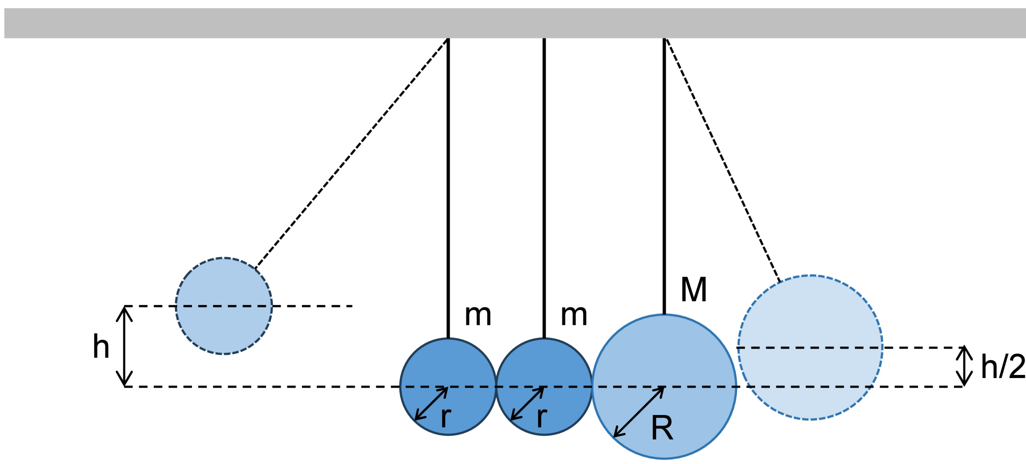
Řešení 1. opravného testu

Mechanika a molekulová fyzika
NOFY021

čtvrtek 18. ledna 2024

Příklad 1 - Tři kuličky

Zadání: Tři kuličky na obrázku jsou vyrobené z oceli a jejich srážky je možné považovat za dokonale pružné. První kuličku vychýlíme do výšky h a pustíme.
Jaký musí být poměr poloměrů R a r velké a malé kuličky, aby velká kulička vystoupala po srážce do výšky $\frac{h}{2}$?



Řešení: Rychlost 1. kuličky před srážkou s 2. kuličkou určíme z její kinetické energie, která je rovna úbytku její potenciální energie.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$
$$v_0 = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

Pro pružné srážky platí zákon zachování hybnosti i mechanické energie. Jelikož jsou hmotnosti 1. a 2. kuličky stejné, vyplývá přímo z obou zákonů zachování, že se po srážce 1. kulička zastaví a 2. se pohybuje rychlostí v_0, kterou narazí do 3. kuličky.
Zapišme si zákony zachování hybnosti a mechanické energie pro srážku 2. a 3. kuličky.

$$mv_0 = mv + MV \tag{2}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \tag{3}$$

Z rovnice (2) můžeme vyjádřit rychlost v 2. kuličky po srážce, dosadit ji do rovnice (3) a dopočítat velikost rychlosti V 3. kuličky.

$$\begin{aligned}
v &= v_0 - \frac{M}{m}V \\
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left(v_0 - \frac{M}{m}V\right)^2 + \frac{1}{2}MV^2 \\
mv_0^2 &= mv_0^2 - 2Mv_0V + \frac{M^2}{m}V^2 + MV^2 \\
0 &= -2Mv_0V + M\left(1 + \frac{M}{m}\right)V^2 \\
V &= \frac{2m}{m+M}v_0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Kinetická energie 3. kuličky po srážce se při vystoupání do výšky $\frac{h}{2}$ kompletně přemění na potenciální energii.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}MV^2 &= Mg\frac{h}{2} \qquad (5) \\
\frac{1}{2}M\left(\frac{2m}{m+M}\right)^2 v_0^2 &= \frac{1}{2}Mgh \\
\frac{4m^2}{(m+M)^2}2gh &= gh \\
8m^2 &= (m+M)^2 \\
2\sqrt{2}m &= m+M \\
M &= \left(2\sqrt{2}-1\right)m \qquad (6)
\end{aligned}$$

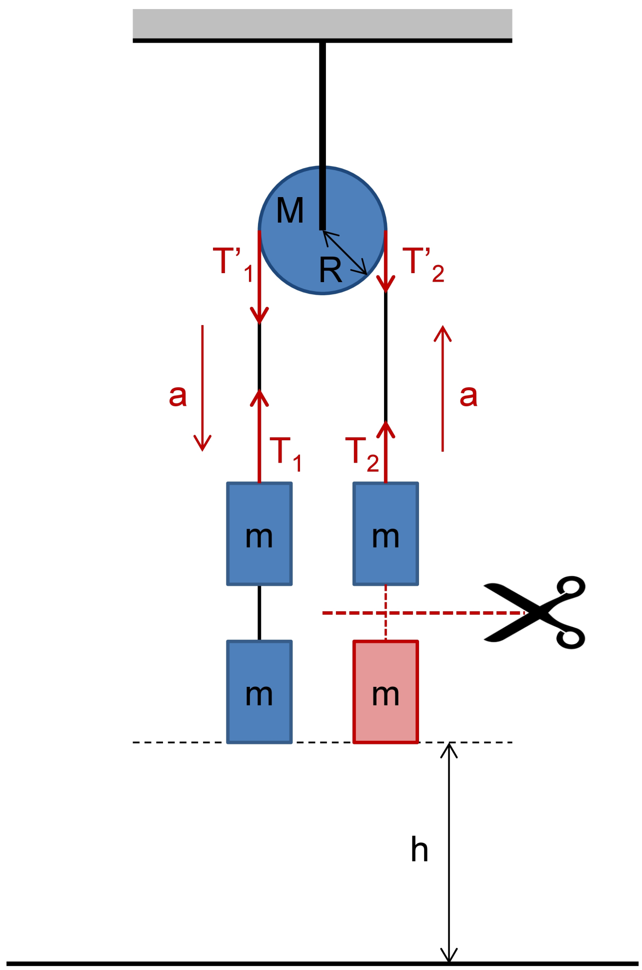
Hustota všech kuliček je stejná, jejich poloměry tedy musejí splňovat následující podmínku.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\pi R^3 &= \left(2\sqrt{2}-1\right)\frac{4}{3}\pi r^3 \\
\Rightarrow R &= r\sqrt[3]{2\sqrt{2}-1} \qquad (7) \\
R &\doteq 1.22\, r \qquad (8)
\end{aligned}$$

Příklad 2 - Těžká kladka

Zadání: Na těžké kladce o hmotnosti M jsou zavěšena 2+2 závaží o stejných hmotnostech m ve výšce h nad zemí, viz obrázek. Soustavu uvedeme do pohybu odstřižením jednoho závaží.
(a) Vypočítejte, za jak dlouho dopadne na zem odstřižené závaží.
(b) Vypočítejte, za jak dlouho dopadne na zem závaží, zavěšené na kladce.

Poznámka: Kladku považujte za homogenní válec o poloměru R, jehož moment setrvačnosti je $J = \frac{1}{2}MR^2$. Počítejte s otáčením kladky bez prokluzování.



Řešení: V momentu odstřižení pravého závaží je porušena rovnováha a soustava se začne pohybovat se zrychlením a. Na levé závaží působí tíhová síla $F_{G_1} = 2mg$ a tahová síla vlákna T_1. Podobně na zbývající pravé závaží působí tíhová síla $F_{G_2} = mg$ a tahová síla vlákna T_2. Pohyb levých i pravého závaží popisuje 2. Newtonův zákon.

$$2ma = 2mg - T_1 \tag{1}$$

$$ma = -mg + T_2 \tag{2}$$

Sečtením obou rovnic dostáváme:

$$3ma = mg - (T_1 - T_2)\,, \tag{3}$$

kde rozdíl tahových sil $(T_1 - T_2)$ je nenulový a má za následek roztáčení kladky. Otáčivý pohyb kladky popisuje 2. impulzová věta.

$$J\varepsilon = (T_1 - T_2)R \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = (T_1 - T_2)R$$

$$(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}Ma \tag{5}$$

Dosaďme vztah (5) do rovnice (3) a vypočítejme zrychlení a.

$$3ma = mg - \frac{1}{2}Ma$$

$$a\left(3m + \frac{M}{2}\right) = mg$$

$$a = \frac{m}{3m + M/2}g \tag{6}$$

Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí je $s = \frac{1}{2}at^2$. Doba t_1, za kterou dopadne levé závaží na kladce na zem je tedy:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\sqrt{\frac{3m + M/2}{m}}. \tag{7}$$

Pravé závaží padá volným pádem s tíhovým zrychlením g. Doba t_2, za kterou dopadne na zem je:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{8}$$

Poznamenejme, že stejného výsledku bychom dosáhli i výpočtem pomocí energií. Při pohybu soustavy se zachovává celková mechanická energie, část potenciální energie se přemění na kinetickou energii posuvného pohybu závaží a rotace kladky.

$$-\Delta E_p = \Delta E_k$$

$$2mgh - mgh = 3\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{9}$$

$$mgh = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{4}MR^2\frac{v^2}{R^2}$$

$$2mgh = v^2\left(3m + \frac{M}{2}\right)$$

$$v = \sqrt{2gh\frac{m}{3m + M/2}} \tag{10}$$

Zrychlení a vyjádříme ze známého vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $h = \frac{1}{2}at^2$ a rychlost $v = at$.

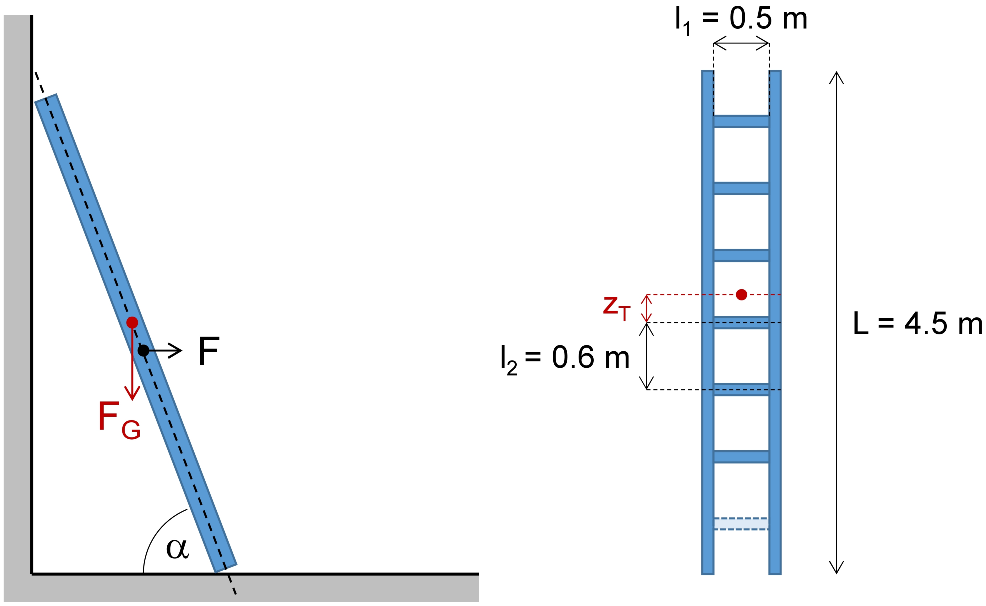
$$a = \frac{v^2}{2h}$$
$$a = \frac{m}{3m + M/2}g \tag{11}$$

Dostáváme tedy stejný výsledek jako v rovnici (6).

Příklad 3 - Opřený žebřík

Zadání: Žebřík o hmotnosti $m = 9$ kg stojí opřený o zeď tak, že svírá s podlahou úhel $\alpha = 69°$. Délka žebříku je $L = 4.5$ m, délka příček $l_1 = 0.5$ m a vzdálenost mezi jednotlivými příčkami $l_2 = 0.6$ m. Žebříku chybí nejspodnější příčka, viz obrázek. Na žebřík přesně v jeho polovině působíme vodorovnou silou F.
Určete polohu působiště tíhové síly.
Jaká je nejmenší možná velikost síly F, abychom byli schopni žebřík zvednout od zdi?

Poznámka: Hustota i tloušťka všech částí žebříku je stejná. Počítejte s hodnotou tíhového zrychlení $g = 9.81$ m s^{-2}.



Řešení: Působiště tíhové síly je v hmotném středu žebříku. Ten se nachází ve výšce z_T nad polovinou žebříku (působiště síly F) a vypočítáme ho jako vážený průměr poloh hmotných středů jednotlivých částí žebříku. Vzhledem ke konstantní hustotě i tloušťce všech částí žebříku můžeme jejich váhy-hmotnosti m_i nahradit vahami-délkami L_i.

$$z_T = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i L_i z_i}{\sum_i L_i} \tag{1}$$

$$z_T = \frac{L \cdot (0+0) + l_1 \cdot (-2-1+0+1+2+3) l_2}{2L + 6l_1}$$

$$z_T = \frac{3 l_1 l_2}{2L + 6l_1} \tag{2}$$

$$z_T = 0.075 \text{ m} \tag{3}$$

Chceme-li žebřík zvednout od zdi, musí být moment síly F větší než moment tíhové síly.

Velikost momentu síly F (směřuje *za obrázek*) je:

$$\tau_F = F\frac{L}{2}\sin\alpha, \tag{4}$$

velikost momentu tíhové síly F_G (směřuje *před obrázek*) je:

$$\tau_{F_G} = mg\left(\frac{L}{2} + z_T\right)\cos\alpha. \tag{5}$$

Mezní případ odpovídá jejich rovnosti.

$$\tau_F = \tau_{F_G}$$

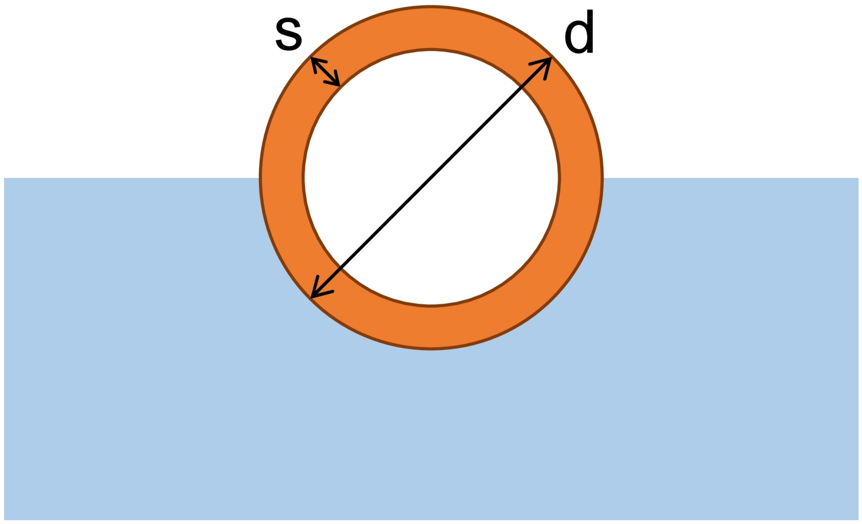
$$\frac{1}{2}FL\sin\alpha = mg\left(\frac{L}{2} + \frac{3l_1l_2}{2L+6l_1}\right)\cos\alpha$$

$$F = mg\,\mathrm{cotg}\alpha\left(1 + \frac{3l_1l_2}{L^2+3Ll_1}\right) \tag{6}$$

$$F \doteq 35\ \mathrm{N} \tag{7}$$

Příklad 4 - Dutá koule ponořená do kapaliny

Zadání: Dutá mosazná koule má vnější průměr $d = 20$ cm. Určete tloušťku stěny koule s tak, aby byla ponořena právě do své poloviny v kapalině, jejíž hustota je $\varrho_k = 900$ kg m^{-3}. Hustota mosazi je $\varrho_m = 8200$ kg m^{-3}.



Řešení: Na kouli působí tíhová síla F_G a vztlaková síla F_{vz}. Zatímco tíhová síla je dána pouze hmotností resp. objemem mosazné části koule, vztlaková síla objemem ponořené části celé koule. Pro jednoduchost si označme $d_0 = d - 2s$ jako průměr dutiny a spočítejme obě síly.

$$F_G = mg$$
$$F_G = \varrho_m \frac{4}{3}\pi \left[\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \left(\frac{d_0}{2}\right)^3\right] g$$
$$F_G = \frac{\pi}{6}\left(d^3 - d_0^3\right) \varrho_m g \tag{1}$$

$$F_{vz} = \varrho_k V g$$
$$F_{vz} = \frac{1}{2}\varrho_k \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 g$$
$$F_{vz} = \frac{\pi}{12} d^3 \varrho_k g \tag{2}$$

V rovnováze mají tíhová a vztlaková síla stejnou velikost a opačný směr. Z této rovnosti již snadno dopočítáme tloušťku stěny s.

$$F_G = F_{vz}$$

$$\frac{\pi}{6}\left(d^3 - d_0^3\right)\varrho_m g = \frac{\pi}{12} d^3 \varrho_k g$$

$$d_0^3 = d^3 \left(1 - \frac{\varrho_k}{2\varrho_m}\right) \tag{3}$$

$$s = \frac{d - d_0}{2}$$

$$s = \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{\varrho_k}{2\varrho_m}\right)}\right) \tag{4}$$

$$s \doteq 1.8 \text{ mm} \tag{5}$$