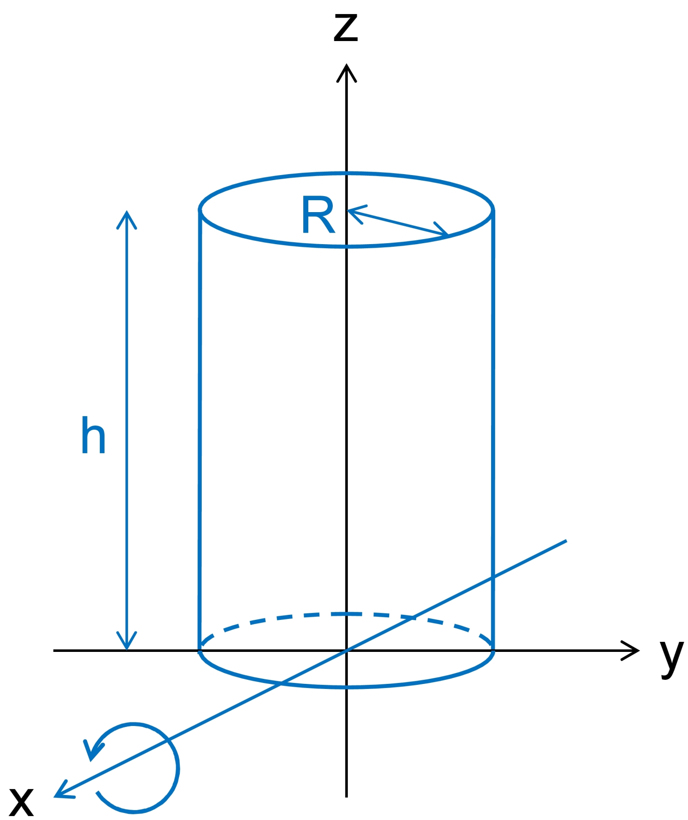
Řešení testu 2a

Mechanika a molekulová fyzika
NOFY021

středa 10. ledna 2024

Příklad 1 - Moment setrvačnosti válce

Zadání: Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k ose otáčení x, viz obrázek. Hmotnost válce je M, poloměr podstavy R a výška h.



Řešení: Moment setrvačnosti J homogenního tělesa vzhledem k obecné ose otáčení je dán objemovým integrálem:

$$J = \frac{M}{V} \int_V r_\perp^2 \, \mathrm{d}V, \tag{1}$$

kde $r_\perp$ je kolmá vzdálenost od osy otáčení. Pro osu otáčení x je $r_\perp = \sqrt{y^2 + z^2}$. Moment setrvačnosti J_x je potom roven:

$$J = \frac{M}{V} \int_V \left(y^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}V. \tag{2}$$

Stejný výraz bychom mimochodem dostali výpočtem diagonálního členu tenzoru setrvačnosti J_{xx}.

Pro výpočet objemového integrálu (2) použijeme cylindrické souřadnice (r, φ, z).

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Objem válce je $V = \pi R^2 h$, integrační meze pro válec jsou následující.

$$r \in [0, R]$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$
$$z \in [0, h]$$

Dosadíme do integrálu (2) a dopočítáme.

$$J_x = \frac{M}{\pi R^2 h}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h \left(r^2\sin^2\varphi + z^2\right)\, r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

$$J_x = \frac{M}{\pi R^2 h}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z + \frac{M}{\pi R^2 h}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h r\,z^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

$$J_x = \frac{M}{\pi R^2 h}\int\limits_0^R r^3\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^h 1\,\mathrm{d}z + \frac{M}{\pi R^2 h}\int\limits_0^R r\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^h z^2\,\mathrm{d}z$$

$$J_x = \frac{M}{\pi R^2 h}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\left[\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}[z]_0^h + \frac{M}{\pi R^2 h}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R[\varphi]_0^{2\pi}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h$$

$$J_x = \frac{M}{\pi R^2 h}\frac{R^4}{4}\cdot\pi\cdot h + \frac{M}{\pi R^2 h}\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{3}Mh^2 \tag{4}$$

Příklad 2 - Tlumený harmonický oscilátor

Zadání: Závaží na pružině tvoří tlumený harmonický oscilátor a koná mezní aperiodický pohyb. V čase $t = 0$ s je výchylka závaží $x_0 = 5$ cm a jeho rychlost $v_0 = 10$ cm s^{-1}. Tlumicí koeficient je $\delta = 2$ s^{-1}.
Vypočítejte, v jakém čase bude výchylka závaží maximální. Jaká je velikost maximální výchylky?

Řešení: Mezní aperiodický pohyb je obecně dán vztahem:

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t}. \tag{1}$$

Derivací podle času dostaneme časovou závislosti rychlosti.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -C_1 \delta e^{-\delta t} - C_2 \delta t e^{-\delta t} + C_2 e^{-\delta t} \tag{2}$$

Nyní dosaďme v čase $t = 0$ počáteční podmínky x_0 a v_0.

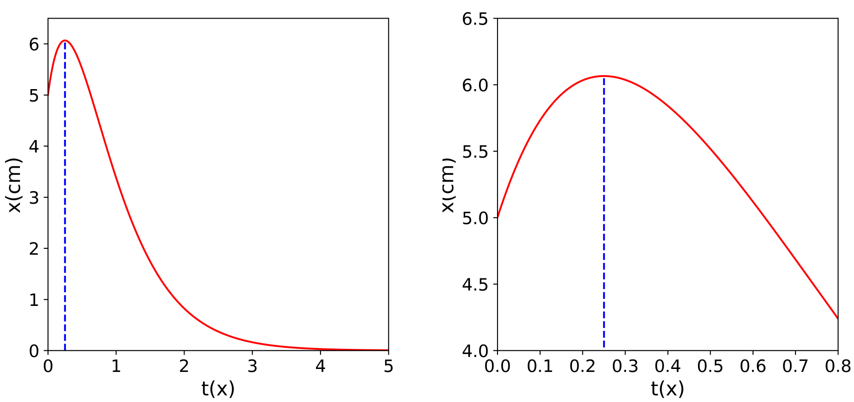
$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \\ v_0 &= -C_1 \delta + C_2 \Rightarrow C_2 = v_0 + x_0 \delta \end{aligned}$$

Časová závislost výchylky a rychlosti závaží jsou tedy:

$$x(t) = (x_0 + v_0 t + x_0 \delta t)\, e^{-\delta t} \tag{3}$$

$$v(t) = \left(v_0 - v_0 \delta t - x_0 \delta^2 t\right) e^{-\delta t} \tag{4}$$

Graf závislosti $x(t)$ je na obrázku.



Výchylka je maximální, je-li její derivace nulová, resp. je-li nulová okamžitá rychlost.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(v_0 - v_0 \delta t_{max} - x_0 \delta^2 t_{max}\right) e^{-\delta t_{max}} \\ 0 &= v_0 - v_0 \delta t_{max} - x_0 \delta^2 t_{max} \end{aligned}$$

$$t_{max} = \frac{v_0}{v_0 \delta + x_0 \delta^2} \tag{5}$$

$$t_{max} = 0.25 \text{ s} \tag{6}$$

Dosaďme čas t_{max} do rovnice (3) a vypočítejme maximální výchylku x_{max}.

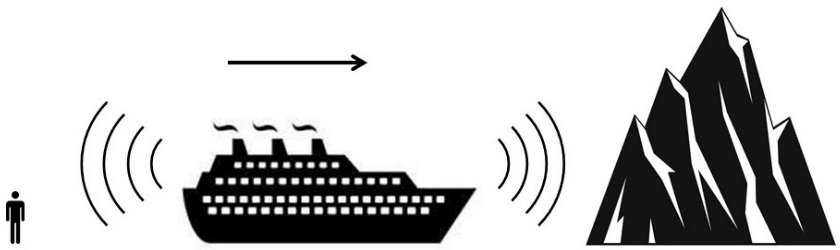
$$x_{max} = \left(x_0 + \frac{v_0^2}{v_0\delta + x_0\delta^2} + \frac{x_0 v_0}{v_0 + x_0\delta}\right) \exp\left(-\frac{v_0}{v_0 + x_0\delta}\right)$$

$$x_{max} = \frac{2x_0v_0\delta + x_0^2\delta^2 + v_0^2}{v_0\delta + x_0\delta^2} \exp\left(-\frac{v_0}{v_0 + x_0\delta}\right) \tag{7}$$

$$x_{max} \doteq 6.07 \text{ cm} \tag{8}$$

Příklad 3 - Dopplerův jev

Zadání: Loď plující rychlostí 5 m s^{-1} směrem ke skalisku zahouká lodní sirénou táhlý tón o frekvenci 340 Hz. Pozorovatel stojící na břehu slyší jednak samotný zvuk sirény a jednak jeho ozvěnu po odrazu od skaliska. Rychlost šíření zvuku je 340 m s^{-1}.
(a) Jakou frekvenci tónu sirény a jakou frekvenci jeho ozvěny uslyší pozorovatel na břehu?
(b) Jakou frekvenci tónu sirény a jakou frekvenci jeho ozvěny uslyší pasažér plující na lodi?



Řešení: Obecně je frekvence vlnění f, kterou vnímá pozorovatel, posunutá vůči původní frekvenci f_0 podle Dopplerova jevu:

$$f = f_0 \frac{v + v_p}{v + v_s}, \tag{1}$$

kde v je rychlost zvuku, v_p rychlost pozorovatele a v_s rychlost zdroje vlnění.
(a) Loď se od pozorovatele na břehu vzdaluje rychlostí $v_s = 5$ m s^{-1}, takže frekvence f_1 tónu lodní sirény, kterou vnímá pozorovatel bude *nižší* než frekvence f_0.

$$f_1 = f_0 \frac{v}{v + v_s} = 340 \text{ Hz} \frac{340}{340 + 5} \doteq 335 \text{ Hz} \tag{2}$$

V případě ozvěny se zdroj vlnění pohybuje směrem ke skále rychlostí $v_s = 5$ m s^{-1}, čili pozorovatel na skále by vnímal frekvenci f_2 *vyšší* než frekvence f_0. Vlnění odražené od skály, které vnímá pozorovatel na břehu, bude mít stejnou frekvenci f_2.

$$f_2 = f_0 \frac{v}{v - v_s} = 340 \text{ Hz} \frac{340}{340 - 5} \doteq 345 \text{ Hz} \tag{3}$$

Pozorovatel na břehu slyší zázněje o frekvenci $f_2 - f_1 = 10$ Hz.

(b) Pasažér na lodi je vůči zdroji vlnění v klidu, uslyší tedy tón o *stejné* frekvenci jako frekvence f_0.

$$f_3 = f_0 = 340 \text{ Hz} \tag{4}$$

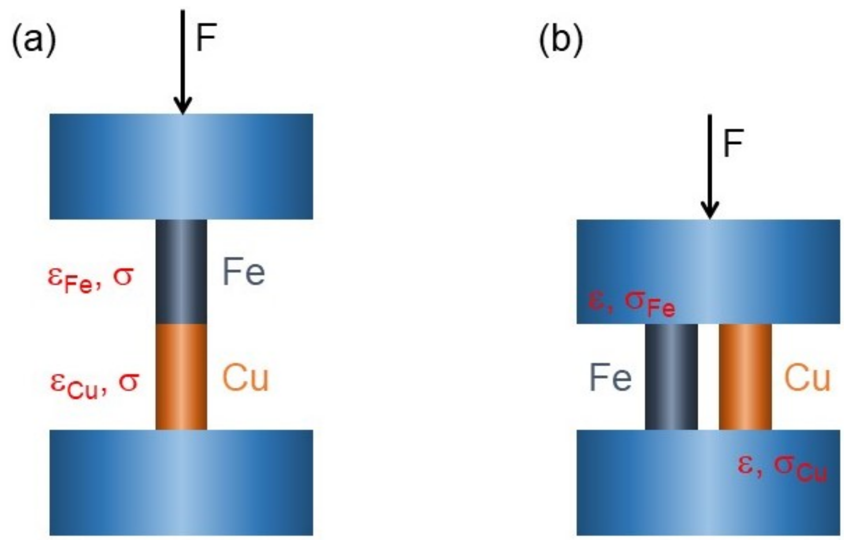
V případě ozvěny se pasažér pohybuje směrem ke skále rychlostí $v_p = 5$ m s^{-1} a pozoruje tedy frekvenci f_4 *vyšší* než původní frekvence ozvěny f_2.

$$f_4 = f_2 \frac{v + v_p}{v} = f_0 \frac{v}{v - v_s} \frac{v + v_p}{v} = 340 \text{ Hz} \frac{340}{340 - 5} \frac{340 + 5}{340} \doteq 350 \text{ Hz} \tag{5}$$

Pasažér na lodi uslyší taky zázněje o frekvenci $f_4 - f_3 = 10$ Hz, ale frekvence modulovaného tónu bude o 5 Hz vyšší než v případě pozorovatele na břehu.

Příklad 4 - Hydraulický lis

Zadání: Měděný a železný váleček o stejné výšce l a průměru podstavy d umístíme do hydraulického lisu (a) na sebe, (b) vedle sebe. Youngův modul pružnosti mědi je E_{Cu} a železa E_{Fe}. Jaké bude napětí ve válečcích, stlačujeme-li v obou případech lis konstantní silou F?



Řešení: (a) Pro válečky umístěné *za sebou* platí, že výsledná deformace ε je rovna součtu deformací $\varepsilon_{\mathrm{Fe}}$ železného a $\varepsilon_{\mathrm{Cu}}$ měděného válečku. Naopak napěťová síla F působí na oba válečky stejně. Vzhledem k jejich stejnému průřezu bude i napětí σ v obou válečcích stejné a rovné podílu síly F a průřezu válečku S.

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{Fe}} + \varepsilon_{\mathrm{Cu}} \tag{1}$$
$$\sigma = \sigma_{\mathrm{Fe}} = \sigma_{\mathrm{Cu}} \tag{2}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} \tag{3}$$

(b) Pro válečky umístěné *vedle sebe* je situace opačná. Deformace ε ocelového a měděného válečku je stejná. Naopak celková napěťová síla F je dána jako součet síly F_{Fe} působící na železný váleček a síly F_{Cu} působící na měděný váleček.

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{Fe}} = \varepsilon_{\mathrm{Cu}} \tag{4}$$
$$F = F_{\mathrm{Fe}} + F_{\mathrm{Cu}} \tag{5}$$

$$F = \sigma_{\mathrm{Fe}} S + \sigma_{\mathrm{Cu}} S$$
$$\frac{4F}{\pi d^2} = \sigma_{\mathrm{Fe}} + \sigma_{\mathrm{Cu}} \tag{6}$$

Využijeme-li nyní Hookova zákona

$$\varepsilon_{\mathrm{Fe}} = \frac{\sigma_{\mathrm{Fe}}}{E_{\mathrm{Fe}}}$$
$$\varepsilon_{\mathrm{Cu}} = \frac{\sigma_{\mathrm{Cu}}}{E_{\mathrm{Cu}}}$$

dostaneme z rovnice (4) vztah pro napětí σ_{Fe} v železném válečku a σ_{Cu} v měděném válečku:

$$\frac{\sigma_{\mathrm{Fe}}}{E_{\mathrm{Fe}}} = \frac{\sigma_{\mathrm{Cu}}}{E_{\mathrm{Cu}}} \Rightarrow \sigma_{\mathrm{Cu}} = \sigma_{\mathrm{Fe}} \frac{E_{\mathrm{Cu}}}{E_{\mathrm{Fe}}} \tag{7}$$

Nyní můžeme již dosadit do rovnice (6) a dopočítat velikosti napětí σ_{Fe} a σ_{Cu}.

$$\frac{4F}{\pi d^2} = \sigma_{\mathrm{Fe}} \left(1 + \frac{E_{\mathrm{Cu}}}{E_{\mathrm{Fe}}}\right)$$

$$\sigma_{\mathrm{Fe}} = \frac{4F}{\pi d^2} \frac{E_{\mathrm{Fe}}}{E_{\mathrm{Fe}} + E_{\mathrm{Cu}}} \tag{8}$$

$$\sigma_{\mathrm{Cu}} = \frac{4F}{\pi d^2} \frac{E_{\mathrm{Cu}}}{E_{\mathrm{Fe}} + E_{\mathrm{Cu}}} \tag{9}$$

Poznamenejme, že tato úloha je svým řešením analogická k řešení elektrických obvodů (paralelní resp. sériové zapojení).