekvence f_1' (policejní siréna pozorovaná v sanitce) a f_2' (siréna sanitky pozorovaná v policejním voze) platí:

$$f_1' = f_1 \frac{v + v_2}{v + v_1} = 600\ \mathrm{Hz}\ \frac{340 \cdot 3.6 + 90}{340 \cdot 3.6 + 80} \doteq 605\ \mathrm{Hz} \tag{2}$$

$$f_2' = f_2 \frac{v - v_1}{v - v_2} = 1400\ \mathrm{Hz}\ \frac{340 \cdot 3.6 - 80}{340 \cdot 3.6 - 90} \doteq 1412\ \mathrm{Hz} \tag{3}$$

(b) Sanitka se vzdaluje od policejního vozu, ten se k ní naopak přibližuje. Pro pozorované frekvence f_1'' (policejní siréna pozorovaná v sanitce) a f_2'' (siréna sanitky pozorovaná v policejním voze) platí:

$$f_1'' = f_1 \frac{v - v_2}{v - v_1} = 600\ \mathrm{Hz}\ \frac{340 \cdot 3.6 - 90}{340 \cdot 3.6 - 80} \doteq 595\ \mathrm{Hz} \tag{4}$$

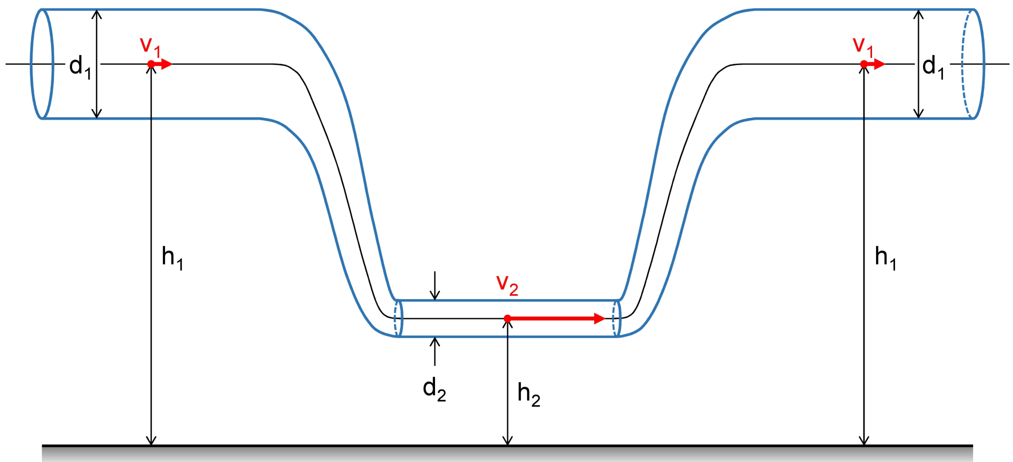
$$f_2'' = f_2 \frac{v + v_1}{v + v_2} = 1400\ \mathrm{Hz}\ \frac{340 \cdot 3.6 + 80}{340 \cdot 3.6 + 90} \doteq 1388\ \mathrm{Hz} \tag{5}$$

V prvním případě (vzájemně se přibližují) vnímají pozorovatelé v sanitce i v policejním voze vyšší frekvenci, ve druhém případě (vzájemně se vzdalují) slyší frekvenci nižší.

Příklad 4 - Proudění ideální kapaliny

Zadání: Voda protéká potrubím znázorněným na obrázku. Ve výšce $h_1 = 3$ m má potrubí průměr $d_1 = 30$ cm, ve výšce $h_2 = 1$ m má potrubí průměr $d_2 = 10$ cm. Na obou krajích působí atmosférický tlak $p_1 = 101.3$ kPa.
Jaká musí být rychlost proudění vody v_1, aby se ve spodní zúžené části voda vařila? Tlak nasycených vodních par při pokojové teplotě je $p_2 = 4.2$ kPa.

Poznámka: Počítejte s konstantním tíhovým zrychlením $g = 9.81$ m s^{-2}. Vodu považujte za ideální kapalinu o hustotě $\varrho = 1000$ kg m^{-3}.



Řešení: Proudění ideální tekutiny je popsáno rovnicí kontinuity a Bernoulliho rovnicí.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + h_1 \varrho g + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + h_2 \varrho g + p_2 \tag{2}$$

Z první rovnice si vyjádříme rychlost v_2 pomocí rychlosti v_1

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

dosadíme do druhé rovnice a dopočítáme rychlost v_1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + h_1 \varrho g + p_1 &= \frac{1}{2}\varrho v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2} + h_2 \varrho g + p_2 \\
\frac{1}{2}\varrho v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) &= (h_1 - h_2)\varrho g + p_1 - p_2 \\
v_1^2 &= \frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}\left(2(h_1 - h_2)g + \frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho}\right) \\
v_1 &= \sqrt{\frac{d_2^4}{d_1^4 - d_2^4}\left(2(h_1 - h_2)g + \frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho}\right)} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Číselně vychází velikost rychlosti $v_1 \doteq 1.71$ m s^{-1}.