Řešení testu 1a

Mechanika a molekulová fyzika
NOFY021

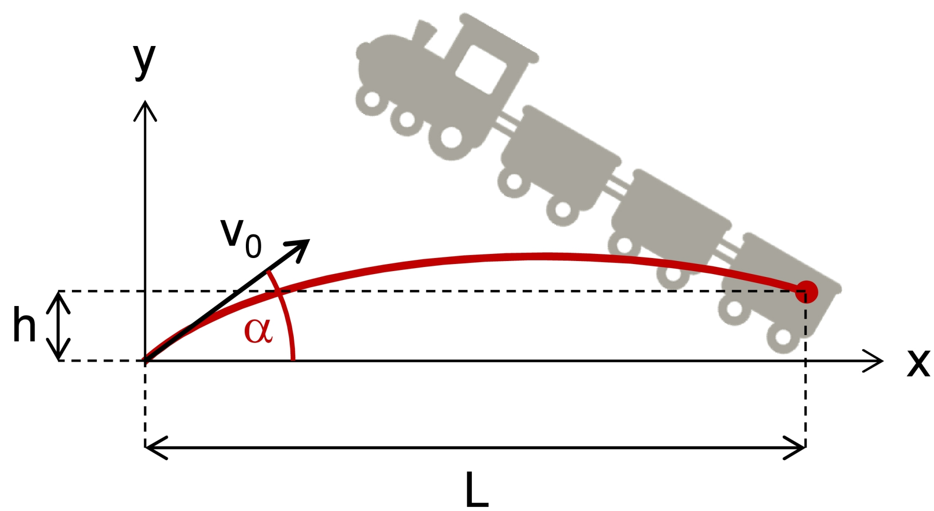
středa 22. listopadu 2023

Příklad 1 - Střelba na vlak

Zadání: Na divokém západě došlo k přepadení vlaku indiány. Indián, který ležel ve vzdálenosti $L = 1$ km, vystřelil na (stojící) vlak ve směru kolmém ke kolejím. Vystřelená kulka vyletěla rychlostí $v_0 = 250$ m s^{-1} a zasáhla jeden z vagonů vlaku ve výšce $h = 4$ m nad zemí. Vypočítejte velikost úhlu $\alpha < 45°$, pod kterým indián na vlak vystřelil. (Úhel α svírají vektor počáteční rychlosti s vodorovnou osou.)

Poznámka: Počítejte s tíhovým zrychlením o velikosti $g = 9.81$ m s^{-2}, odpor vzduchu zanedbejte. Při výpočtu použijte následující identitu.

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$$



Řešení: Vystřelená kulka koná šikmý vrh, jehož trajektorie je obecně daná následujícími rovnicemi.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y} - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_x(t) &= v_{0x} \\ v_y(t) &= v_{0y} - gt \end{aligned}$$

Dosazením počátečních podmínek

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \\ v_{x0} &= v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} &= v_0 \sin\alpha \end{aligned}$$

dostaneme parametrické rovnice trajektorie letu kulky.

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

V neznámém čase T zasáhne kulka vlak v bodě daném souřadnicemi $x = L$, $y = h$.

$$x(T) = L = v_0 T \cos\alpha, \tag{3}$$

$$y(T) = h = v_0 T \sin\alpha - \frac{1}{2} g T^2 \tag{4}$$

Z první rovnice si vyjádříme čas T a dosadíme do druhé rovnice.

$$T = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} \tag{5}$$

$$h = v_0 \frac{L}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{v_0 \cos\alpha} \right)^2$$

$$h = L\mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$h = L\mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2} \left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha \right)$$

$$0 = \frac{gL^2}{2v_0^2} \mathrm{tg}^2\alpha - L\mathrm{tg}\alpha + h + \frac{gL^2}{2v_0^2} \tag{6}$$

Poslední rovnice je kvadratickou rovnicí s neznámou tgα, jejíž kořeny jsou:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2\frac{gL^2}{2v_0^2}} \left[L \pm \sqrt{L^2 - 4\frac{gL^2}{2v_0^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v_0^2} \right)} \right]$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gL^2} \left[L \pm L\sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v_0^2} \right)} \right]$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gL} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2hg}{v_0^2} - \frac{g^2 L^2}{v_0^4}} \right) \tag{7}$$

$$\mathrm{tg}\alpha_1 \doteq 12.659 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \doteq 85.5^\circ \tag{8}$$

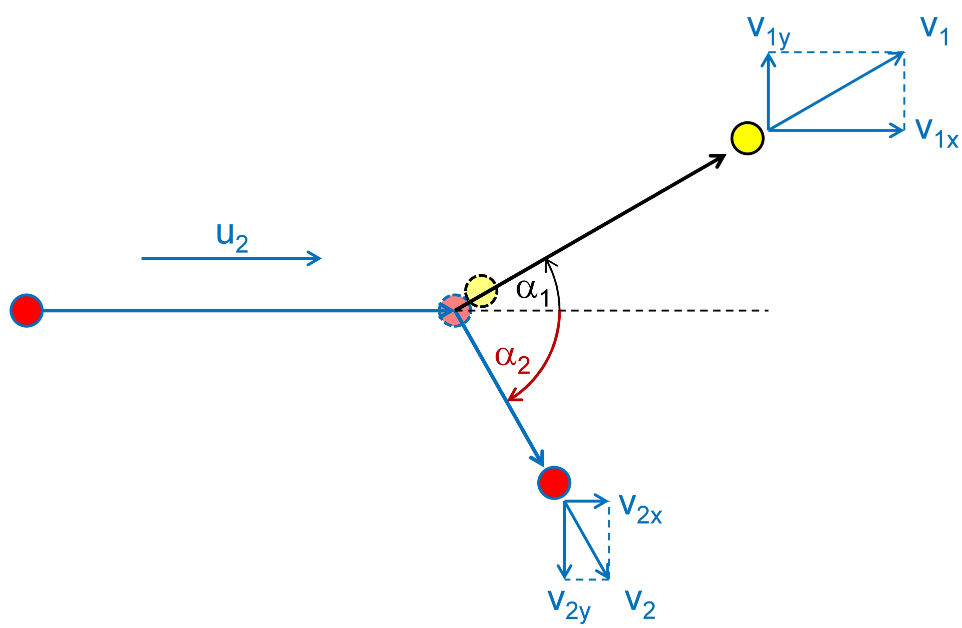
$$\mathrm{tg}\alpha_2 \doteq 0.083 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \doteq 4.7^\circ \tag{9}$$

Indián tedy vystřelil pod úhlem 4.7° vzhledem k zemi.

Příklad 2 - Curlingové kameny

Zadání: Červený curlingový kámen narazí do stojícího žlutého kamene rychlostí 1 m s^{-1}. Po jejich srážce se žlutý kámen pohybuje ve směru, který svírá s původním směrem pohybu červeného kamene úhel α_1. Jaký je směr pohybu červeného kamene po srážce? Počítejte nejprve obecně a poté číselně pro $\alpha_1 = 20°$.

Poznámka: Srážku považujte za dokonale pružnou. Oba kameny mají stejnou hmotnost, jejich rozměry a rotaci zanedbáváme.



Řešení: Označme rychlost červeného kamene před srážkou jako u_2, rychlost žlutého kamene po srážce jako v_1 a rychlost červeného kamene po srážce jako v_2. Pro pružnou srážku platí zákony zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie. V případě hybnosti se zachovávají její x-ová i y-ová složka, neboli:

$$\begin{aligned} p_{0x} &= p_{1x} + p_{2x} \\ mu_2 &= mv_{1x} + mv_{2x} \\ u_2 &= v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} p_{0y} &= p_{1y} + p_{2y} \\ 0 &= mv_{1y} - mv_{2y} \\ 0 &= v_1 \sin\alpha_1 - v_2 \sin\alpha_2 \end{aligned} \tag{2}$$

V případě energií se zachovávají kinetické energie, neboli:

$$
\begin{aligned}
E_{k0} &= E_{k1} + E_{k2} \\
\frac{1}{2} m u_2^2 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \\
u_2^2 &= v_1^2 + v_2^2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Řešíme tedy soustavu rovnic (1)–(3) s neznámými v_1, v_2, α_2. Z rovnice (2) si můžeme vyjádřit sinus úhlu α_2 jako:

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_1}{v_2} \sin \alpha_1. \qquad (4)$$

Rovnici (1) si můžeme vhodně upravit, umocnit na druhou a využít známé identity $\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 = 1$.

$$
\begin{aligned}
u_2 - v_1 \cos \alpha_1 &= v_2 \cos \alpha_2 \\
(u_2 - v_1 \cos \alpha_1)^2 &= (v_2 \cos \alpha_2)^2 \\
u_2^2 - 2 u_2 v_1 \cos \alpha_1 + v_1^2 \cos^2 \alpha_1 &= v_2^2 \left(1 - \sin^2 \alpha_2\right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Dosadíme rovnici (4):

$$
\begin{aligned}
u_2^2 - 2 u_2 v_1 \cos \alpha_1 + v_1^2 \cos^2 \alpha_1 &= v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2} \sin^2 \alpha_1\right) \\
u_2^2 - 2 u_2 v_1 \cos \alpha_1 + v_1^2 \cos^2 \alpha_1 &= v_2^2 - v_1^2 \sin^2 \alpha_1. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Z rovnice (3) si vyjádříme v_2^2:

$$v_2^2 = u_2^2 - v_1^2 \qquad (7)$$

a dosadíme do rovnice (6).

$$
\begin{aligned}
u_2^2 - 2 u_2 v_1 \cos \alpha_1 + v_1^2 \cos^2 \alpha_1 &= u_2^2 - v_1^2 - v_1^2 \sin^2 \alpha_1 \\
-2 u_2 v_1 \cos \alpha_1 + v_1^2 \cos^2 \alpha_1 &= -v_1^2 - v_1^2 \sin^2 \alpha_1 \\
-2 u_2 v_1 \cos \alpha_1 &= -v_1^2 \left(1 + \sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1\right) \\
u_2 \cos \alpha_1 &= v_1 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Výsledek dosadíme zpět do rovnice (7).

$$
\begin{aligned}
v_2^2 &= u_2^2 - u_2^2 \cos^2 \alpha_1 \\
v_2 &= u_2 \sin \alpha_1 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Nakonec dosaďme vztahy (8) a (9) zpět do rovnice (4) a spočítejme úhel α_2.

$$
\begin{aligned}
\sin \alpha_2 &= \frac{u_2 \cos \alpha_1}{u_2 \sin \alpha_1} \sin \alpha_1 \\
\sin \alpha_2 &= \cos \alpha_1 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

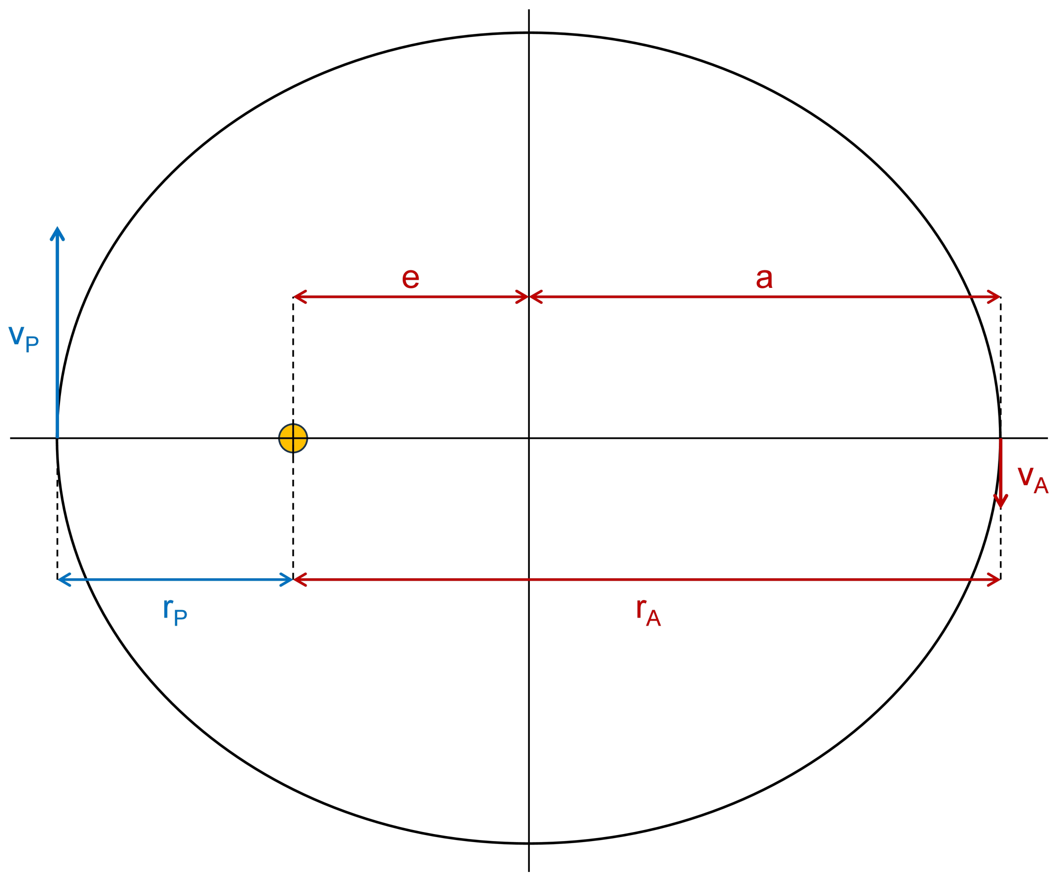
$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \qquad (11)$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 70^\circ \qquad (12)$$

Příklad 3 - Muskova planetka X

Zadání: Elon Musk objevil novou planetku X, pohybující se v gravitačním poli Slunce po eliptické trajektorii. V periheliu je planetka vzdálená od Slunce právě polovinu astronomické jednotky a pohybuje se rychlostí rovné $\sqrt{3}$-násobku oběžné rychlosti Země.
V jakém vzdálenosti od Slunce je potenciální energie planetky největší?
Jaká je celková mechanická energie planetky v tomto bodě?
Jaká je oběžná doba planetky X?

Poznámka: Vliv gravitace jiných těles než Slunce zanedbejte. Oběžnou dráhu Země považujte za dokonalou kružnici o poloměru $R = 1$ AU.



Řešení: Potenciální energie planetky v centrálním gravitačním poli Slunce je dána jako:

$$E_p = -\frac{GM_S m_X}{r}, \tag{1}$$

kde G je gravitační konstanta M_S je hmotnost Slunce a m_X je hmotnost planetky. Z rovnice (1) vidíme, že potenciální energie roste s rostoucí vzdáleností od Slunce, maximální tedy bude v maximální vzdálenosti od Slunce, tedy v afeliu. Při pohybu planetky se zachovává celková mechanická energie, která je tedy ve všech bodech stejná jako v periheliu.

Vzdálenost v periheliu známe ze zadání jako $r_P = \frac{1}{2}R$. Rychlost v periheliu $v_P = \sqrt{3}v_Z$ je zadaná pomocí oběžné rychlosti Země v_Z. Pro kruhový pohyb platí rovnost dostředivé a gravitační síly.

$$\begin{aligned} F_d &= F_g \\ M_Z \frac{v_Z^2}{R} &= \frac{GM_S M_Z}{R^2} \\ v_Z &= \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \end{aligned} \tag{2}$$

Celková mechanická energie (v perihelu) je tedy:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_X v_P^2 - \frac{GM_S m_X}{r_P} \\ E &= \frac{1}{2}m_X \frac{3GM_S}{R} - \frac{2GM_S m_X}{R} \\ E &= -\frac{GM_S m_X}{2R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Z celkové mechanické energie můžeme vypočítat vzdálenost v afeliu r_A. Neznámou rychlost v afeliu v_A určíme pomocí 2. Keplerova zákona.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r_P v_P &= \frac{1}{2}r_A v_A \\ v_A &= v_P \frac{r_P}{r_A} \end{aligned} \tag{4}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{3GM_S}{R}}\frac{R}{2r_A} \tag{5}$$

Celková mechanická energie (v afeliu) je rovna:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_X v_A^2 - \frac{GM_S m_X}{r_A} \\ -\frac{GM_S m_X}{2R} &= \frac{1}{2}m_X \frac{3GM_S}{R}\frac{R^2}{4r_A^2} - \frac{GM_S m_X}{r_A} \\ -\frac{1}{2R} &= \frac{3R}{8r_A^2} - \frac{1}{r_A} \\ 0 &= \frac{1}{2R}r_A^2 - r_A + \frac{3R}{8}. \end{aligned} \tag{6}$$

Poslední rovnice má dva kořeny r_A:

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{1}{2\frac{1}{2R}}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{1}{2R}\frac{3R}{8}}\right) \\ r_A &= R\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}}\right) \\ r_A &= R\left(1 \pm \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

z nichž jeden odpovídá afeliu a druhý (pochopitelně) periheliu:

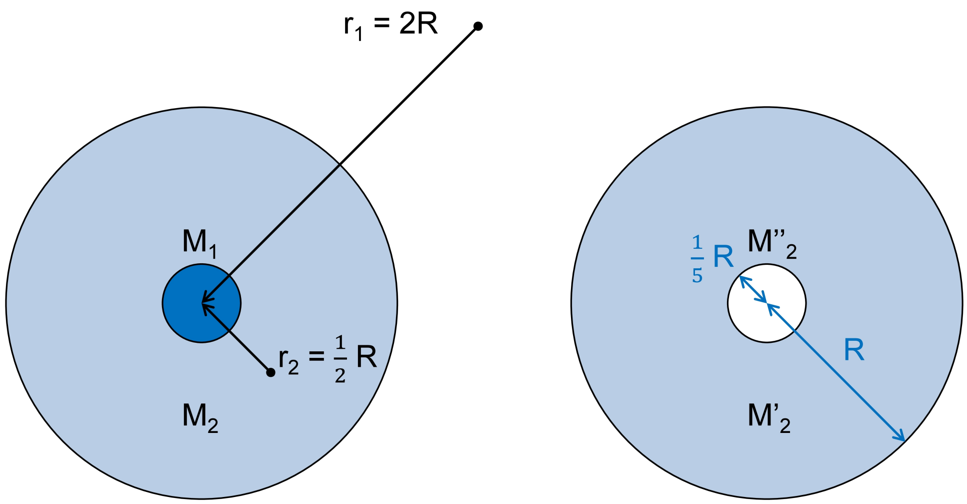
$$r_{A1} = r_A = \frac{3}{2}R \tag{8}$$

$$r_{A2} = r_P = \frac{1}{2}R \tag{9}$$

Délka hlavní poloosy je dána jako polovina součtu vzdáleností v periheliu a v afeliu, viz obrázek, je tedy přesně rovna 1 astronomické jednotce. Ze 3. Keplerova zákona vyplývá, že oběžná doba planetky X je stejná jako oběžná doba Země, tedy 1 rok.

Příklad 4 - Gravitační pole koule s těžkým jádrem

Zadání: Je dána koule o poloměru R o hmotnosti M. Koule sestává z jádra o poloměru $\frac{1}{5}R$ a o hmotnosti M_1, která tvoří $\frac{1}{30}$ hmotnosti koule. Vypočítejte velikost gravitačního zrychlení:
(a) vně koule ve vzdálenosti $r_1 = 2R$ od středu koule.
(b) uvnitř koule ve vzdálenosti $r_2 = \frac{1}{2}R$ od středu koule.



Řešení: Označme si popořadě jako M_1 hmotnost jádra, M_2 hmotnost pláště, M_2' hmotnost „lehčí" plné koule o stejné hustotě jako je hustota pláště a M_2'' hmotnost „lehkého" jádra o stejné hustotě jako je hustota pláště.

$$M_1 = \frac{1}{30}M \tag{1}$$

$$M_2 = M - M_1 = \frac{29}{30}M \tag{2}$$

$$M_2' = \varrho_2 V = \frac{M_2}{V - V_1}V = M_2 \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{5}\right)^3}$$

$$M_2' = \frac{29}{30}\cdot\frac{125}{124}M \tag{3}$$

$$M_2'' = \varrho_2 V_1 = \frac{M_2}{V - V_1}V_1 = M_2 \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{5}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{5}\right)^3}$$

$$M_2'' = \frac{29}{30}\cdot\frac{1}{124}M \tag{4}$$

Gravitační pole v kterémkoli bodě můžeme zapsat jako součet pole od jádra, pole od „lehčí" plné koule a záporného pole od „lehkého" jádra. Velikost intenzity gravitačního pole (gravitačního zrychlení) homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R ve vzdálenosti r od středu koule je dána jako:

$$\text{vně:} \quad K(r) = \frac{Gm}{r^2} \tag{5}$$

$$\text{uvnitř:} \quad K(r) = \frac{Gm}{R^3} r \tag{6}$$

Gravitační zrychlení ve vzdálenosti $r_1 = 2R$ je potom:

$$a_g(r_1) = K(r_1) = \frac{GM_1}{r_1^2} + \frac{GM_2'}{r_1^2} - \frac{GM_2''}{r_1^2}$$

$$K(r_1) = \frac{GM}{r_1^2}\left(\frac{1}{30} + \frac{29}{30} \cdot \frac{125}{124} - \frac{29}{30} \cdot \frac{1}{124}\right)$$

$$K(r_1) = \frac{GM}{r_1^2} \tag{7}$$

$$K(r_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{GM}{R^2} \tag{8}$$

Gravitační zrychlení ve vzdálenosti $r_2 = \frac{1}{2}R$ je potom:

$$a_g(r_2) = K(r_2) = \frac{GM_1}{r_2^2} + \frac{GM_2'}{R^3} r_2 - \frac{GM_2''}{r_2^2}$$

$$K(r_2) = \frac{GM}{R^2}\left(4 \cdot \frac{1}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{125}{124} - 4 \cdot \frac{29}{30} \cdot \frac{1}{124}\right)$$

$$K(r_2) = \frac{GM}{R^2}\left(\frac{4}{30} + \frac{725}{1488} - \frac{29}{930}\right)$$

$$K(r_2) = \frac{GM}{R^2} \frac{5952 + 21750 - 1392}{30 \times 31 \times 48}$$

$$K(r_2) = \frac{877}{1488} \frac{GM}{R^2} \tag{9}$$

$$K(r_2) \doteq 0.59 \frac{GM}{R^2} \tag{10}$$

Vidíme, že gravitační pole vně koule s jádrem je stejné jako gravitační pole homogenní koule, tj. nezávisí na rozložení hmoty koule, které je sféricky symetrické vůči středu koule. Naopak gravitační pole uvnitř koule v tomto případě na rozložení hmoty závisí.