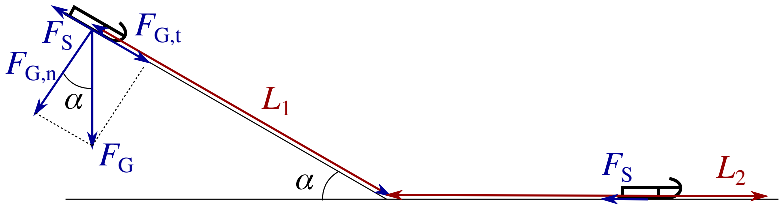
Fyzika 1: test 1

20. 11. 2023, 14:00, T6

1. Dítě na saních se rozjede z kopce se sklonem $\alpha = 5°$. Po ujetí vzdálenosti $L_1 = 20$ m kopec přechází v rovinu, po které saně ujedou ještě vzdálenost $L_2 = 30$ m a zastaví se. Jaký je koeficient smykového tření f mezi saněmi a sněhem?

Řešení: Ve směru tečném ke kopci působí na saně tečná složka tíhové síly $mg \sin\alpha$ a třecí síla, úměrná normálové složce tíhové síly a koeficientu tření, $mgf \cos\alpha$. Ve druhé části dráhy pouze třecí síla mgf.



Úloha se dá řešit dvěma způsoby, buď ze zachování energie nebo z pohybových rovnic. První metoda je založená na tom, že celková mechanická energie se zachovává, až na práci vykonanou třecí silou. Na začátku i na konci jízdy saně stojí, mechanická energie je tedy rovna potenciální. Zvolíme-li nulovou hladinu potenciální energie $E_{P,2} = 0$, potom $E_{P,0} = mgL_1 \sin\alpha$ a třecí síla musí disipovat celou tuto energii. Práce vykonaná třecí silou je rovna $W = F_{S,1}L_1 + F_{S,2}L_2$. Tedy,

$$E_{P,0} = E_{P,2} + W, \tag{1}$$

$$mgL_1 \sin\alpha = L_1 mgf \cos\alpha + L_2 mgf, \tag{2}$$

$$f = \frac{L_1 \sin\alpha}{L_1 \cos\alpha + L_2}, \tag{3}$$

což je řešení úlohy.

Druhá metoda začíná zformulováním pohybových rovnic pomocí Newtonova zákona:

$$ma_1(t) = F_1(t) = mg \sin\alpha - mgf \cos\alpha \tag{4}$$

$$ma_2(t) = F_2(t) = -mgf. \tag{5}$$

Obě rovnice popisují rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb. Řešením rovnice (4) získáme

$$v(t) = v(0) + gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) \qquad \text{pro } t < T_1, \tag{6}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} g(\sin\alpha - f\cos\alpha)T_1^2, \tag{7}$$

kde jsme si označili T_1 čas potřebný k uražení vzdálenosti L_1. Ze soustavy vyjádříme

$$v^2(T_1) = 2L_1 g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{8}$$

Řešením rovnice (5) získáme

$$v(t) = v(T_1) - (t - T_1)gf \qquad \text{pro } T_1 < t < T_2 \tag{9}$$

$$L_2 = v(T_1)\,T_2 - \frac{1}{2} gfT_2^2, \tag{10}$$

kde T_2 je čas potřebný k uražení vzdálenosti L_2. Na konci dráhy se saně zastaví, tedy

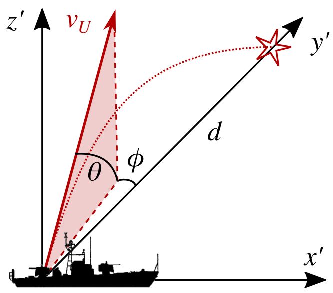
$$0 = v(T_1 + T_2) = v(T_1) - gfT_2 \tag{11}$$

$$L_2 = \frac{v^2(T_1)}{gf} - \frac{v^2(T_1)}{gf} \tag{12}$$

Dosazením rovnice (8) dostaneme

$$f = \frac{L_1 \sin\alpha}{L_2 + L_1 \cos\alpha} = 0.035. \tag{13}$$

2. Vojenská loď pluje rychlostí $v_\mathrm{L} = 15$ m/s rovnoběžně s pobřežím. Na pobřeží, právě kolmo od lodi ve vzdálenosti $d = 5$ km je terč. Pod jakými úhly θ mezi směrem výstřelu a vodorovnou rovinou a ϕ mezi rovinou výstřelu a spojnicí s pobřežím musí loď vystřelit, jestliže úsťová rychost jejího děla je $v_\mathrm{U} = 500$ m/s? O kolik by minula, pokud by střílela po kolmici k pobřeží ($\phi = 0$)? Zanedbejte odpor vzduchu a efekty rotace Země.



Řešení: Složky rychlosti střely v soustavě spojené s lodí si označíme $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}$, jak je naznačeno na obrázku, a v soustavě spojené se zemí v_x, v_y, v_z. Obě soustavy budou mít počátek v poloze děla v okamžiku výstřelu $t = 0$. V tomto okamžiku bude

$$v_z(0) = v_{z'}(0) = v_\mathrm{U} \sin\theta, \tag{14}$$
$$v_y(0) = v_{y'}(0) = v_\mathrm{U} \cos\theta \cos\phi, \tag{15}$$
$$v_x(0) = v_{x'}(0) + v_\mathrm{L} = -v_\mathrm{U} \cos\theta \sin\phi + v_\mathrm{L}. \tag{16}$$

Zanedbáváme odpor vzduchu, takže na střelu působí pouze tíhová síla $\boldsymbol{F} = (0, 0, -mg)$. Z Newtonova zákona dostaneme

$$a_z(t) = -g \qquad v_z(t) = v_z(0) - gt \qquad z(t) = z(0) + v_z(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_\mathrm{U} t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \tag{17}$$
$$a_y(t) = 0 \qquad v_y(t) = v_y(0) \qquad y(t) = y(0) + v_y(0)t = v_\mathrm{U} t \cos\theta \cos\phi \tag{18}$$
$$a_x(t) = 0 \qquad v_x(t) = v_x(0) \qquad x(t) = x(0) + v_x(0)t = -v_\mathrm{U} t \cos\theta \sin\phi + v_\mathrm{L} t \tag{19}$$

V okamžiku dopadu v čase T bude $(x, y, z) = (0, d, 0)$. Z rovnic (18) a (19) vyjádříme

$$T = \frac{d}{v_\mathrm{U} \cos\theta \cos\phi}, \qquad \sin\phi = \frac{v_\mathrm{L}}{v_\mathrm{U} \cos\theta}. \tag{20}$$

Dosazením za $t = T$ a $z(T) = 0$ do rovnice (17) dostaneme

$$\sin\theta \cos\theta \cos\phi = \frac{gd}{2v_\mathrm{U}^2}. \tag{21}$$

Rovnici umocníme na druhou, využijeme vzorec $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ a dosadíme za $\sin\phi$,

$$(1 - \cos^2\theta)\cos^2\theta(1 - \sin^2\phi) = \frac{g^2 d^2}{2v_\mathrm{U}^4}, \tag{22}$$
$$(\cos^2\theta - \cos^4\theta)\left(1 - \frac{v_\mathrm{L}^2}{v_\mathrm{U}^2 \cos^2\theta}\right) = \frac{g^2 d^2}{4v_\mathrm{U}^4}, \tag{23}$$
$$0 = \cos^4\theta - \left(1 + \frac{v_\mathrm{L}^2}{v_\mathrm{U}^2}\right)\cos^2\theta + \frac{v_\mathrm{L}^2}{v_\mathrm{U}^2} + \frac{g^2 d^2}{4v_\mathrm{U}^4}. \tag{24}$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici a dostaneme

$$\cos^2\theta_{1,2} = \frac{v_\mathrm{U}^2 + v_\mathrm{L}^2}{2v_\mathrm{U}^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(v_\mathrm{U}^2 + v_\mathrm{L}^2\right)^2}{v_\mathrm{U}^4} - 4\frac{v_\mathrm{L}^2}{v_\mathrm{U}^2} - \frac{g^2 d^2}{v_\mathrm{U}^4}} \tag{25}$$
$$= \frac{v_\mathrm{U}^2 + v_\mathrm{L}^2}{2v_\mathrm{U}^2} \pm \frac{1}{2v_\mathrm{U}^2}\sqrt{\left(v_\mathrm{U}^2 - v_\mathrm{L}^2\right)^2 - g^2 d^2} = 0.5005 \pm 0.4898, \tag{26}$$

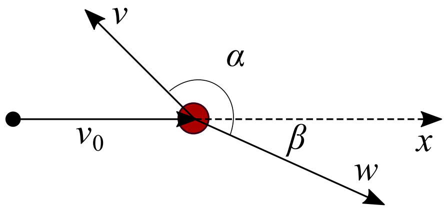
Máme dvě řešení, úhel θ_1 je malý, θ_2 blízký 90°. Rozumný dělostřelec si vybere řešení $\cos\theta_1 = 0.9951, \theta_1 = 5.7°$. Dosazením do (20) dostaneme

$$\sin\phi = \frac{15}{500 \cdot 0.9951} = 0.030, \qquad \phi = 1.7°. \tag{27}$$

Odchylka při zanedbání rychlosti lodi je vzdálenost, kterou urazí loď za dobu letu střely,

$$\delta = v_\mathrm{L} T = \frac{15\ \mathrm{ms}^{-1} \cdot 5000\ \mathrm{m}}{500\ \mathrm{ms}^{-1} \cdot 0.9951 \cdot 0.9995} = 151\ \mathrm{m}. \tag{28}$$

3. Jádro vodíku ^{1}H se pohybovalo rovnoběžně s osou $\boldsymbol{x}$ rychlostí $v_0 \ll c$ a srazilo se s jádrem helia ^{4}He, jehož rychlost můžeme oproti v_0 zanedbat. Po srážce jsme detekovali obě vylétající jádra. Jedno opustilo místo srážky pod úhlem $\alpha = 135°$ a druhé pod úhlem $\beta = -17°$ vůči ose $\boldsymbol{x}$. Určete, které jádro mohlo letět pod kterým úhlem a zda šlo o pružnou nebo nepružnou srážku v rámci chyby měření úhlu $\beta = 0.5°$. Zanedbejte rozdíl ve hmotnosti protonu a neutronu, tj. $m_{\mathrm{He}} = 4m_{\mathrm{H}} = 4m$.



Řešení: Můžeme odhadnout, že jádro vodíku se odrazilo zpátky pod úhlem α, druhá možná konfigurace odporuje intuici. Přesto si rychlosti jader po srážce označíme obecně v, w a jejich hmotnosti m_v, m_w a uvidíme, co k tomu říkají zákony zachování.

$$\text{Zachování hybnosti ve směru } \boldsymbol{x}: \quad mv_0 = m_v v\cos\alpha + m_w w\cos\beta, \tag{29}$$

$$\text{zachování hybnosti ve směru } \boldsymbol{y}: \quad 0 = m_v v\sin\alpha + m_w w\sin\beta, \tag{30}$$

$$\text{zachování energie}: \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m_v v^2 + \frac{1}{2}m_w w^2 + E_{\mathrm{miss}}. \tag{31}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$v = \frac{1}{\cos\alpha - \sin\alpha\cot\beta}\frac{mv_0}{m_v} = 0.6228\frac{mv_0}{m_v}, \qquad w = \frac{1}{\cos\beta - \sin\beta\cot\alpha}\frac{mv_0}{m_w} = 1.506\frac{mv_0}{m_w}. \tag{32}$$

Dosazením do zbývající rovnice a její úpravou ostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 0.6228^2\frac{m^2v_0^2}{2m_v} + 1.506^2\frac{m^2v_0^2}{2m_w} + E_{\mathrm{miss}}, \tag{33}$$

$$\frac{E_{\mathrm{miss}}}{E_0} = 1 - 0.6228^2\frac{m}{m_v} - 1.506^2\frac{m}{m_w}. \tag{34}$$

V případě, že by parametry v, α patřily jádru helia a w, β vodíku, dostali bychom $E_{\mathrm{miss}} = -1.4E_0$, soustava by tedy při srážce musela dostat nějakou energii navíc, místo aby ji ztratila, jinak by nebyly splněny zákony zachování.

Pokud by to bylo napak, jak jsme odhadli, dostaneme $E_{\mathrm{miss}} = 0.045E_0$. Nějaká malá energie tedy chybí. Dosazením $\beta = 17.5°$ zjistíme, zda je významná v rámci přesnosti měření.

$$\frac{E'_{\mathrm{miss}}}{E_0} = 1 - 0.6512^2\frac{m}{m} - 1.5314^2\frac{m}{4m} = -0.01. \tag{35}$$

V rámci přesnosti měření a výpočtu tedy srážka byla pružná.

4. Nově objevená planetka prošla periheliem ve vzdálenosti $r_\mathrm{p} = 0.4$ AU od Slunce a přitom byla naměřena její rychlost $v_\mathrm{p} = 2v_\mathrm{Z}$, kde v_Z je rychlost Země. Vyjádřete vztah pro rozdíl potenciální energie planetky v periheliu a afeliu. Určete její vzdálenost od Slunce v afeliu a oběžnou dobu τ (v AU a letech). Oběžnou dráhu Země považujte za dokonalou kružnici o poloměru 1 AU a oběžné době 1 rok.

Řešení: 1. Keplerův zákon říká, že planetka se pohybuje po elipse se Sluncem v ohnisku. Potenciální energie planetky (položíme-li nulovou hladinu potenciální energie do nekonečné vzdálenosti od Slunce) je podle gravitačního zákona

$$E_\mathrm{P}(r) = \varphi(r)\, m = -\frac{\kappa M m}{r}, \tag{36}$$

kde κ je gravitační konstanta, M a m hmotnosti Slunce a planetky, a r její vzdálenost od Slunce. To platí v jakémkoliv bodě její dráhy, rozdíl mezi afeliem a periheliem bude

$$E_\mathrm{P}(r_\mathrm{a}) - E_\mathrm{P}(r_\mathrm{p}) = \kappa M m\left(-\frac{1}{r_\mathrm{a}} + \frac{1}{r_\mathrm{p}}\right) = \kappa M m\frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a} r_\mathrm{p}}, \tag{37}$$

Celková mechanická energie je

$$E = -\frac{\kappa M m}{r} + \frac{1}{2} m[v(r)]^2, \tag{38}$$

kde $v(r)$ je rychlost planetky, která závisí na její aktuální vzdálenosti od Slunce, protože celková mechanická energie se v gravitačním poli zachovává. Energie je tedy stejná v periheliu i v afeliu a platí,

$$-\frac{\kappa M}{r_\mathrm{p}} + \frac{1}{2} v_\mathrm{p}^2 = -\frac{\kappa M}{r_\mathrm{a}} + \frac{1}{2} v_\mathrm{a}^2, \tag{39}$$

Ze 2. Keplerova zákona víme, že plošná rychlost je konstantní, speciálně pro perihelium a afelium platí

$$\frac{1}{2} r_\mathrm{p} v_\mathrm{p} = \frac{1}{2} r_\mathrm{a} v_\mathrm{a} \qquad \Rightarrow \qquad v_\mathrm{a} = \frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}} v_\mathrm{p}. \tag{40}$$

Dosazením do rovnice (39) a její úpravou dostaneme

$$-\frac{\kappa M}{r_\mathrm{p}} + \frac{1}{2} v_\mathrm{p}^2 = -\frac{\kappa M}{r_\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\frac{r_\mathrm{p}^2}{r_\mathrm{a}^2} v_\mathrm{p}^2, \tag{41}$$

$$\frac{v_\mathrm{p}^2}{2}\frac{r_\mathrm{a}^2 - r_\mathrm{p}^2}{r_\mathrm{a}^2} = \kappa M\frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a} r_\mathrm{p}}, \tag{42}$$

$$\frac{v_\mathrm{p}^2}{2}\frac{r_\mathrm{a} + r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}} = \kappa M\frac{1}{r_\mathrm{p}}. \tag{43}$$

Poslední úpravu (násobení $r_\mathrm{a}/(r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p})$) jsme mohli bez obav provést, protože $r_\mathrm{a} > r_\mathrm{p} > 0$. Nakonec dostáváme

$$r_\mathrm{a} = \frac{v_\mathrm{p}^2 r_\mathrm{p}^2}{2\kappa M - v_\mathrm{p}^2 r_\mathrm{p}} = \frac{r_\mathrm{p}}{2\frac{\kappa M}{v_\mathrm{p}^2 r_\mathrm{p}} - 1}. \tag{44}$$

Můžeme přímo dosadit, nebo případně uvážit, že tento vztah platí i pro Zemi s kruhovou dráhou o poloměru R a konstantní rychlostí v_Z, takže

$$R = \frac{v_\mathrm{Z}^2 R^2}{2\kappa M - v_\mathrm{Z}^2 R} \qquad \Rightarrow \qquad \kappa M = v_\mathrm{Z}^2 R. \tag{45}$$

Dosazením obdržíme

$$r_\mathrm{a} = \frac{4v_\mathrm{Z}^2 \cdot 0.4^2 R^2}{2v_\mathrm{Z}^2 R - 4v_\mathrm{Z}^2 \cdot 0.4R} = \frac{2 \cdot 0.16R}{1 - 0.8} = 1.6 \text{ AU}. \tag{46}$$

Oběžnou dobu určíme ze 3. Keplerova zákona, který udává vztah mezi oběžnými dobami a hlavními poloosami dvou obíhajících těles, z nichž za jedno můžeme zvolit Zemi s $T = 1$ rok,

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{\tau^2}{a^3}. \tag{47}$$

Nejprve dopočítáme poloosu oběžné dráhy planetky

$$a = \frac{r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}}{2} = \frac{0.4 + 1.6}{2} R = R = 1 \text{ AU}. \tag{48}$$

Je zřejmé, že oběžná doba bude tedy stejná, jako u Země, tedy $\tau = 1$ rok.